

분리 상태를 고려한 탄성마찰시스템의 임계 썩기 계수

김상규¹ · 장용훈^{2*}

¹연세대학교 대학원 기계공학과 석사과정생

²연세대학교 기계공학과 교수

Critical Wedging Coefficient in Frictional Elastic System Considering Separation State

Sangkyu Kim¹ and Yong Hoon Jang^{2*}

¹Graduate Student, Dept. of Mechanical Engineering, Yonsei University

²Professor, School of Mechanical Engineering, Yonsei University

(Received September 25, 2020 ; Revised November 13, 2020 ; Accepted November 24, 2020)

Abstract – Wedging in a frictional elastic system is defined if the state of stick exists after the external loading on the system is removed. This paper presents a method to determine the critical coefficient of wedging for an elastic frictional system by considering the separation state. Wedging is always possible if the coefficient of friction exceeds a critical value known as the critical wedging coefficient. This method requires two concepts: a necessary and sufficient condition for wedging, which can be interpreted as positive spanning sets of constraint vectors existing in the wedged system, and the minimal positive basis that enables a minimum wedging coefficient. The algorithm based on the positive spanning concept is repeatedly executed after eliminating nodes from the contact stiffness matrix, for which the separation states are impending. The simulation results show that once a node enters the separation state, it never returns to the contact state again and the critical wedging coefficient reduces during repeated algorithm execution. The benefit of this method is that the computation time permits handling models with large numbers of contact nodes. The algorithm can also numerically find the critical wedging coefficient, thereby contributing to fastening and assembly performance improvements in mechanical systems.



© Korean Tribology Society 2020. This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License(CC BY, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction of the work in any medium, provided the original authors and source are properly cited.

Keywords – wedging(썩기현상), critical wedging coefficient(임계 썩기마찰계수), positive spanning(양의 생성), discrete frictional system(이산마찰 시스템), separation state(분리상태)

1. 서 론

탄성 마찰 시스템에서 마찰 계수가 특정한 임계 마찰

계수 값을 넘어가는 경우에, 외부하중이 제거된 상태에서도 마찰에 의한 접촉면의 접선 방향 변위와 수직 접촉 반력이 0이 아닌 상태를 유지하게 된다. 이러한 현상을 썩기현상이라고 한다. 이 현상은 오랫동안 알려져 왔으며 엔지니어링 구조 설계에 널리 사용된다. 실용적인 응용 썩기에는 나사 체결[1], 구멍에 핀 체결, 조립[2,3] 및 고관절 교체 시스템[4] 등이 포함된다. 이러한 시스템은 썩기 조건에 의하여 그 성능이 영향을 받을 수 있다.

*Corresponding author: Yong Hoon Jang

Tel: +82-2-2123-5812, Fax: +82-2-312-2159

E-mail: jyh@yonsei.ac.kr

<https://orcid.org/0000-0002-5436-5465>

<https://orcid.org/0000-0002-7535-5741>(Sangkyu Kim)

쿨롱(Coulomb) 마찰법칙을 따르는 탄성체의 썩기 조건은 접촉강성행렬과 마찰계수와 깊은 관련이 있다. 마찰계수가 특정값 이상이 되면 썩기 현상이 발생 가능해 지는데, 이때의 마찰계수를 임계값으로 정의한다[5]. 이 값을 결정하기 위해 몇몇 연구자들은 연속적인 시스템 또는 이산 시스템에 대한 고유값 (Eigenvalue) 문제를 제시한 바 있다[6-8]. 이후, Barber and Hild[9]에 의해 접촉 강성행렬과 마찰 계수의 조합으로 이루어진 행렬의 가장 낮은 고유값을 탐색하는 알고리즘이 고안되었다. 이산화 된 마찰 문제에서의 썩기 조건을 찾기 위해 Fujita and Kanno[10]는 임계 썩기 마찰 계수를 구하는 새로운 방법을 제안하였는데, 주어진 접촉 문제에서의 허용 영역(Feasible Region)을 실제로 구하는 “이중 표현 방법(Double description method)”이라 불리는 극한 광선(Extreme rays)의 도출 알고리즘(Enumeration algorithm)을 통해 특정 마찰 계수 하에서의 모든 썩기 형상을 얻었다. Pinto Da Costa [11] 역시 같은 도출 알고리즘을 응용한 de Moore의 알고리즘을 이용해 일반화된 선형 상보성 문제(Generalized linear complementarity problem)로 표현되는 썩기 문제를 풀었다. 그리고 최근 Kim 등 [12]은 완전 접촉 문제에서의 썩기 조건과 동치인 수학적 정의를 발견하였다. Kim등은 접촉 강성과 마찰계수로 구성된 구속 벡터 (Constraint vector)를 정의하고, 이들의 조합을 활용해 썩기 조건을 탐색하였다. 썩기 현상이 발생하기 위해서는 이들 구속 벡터의 조합 중에 접촉 변위 벡터 공간을 양의 생성(Positive spanning)되도록 하는 조합이 존재하지 않는다. 이 조건은 필요 충분 조건으로서 제시되며 후술할 2.3절에서 이에 대한 내용이 논의된다.

지금까지 제시된 썩기 알고리즘에는 각각 고유의 장점이 있지만 몇 가지 한계점도 있다. Barber 와 Hild[9]의 방법은 실제 임계값인 최저값에서의 수렴성을 보장하는지는 확실하지 않다. 반면 Fujita와 Kanno[10]와 Pinto Da Costa[11]의 방법은 계산량이 기하급수적으로 많아 사용이 제한적이다. 최근 Kim and Jang[13]은 썩기 현상의 필요 충분 조건[12]을 사용하여 점진적으로 마찰계수를 증가시켜 완전 접촉 문제의 구속 조건 벡터의 양의 생성 여부를 판별하여 임계 썩기 마찰 계수를 결정하였다. 그러나 이 알고리즘은 접촉면의 모든 절점들이 접촉을 하는 완전접촉상태를 가정하고 있어서 분리 상태를 고려한 문제에 적용하기에는 제한적이다. 여기서 분리 상태란, 탄성체의 절점들 중 일부가 미끄러짐 표면 상에서 떨어져 나와 수직 방향의 변위를 갖게 되는 상태를 의미한다. 본 연구에서는 Kim and Jang에 의한 방법론 [13]을 확장하여 분리 상태를 고려한 마찰접촉문제에 대

해 임계 썩기 마찰 계수를 결정하는 방법론이 실현가능 한지를 살펴보고자 수치해석적 논거를 제시하고자 한다. 또한 이전에 소개된 양의 생성 판단 알고리즘의 수학적 증명을 위한 새로운 설명을 덧붙이고자 한다.

2. 연구방법 및 내용

2-1. 이산 마찰 시스템의 지배 방정식

쿨롱 마찰 법칙에 의해, 접촉 노드의 상태는 미끄러짐 (Slip)과 고정(Stick)으로 분류할 수 있고, 다음의 두 식으로 표현된다.

$$|Q| = fP \tag{1}$$

$$|Q| \leq fP \tag{2}$$

여기서 Q 는 접선 방향의 접촉 반력이며 P 는 수직 방향의 접촉 반력을 의미한다.

N 개의 접촉 절점이 있는 이산화 된 마찰 시스템의 경우, 절점 i 에 작용하는 준 정적(quasi-static)인 접촉 운동 방정식은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ p_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_i^w \\ p_i^w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij}^T \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (i, j=1, N), \tag{3}$$

2차원 문제에서 접촉면 접선의 두 가지 방향인 수평 방향과 수직 방향에 따라 각각 반력의 크기를 (q, p) , 각각의 변위를 (v, w) 로 나타낸다. (q^w, p^w) 는 외부 하중에 의하여 각 절점에 발생하는 외력으로서, 각 절점이 움직이지 않기 위해 마찰 표면이 절점에 가해주어야 하는 힘의 크기와 동일하다. 탄성체의 특성에 의해서 결정되는

접촉 강성 행렬은 $\begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij}^T \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix}$ 로 나타낸다. 접촉 강성 행렬은 주어진 시스템에 대한 전체 강성 행렬 축소 방법 (Static reduction)을 통해 얻어지므로 양의 정 부호 (Positive definite) 행렬이고 대칭이며 따라서 A, D 행렬 역시 대칭인 형태를 갖는다 [14].

2-2. 썩기 현상의 정의와 썩기 조건

앞선 2.1절에서 설명한 N 개의 접촉 절점이 있는 마찰 시스템에 대하여 썩기 조건이 발생할 가능성을 탐구해 본다. 외부 하중이 제거된 상태 $(q_i^w = 0, p_i^w = 0)$ 에서 모든 절점의 분리가 없는 상태를 가정한다 $(w_j = 0)$. 이에

따라, 앞선 식 (3)을 다음과 같이 단순화시킬 수 있다.

$$q_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} v_j \tag{4}$$

$$p_i = \sum_{j=1}^N B_{ij} v_j \tag{5}$$

분리가 없는 마찰조건으로 다음의 식을 적용한다.

$$-fp_i \leq q_i \leq fp_i, \tag{6}$$

여기서 f 는 마찰계수이다. 위의 식들을 합치면 다음의 두 개의 접촉 부등식으로 표현할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} - fB_{ij}) v_j \leq 0 \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^N (-A_{ij} - fB_{ij}) v_j \leq 0 \tag{8}$$

여기서 j 는 dummy index이므로 각각 A_{ij} , B_{ij} 는 행렬 A , B 의 j 번째 행을 의미한다. 위의 부등식은 언제나 자명해(trivial solution)인 $v_j = 0$ 을 해로 갖는다. 그러나 $v_j \neq 0$ 인 해를 갖기 위해서는 두 부등식의 공통적인 영역이 존재해야 한다. 그렇지 않다면, 기존의 가정한 분리상태가 없고($w_j = 0$), 마찰에 의한 미끄러짐 변위도 없는($v_j = 0$) 원래의 상태만을 유일한 해로 갖기 때문이다. 즉, 썩기 현상의 가능성 유무는 이 부등식의 영역의 존재 유무에 따라 결정된다. 한편, 위의 부등식을 벡터 형태로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_k \cdot V \leq 0 \tag{9}$$

여기에서 V 는 N 차원의 벡터 공간 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 을 의미한다. V 와 내적 곱 되는 행 벡터 C_k ($k \in \{1, 2, \dots, N\}$)를 ‘구속 벡터’로 정의한다. 식 (7), (8)에서 각각의 구속 벡터 C_k 의 형태가 다르게 나타나는 것에 주목하자. 또한 두 벡터의 크기를 1로 정규화 하여 표현한다.

$$C_{2i-1} = \frac{(A_{ij} - fB_{ij})^T e_i}{|(A_{ij} - fB_{ij})^T e_i|}; C_{2i} = \frac{(-A_{ij} - fB_{ij})^T e_i}{|(-A_{ij} - fB_{ij})^T e_i|} \tag{10}$$

2-3. 썩기 현상의 필요 충분 조건

썩기 조건과 구속 벡터들의 상관 관계는 Kim and Jang

[13]에 의해 수학적으로 증명된 바 있다. 이를 정리하면 다음의 (정리 1)로 요약할 수 있다.

(정리 1) 완전 접촉을 이루는 N 개의 절점으로 이뤄진 이산 탄성 마찰 시스템에서 다음의 명제들은 서로 동치의 관계이다.

- (가) 마찰 시스템에서 썩기 현상이 발생하지 않는다.
- (나) 구속 벡터의 집합 $C = \{C_k, k=1, \dots, 2N\}$ 은 \mathbb{R}^N 에 대한 양의 생성 집합이다.
- (다) \mathbb{R}^N 에 대한 양의 기저(base) $P \subset C = \{C_k, k=1, \dots, 2N\}$ 가 존재한다.

(정리1)은 마찰 시스템의 구속 벡터들로 이루어진 집합에 대해서 세계의 완전히 동일한 상태를 제시하고 있다. 이러한 집합들의 여집합들에 대해서도 동일한 관계가 성립한다. (가) = (나) = (다)가 성립한다면 (가)^c = (나)^c = (다)^c ((가)^c: (가)의 여집합) 역시 성립해야 하기 때문이다.

(정리 2) 완전 접촉을 이루는 N 개의 절점으로 이뤄진 이산 탄성 마찰 시스템에서 다음의 명제들은 서로 동치의 관계이다.

- (가) 마찰 시스템에서 썩기 현상이 발생한다.
- (나) 구속 벡터의 집합 $C = \{C_k, k=1, \dots, 2N\}$ 은 \mathbb{R}^N 에 대한 양의 생성 집합이 아니다.
- (다) \mathbb{R}^N 에 대한 양의 기저 $P \subset C = \{C_k, k=1, \dots, 2N\}$ 가 존재하지 않는다.

위의 (정리 1,2)에 표현된 ‘완전 접촉’은 외부 하중 변화에 따른 접촉면의 크기 변화가 무관한 경우(Hills et al. [17])로, 처음 설정한 접촉 절점이 분리하거나 혹은 반대로 분리된 절점이 접촉 절점으로 전환하지 않는다. (정리 2)에 의하여 썩기 문제의 필요 충분 조건을 확인할 수 있다.

2-4. 임계 썩기 마찰 계수의 존재성

임계 썩기 마찰 계수는 썩기 현상이 발생하는 경계가 되는 마찰계수 값을 의미한다. 이러한 임계 값이 존재하는지 여부에 대한 논증은 Kim, Jang, Barber[12]에 의해 상세하게 다뤄진 바 있다.

식 (9)의 부등식에 의해, 구속 벡터는 N 개 절점의 접선 방향 변위로 이루어진 N 차원의 허용 공간을 정의하게 된다. 이 때 허용 공간과 불허용 공간의 경계가 되는 평면이 존재하는데 이것을 미끄러짐 구속 평면($C_k \cdot V = 0$)이라 부른다. 미끄러짐 구속 평면 상에 존재하는 모든 변위 벡터 V 에 대해, 해당 구속 벡터 C_k 는 수직인 관계

가 성립한다. 구속 벡터 C_k 자신과 같은 방향의 $(C_k \cdot V > 0$ 이 성립하는) 모든 변위 벡터 V 를 허용 공간에서 제외시킨다.

식 (10)은 하나의 쌍을 이루는 구속 벡터이며 n 번째 절점에 대한 마찰 부등식에서부터 파생된다. 만약에 인위적으로 마찰 계수 값을 0에서부터 점차 증가시켜 나간다면, 두 벡터는 서로 반대 방향인 $\frac{A_{ij}^T e_i}{|A_{ij}^T e_i|}$ 과 $-\frac{A_{ij}^T e_i}{|A_{ij}^T e_i|}$ 에서 출발하게 된다. 마찰 계수 f 가 증가함에 따라, 벡터 B_{ij}^T 의 영향이 커지고 A_{ij}^T 의 영향은 상대적으로 감소하게 된다. 마찰 계수가 무한대로 증가하면 두 구속 벡터는 $\frac{B_{ij}^T e_i}{|B_{ij}^T e_i|}$ 로 수렴하게 된다.

처음 $f=0$ 인 상태에서는 어떠한 구속 벡터의 쌍에서도 허용 영역이 존재하지 않으므로 각 구속 벡터 쌍들의 공통된 허용 영역도 존재하지 않는다. 그러나 마찰계수 f 의 증가에 따라 구속 벡터의 특수한 거동으로 인해, 각 구속벡터의 쌍 (10)으로 인해 정의되는 허용 영역은 단조 증가하므로 어느 순간 모든 구속 벡터 쌍의 공통된 허용 영역이 발생하는 임계 점이 존재하게 된다.

2-5. 임계 썩기 마찰 계수의 탐색

일반적으로, 임의의 벡터 집합에서 양의 기저가 존재하는지 여부를 판별하기 위해서는 양의 기저의 크기를 알아야 한다. 양의 기저의 크기는 $N+1$ 부터 $2N$ 을 갖는다. 그러나 간단한 논증으로, 우리는 $N+1$ 개의 원소를 갖는 양의 기저만 탐구해도 된다는 결론을 얻을 수 있다.

이에 대하여 Davis의 정리 4.1[16]는 비최소(non-minimal) 양의 기저에 대해 다음을 말하고 있다.

(정리 3) \mathbb{R}^N 에 대한 비최소 양의 기저 $\{C_1, \dots, C_r\}$ ($r > N+1$)에 속한 모든 벡터 C 는 부분 공간에 대한 최소 양의 기저의 일부이다.

Fig. 1과 Fig. 2는 그림으로 (정리 3)을 표현한 것이다. 3차원 공간 상에서의 최소 양의 기저의 크기는 $(N+1) = 3+1 = 4$ 이므로, 비최소 양의 기저의 형태는 벡터 5 또는 6개로 구성된 경우이다. Fig. 1에서는 $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ 로 구성된 비최소 양의 기저가 나타나 있다. 앞선 (정리 3)에 의해, $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ 의 모든 원소는 최소 하나 이상의 부분공간(subspace)을 양의 생성하는 최소 양의 기저의 일부이다. 예를 들어서 Fig. 1 (c)에서 볼 수 있듯이 C_5 는 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 에 의해 생성되는 파란색 평면에 대한 최소 양의 기저의 원소이다. Fig. 2에서는 $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ 으로 구성되는 비최소 양의 기저가 나타나 있다. $(2N) = 2 \times 3 = 6$ 이므로 이 집합은 최대 양의

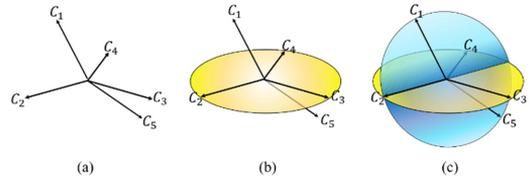


Fig. 1. Non-minimal basis with five constraint vectors in three-dimensional space. (a) five non-minimal basis vectors $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ (b) the two-dimensional space positively spanned by $\{C_2, C_3, C_4\}$ pictured as the yellow plane (c) the two-dimensional space positively spanned by $\{C_1, C_2, C_3\}$ pictured as the blue plane.

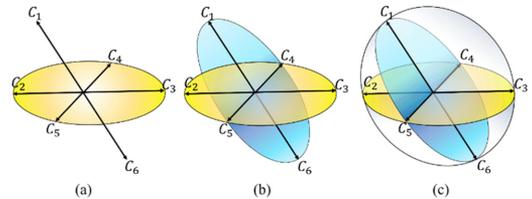


Fig. 2. Non-minimal basis with six constraint vectors in three-dimensional space. (a) two-dimensional yellow subspace positively spanned by $\{C_2, C_3, C_4, C_5\}$ (b) the two-dimensional blue subspace positively spanned by $\{C_1, C_4, C_5, C_6\}$ (c) the two-dimensional white subspace positively spanned by $\{C_1, C_2, C_3, C_6\}$.

기저이기도 하다.

다시 본론으로 돌아와서, 특정 벡터들의 집합이 (정리 3)에 나온 비최소 양의 기저가 되기 위해서는, 먼저 부분공간의 양의 기저가 되어야한다. 그런데, 앞서 구속 벡터의 거동을 살펴볼 때, 임의의 벡터들이 하나도 빠짐없이 변화하는 도중 우연히 부분공간의 양의 기저가 된다는 것(Fig. 1 또는 Fig. 2와 같은 상태)은 인위적으로 만들지 않는다면 사실상 불가능할 것이다. 따라서 그러한 상황은 발생하지 않거나, 검출하기 어려운 극히 짧은 순간에만 일어난다.

$N+1$ 크기의 집합이 양의 기저인지 판별하는 것은 $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_{N+1} C_{N+1} = 0$ 를 만족시키는 $\lambda_i > 0$ 가 존재한다는 사실로부터 구할 수 있다. 그러므로 벡터들 중 하나를 우변으로 이항하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_N C_N = -C_{N+1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N > 0 \quad (11)$$

따라서 식 (11)의 해인 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 가 모두 양의 값을 갖는지 확인하는 방법을 통해서 양의 기저 여부를 판별할 수 있다.

이상과 같은 양의 기저에 대한 판별 기준을 근거로 최근 Kim and Jang은 임계 췌기 마찰 계수를 탐색하는 새로운 알고리즘의 방법론을 제시하고 있다[13].

2-6. 분리 상태를 고려한 임계마찰계수

마찰 계수를 임의로 조절할 수 있다고 가정할 때, 마찰 계수가 임계 췌기 마찰 계수 f_w 보다 미소하게 작은 값에서 접근하는 좌극한 f_w^- 을 생각해 볼 수 있다. $f=f_w^-$ 인 경우에는 항상 구속벡터에 대한 양의 생성조합이 존재한다. 예를 들어 5개 절점으로 이뤄진 마찰 시스템을 가정하면, $f=f_w^-$ 에서 양의 생성을 하는 최소 양의 기저를 구성하는 6개의 구속벡터가 존재한다. 그리고 임계 췌기 마찰 계수인 $f=f_w$ 일 때는 5개의 구속 벡터들이 최초의 허용영역을 형성한다. 만약 마찰계수가 임계 췌기 마찰 계수보다 미소하게 증가한 우극한 값 $f=f_w^+$ 인 시스템에서 절점들을 허용공간상의 변위만큼 이동시킨다면 외부 하중이 없이도 해당 변위로 변형한 상태를 유지할 것이다. 이때, 다시 인위적으로 마찰 계수를 감소시켜 나간다면, $f=f_w$ 로 전환하는 과정에서 최초의 허용 영역을 구성한 5개의 구속벡터들에 의해 허용 영역이 사라질 것이다. 이로 인해, 각 절점은 더 이상 변형된 상태를 유지하지 못하고 본래의 위치(원점)로 돌아간다. 앞선 2.2 절에서, 각각의 구속벡터들은 특정 절점의 특정 방향으로의 미끄러짐이 시작되는 제약 조건을 의미한다는 것을 유추할 수 있다. 따라서 $f=f_w^+$ 에서 허용공간을 없애는 5개의 구속 벡터들은 사실 절점이 원점으로 돌아가기 위해 미끄러지는 방향을 의미한다는 것을 알 수 있다.

임계 췌기 마찰 계수를 찾기 위한 양의 생성 판단 알고리즘[13]을 사용하면 $f=f_w$ 에서 임계 췌기 마찰 계수를 결정하는데 작용하는 N 개의 벡터를 찾을 수 있다. 일반적인 경우 이 N 개의 벡터들은 각각 N 개 절점의 한쪽 방향 미끄러짐을 갖게 된다.

따라서 다음의 가설을 통해 분리상태가 존재할 때 임계 췌기 마찰 계수를 찾는 방법을 제안한다. 임계 췌기 마찰 계수를 결정하는 N 개의 벡터 집합이 N 개의 절점 각각에서 하나의 구속 벡터를 포함한다면 그 때의 마찰계수는 분리상태가 허용되는 문제에 대한 임계 췌기 마찰 계수 f_w 일 수 있다. 그러나 임계 값을 결정하는 데 필요한 집합에 동일한 절점으로부터 한 쌍의 구속 벡터가 모두 포함된다면, 식 (7),(8)에 의해

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} - fB_{ij})v_j = 0, \sum_{j=1}^N (-A_{ij} - fB_{ij})v_j = 0$$

이 되므로 두 식을 더하면 $p_i = \sum_{j=1}^N B_{ij}v_j = 0$ 이 된다. 즉 한 쌍의 구속 벡터가

동시에 허용 영역에 수직하므로, 해당 절점에서의 접촉 수직 반력 $p_i=0$ 이 되어 접촉이 발생하지 않는다.

$f=f_w$ 으로 마찰 계수가 감소하면, 해당 절점은 분리 상태로 전환하게 된다. 따라서 다음과 같은 과정으로 임계 췌기 마찰 계수를 찾을 수 있다.

1. 문제의 절점이 접촉압력이 없다고 가정한 상태에서 강성행렬을 줄인다.
2. 해당 절점을 제외한 새로운 모델을 이용해 새로운 임계 췌기 마찰 계수를 구한다.
3. 해당 모델에서 분리상태가 존재하는 절점이 없을 때까지 반복한다.

새로운 모델을 구성하는 이러한 강성 축소 과정이 계속된다면 임계 췌기 마찰 계수는 접촉 강성 행렬이 축소되기 전의 췌기계수보다 낮은 값으로 계속 나타날 수 있다.

3. 결과 및 고찰

분리 상태에서의 임계 췌기 마찰 계수를 찾기 위한 방법론이 실현가능한지를 살펴보기 위해 2차원 마찰문제를 Fig. 3에 도시하였다. 이 물체의 접촉면이 큰 마찰계수를 가질 경우 오른쪽 수직면에 힘을 가한 후 제거하면 췌기상태가 된다. 또한 물체의 상단 면은 y축 방향에 대해 대칭인 경계조건을 갖게 되어 수평방향으로 자유롭게 움직일 수 있다. 접촉면은 꺾여있는 형태이며 최대 16.7° 최소 11.3°의 접촉각도를 갖는다. 꺾임이 없는 췌기 형상이라면, 각각의 각도를 갖는 췌기 형상은 $\tan(16.7^\circ) = 0.3, \tan(11.3^\circ) = 0.2$ 의 임계 췌기 마찰 계수를 가질 것이다. 접촉단면은 103개의 유한요소로 나누어졌으며 분리상태가 없는 조건하에서 2.381의 임계 췌기 마찰 계수를 갖는다.

2.4절에서 소개된 양의 생성판단 알고리즘을 반복적으로 실행한다. 이러한 절점들은 양의 생성판단 알고리즘

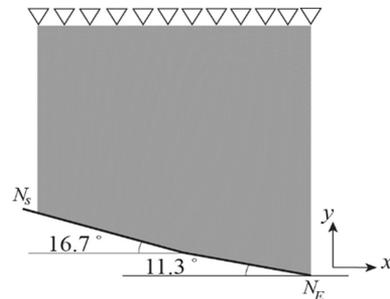


Fig. 3. Wedging geometry with kinked section having contact angles of 11.3° and 16.7°, respectively.

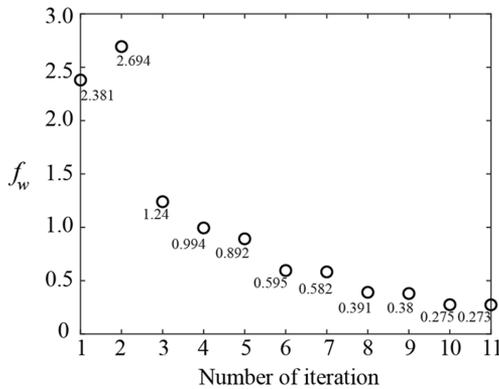


Fig. 4. Variation of critical wedging coefficient as the elimination process of separation nodes is repeated.

을 실행 후 내부 절점으로 변경된다.

Fig. 4는 분리상태의 절점 제거 과정을 반복할 때 임계 췌기 마찰 계수의 변화를 보여준다. 11번째 실행에서 마침내 분리상태가 임박한 절점이 더 이상 표시되지 않는 상태에 도달한다. 상태가 그 때의 임계 췌기 마찰 계수는 0.273이다. 앞절에서 예상한 바와 같이 분리상태 절점을 제거해가면 임계 췌기 마찰 계수는 계속 감소하는 경향을 보이고 있다.

Fig. 5는 분리상태 절점을 제거하는 과정에 따라 양의 생성 판단 알고리즘을 수행 후 얻은 접촉면의 접촉상태 변화에 대한 결과이다. 그림의 흰색, 회색, 검정색으로 표현되는 영역은 각각 임계 췌기 마찰 계수 값에서 분리, 미끄러짐, 고정에 임박한 영역을 의미한다. 알고리즘을

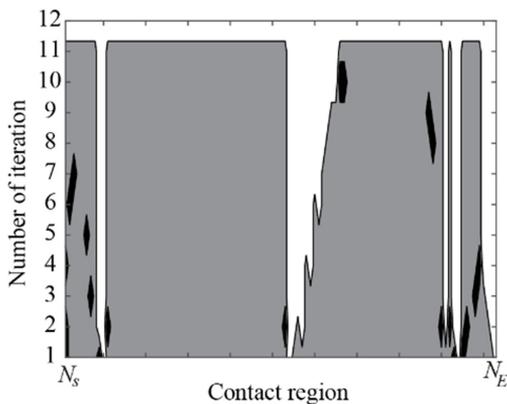


Fig. 5. Evolution of contact status as the elimination process of separation is repeated, denoting that the white, grey and black regions mean the imminent separation, slip and stick regions, respectively.

반복하여 수행할 때 마다 꺾인 접촉면 부근에서 분리상태의 영역이 확장이 되고 있다. 알고리즘을 11번 반복하여 실행한 후 얻은 결과 더 이상 접촉 상태의 변화가 나타나지 않는 것으로 나타났다. Fig. 5의 결과에서, N_s 와 N_E 각각에 가까운 쪽에서 나타나는 분리 영역은 프로그램의 구동 상 한번 분리 상태로 판정이 난 절점은 다음 실행시 해당 절점이 다시 접촉 절점으로 되돌아오는 것을 허용하지 않았기 때문에 발생하는 현상으로 보인다. 이는 추후 프로그램의 보안을 통해 다음 실행에서 해당 췌기 모델에 대해 정적 해석을 수행했을 때 분리 절점에서 $w > 0$, 즉 양의 수직 변위를 갖는지 여부를 판단해보고, 만약 그렇지 않다면 다시 접촉 절점에 편입시키는 방식으로 보완할 수 있다. N_E 끝 단에서 발생하는 분리 영역 역시도 프로그램 상에서 분리 상태가 유지되는지 확인해 볼 수 있을 것이다.

Fig. 6은 Fig. 5에 나타난 반복 실행 횟수에 따라 췌기 현상이 발생한 접촉 변위와 접촉압력이 어떻게 변화해 가는지 도시한 결과이다. 중앙의 주 분리 영역을 근방으로 3, 5번째 반복 실행에서 분리 영역에 가깝지만 붙어 있지는 않은 절점이 추가로 분리되며 영역이 확장되어 가는 것을 확인할 수 있다. 분리 영역에 바로 맞닿은 절점이 아니더라도, 그 근처에서는 분리 절점으로 빠르게 전환되는 것으로 보인다.

양의 생성판단 알고리즘을 통해 얻은 결과를 확인하기 위해 Fig. 3에 제시된 모델을 상용해석 프로그램인 ABAQUS를 이용하여 췌기상태를 판단하였다. 즉 이 모델의 접촉면에 마찰계수 0.273 ± 0.001 를 부여하고 미끄러짐 변위가 각각 잔존하는지를 판단하여 0.273의 마찰 계수 값을 경계로 췌기 현상이 발생함을 확인하였다.

이상과 같이 수치해석적 방법으로 분리상태를 고려한 임계 췌기 마찰 계수를 찾는 방안의 실행가능성은 있다고 사료된다. 또한 기존의 방법론인 Fujita 와 Kanno [10]와 Pinto Da Costa [11]의 방법과 현재 알고리즘의 계산 속도를 비교하면 상당히 빠르다는 것을 알 수 있다. 특히 Fujita와 Kanno [10] 의 경우 19개의 절점에서도 약 1시간의 계산이 소요가 된다고 보고하고 있다. 그러나 본 예시에서는 무려 100여개의 절점 문제에 대해 약 7분정도가 소요가 된다. 단 계산 속도 비교는 같은 조건에서 진행한 것이 아니기 때문에 절대적인 비교의 의미는 없다. 다만 본 알고리즘의 계산 속도가 일반적인 접촉 절점 개수를 갖는 문제에 대해 현실적으로 수용할 만하다.

알고리즘의 반복된 과정에서 임계 췌기 마찰 계수는 수렴하는 양상을 보인다. 추후 엄밀한 수학적 증명을 하

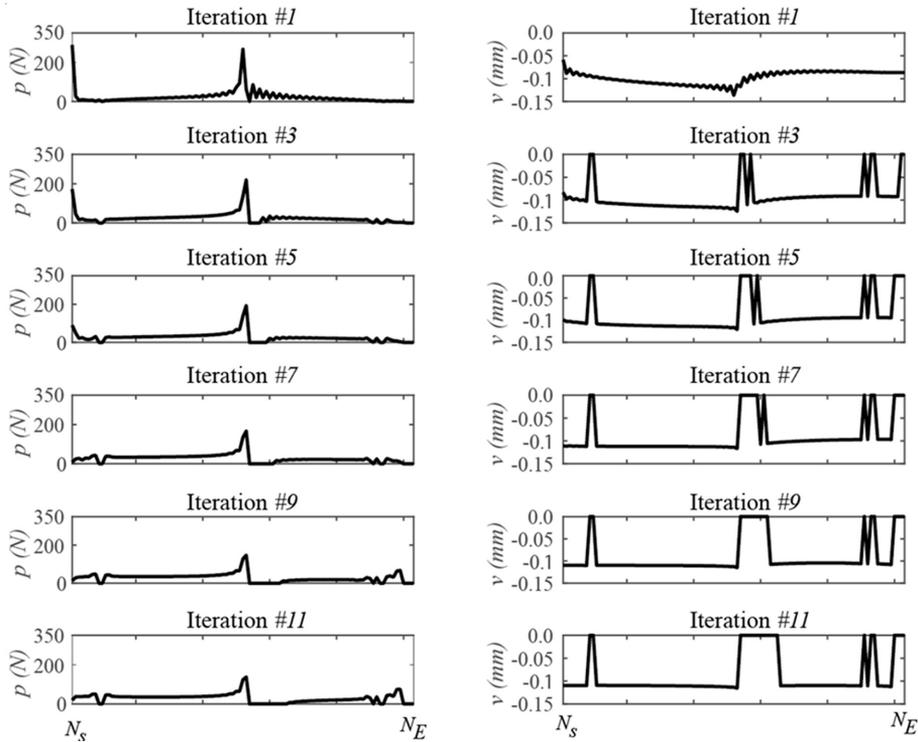


Fig. 6. Evolution of contact pressure and wedged displacement along the contact surface from the first iteration to the final iteration. Separation region widens in the area where the angle changes from 11.3° to 16.7° .

는 연구 및 3차원 마찰문제에서 효과적으로 적용되는 알고리즘의 완성 등이 앞으로 남아 있는 연구주제가 될 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 분리 상태를 고려한 탄성 마찰 시스템의 임계 썩기 마찰 계수를 결정하기 위해 새로운 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘에서는 분리 상태가 임박한 절점을 선정하여 접촉강성행렬에서 제거한 후 기존의 양의 생성판단 알고리즘을 반복적으로 실행한다. 알고리즘의 반복 과정에서 임계 썩기 마찰 계수는 감소한다. 또한 썩기 조건의 필요충분조건에 대해 새롭게 부연하여 설명하였다. 마찰 면의 절점 개수가 많은 문제에 대해서도 계산시간이 상당히 적게 소요된다. 분리상태를 고려한 임계 썩기 마찰 계수를 찾는 알고리즘은 수치해석적으로 결과를 도출할 수 있는지를 확인하고 있지만 아직 엄밀한 수학적 증명은 부재하다. 임계 썩기 마찰 계수를 판별하는 프로그램은 기계시스템의 체결 및 조립성능향상에 크게 기여할 수 있다.

Acknowledgement

이 논문은 2020년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구 사업임 (No. 2018R1A2B6008891).

부 록

(정리 1에 대한 증명) 썩기 조건과 구속 벡터의 특정한 조합 사이에는 수학적으로 동치 (필요 충분 조건)인 명제가 존재한다.

썩기 현상이 발생하는 경우에는 구속 벡터 (C_i)들이 공간상에 허용 공간을 남기게 된다. 이 때 공간상의 허용 공간 상에 존재하는 모든 변위 벡터 V 와 구속 벡터의 내적 ($C_i \cdot V$)은 식 (9)에 의해 모두 양이 아닌 값을 갖는다. 이 식은 Regis [15]의 Theorem 2.6를 위반하므로, 구속 벡터들은 전체 N 차원 공간을 양의 생성하지 않는다는 것을 알 수 있다. 역 명제 또한 마찬가지이다. 역 명제인 “구속 벡터들이 전체 N 차원 공간을 양의 생성하지 않으면 허용공간이 존재한다”의 대우를 증명하기 위해

허용 공간이 존재하지 않는 시스템을 생각해 볼 수 있다. 이 범위 공간상에 존재하는 모든 벡터 \mathbf{V} 는 허용 공간이 아니므로, $\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{V} > 0$ 를 만족하는 적어도 하나의 구속벡터가 존재한다. 이는 Regis [15]의 Theorem 2.6에 의해서 구속 벡터의 집합 $C = \{\mathbf{C}_k, k = 1, \dots, 2N\}$ 이 전체 N 차원 공간을 양의 생성하는 벡터들의 집합이라는 것을 알 수 있다. 그리고 양의 생성 집합에서 양의 종속적인 벡터들을 제외시키고 나면 양의 독립적인 벡터들로 이루어진 양의 생성 집합인 양의 기저를 생성할 수 있다.

References

- [1] Bickford, J.H., *Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints: Non-Gasketed Joints*, 4th Edition, CRC Press, Boca Raton, 2007.
- [2] Mosemann M., Wahl F. M., "Automatic decomposition of planned assembly sequences into skill primitives", *IEEE Trans. Robotics Automation*, 2001, Vol. 17, pp.709-718, 2001.
- [3] Sturges, R.H., Laowattana, S., "Virtual wedging in three-dimensional peg insertion tasks", *J. Mech. Design*, Vol. 118, pp.99-105, 1996.
- [4] Falkenberg A., Drummen P., Morlock M.M., Huber G., "Determination of local micromotion at the stem-neck taper junction of a bimodular total hip prosthesis design", *Med. Engrg. Phys.*, Vol. 65, pp.31-38, 2019.
- [5] Ahn, Y.J., Bertocchi, E., Barber, J.R., "Shakedown of coupled two-dimensional discrete frictional systems", *J. Mech. Phys. Solids.*, Vol. 56, pp. 3433-3440, 2008.
- [6] Hassani R., Hild P., Ionescu I.R., Sakki N.-D., "A mixed finite element method and solution multiplicity for Coulomb frictional contact", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.4517-4531, 2003.
- [7] Hild P., "On finite element uniqueness studies for Coulomb's frictional contact model", *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.* Vol.12, pp.41-50, 2002.
- [8] Hild P., "Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two dimensional linear elasticity", *Quarter J. Mech. Appl. Math.* Vol.57, pp.225-235, 2004.
- [9] Barber, J.R., Hild, P., "On wedged configurations with Coulomb friction," in: Peter, W., Udo, N. (Eds.), *Analysis and Simulation of Contact Problems*. Springer, Berlin pp. 205-221, 2006.
- [10] Fujita R., Kanno Y., "Enumeration of all wedged equilibrium configurations in contact problem with Coulomb friction", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol.199, pp.1202-1215, 2010.
- [11] Pinto da Costa A., "Assessing the complete solution set of the planar frictional wedging problem", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 205-208, 139-148, 2012.
- [12] Kim S., Jang Y.H., Barber J.R., "Wedging of frictional elastic systems", *FACTA Univ. Series: Mech. Engrg.*, Vol.17, pp.141-148, 2019.
- [13] Kim S., Jang Y.H., "Determination of critical wedging coefficient for full-contact frictional systems using positive spanning", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.177, 105576, 2020.
- [14] Barber, J.R., *Contact mechanics*, Chap. 8, Springer, 2018. (ISBN 978-3-319-70938-3)
- [15] Regis R.G., "On the properties of positive spanning sets and positive bases", *Optim. Engrg.*, vol. 17, pp.229-262, 2016.
- [16] Davis C., "Theory of positive linear dependence", *Amer. J. Math.* Vol.76, pp.733-746, 1954.
- [17] Hills D. A., A. Sackfield, and D. Nowell. *Mechanics of elastic contacts*. pp.40-41, Oxford : Butterworths, 1993. (ISBN 978-0-750-60540-3)
- [18] Conn A.R., Scheinberg, K., Vicente, L.N., *Introduction to Derivative-Free Optimization*, SIAM, 2009.