

# Study of the Analysis Method for the Aspherical Tolerance of a Korsch Telescope Using a $Q$ Polynomial

Won-Kyoun Jun<sup>1</sup>, Han-Yul Lee<sup>1</sup>, Sang-min Lee<sup>2</sup>, Ki-hwan Kim<sup>2</sup>, Seung Han Park<sup>2</sup>, and Mee-Suk Jung<sup>1†</sup>

<sup>1</sup>Department of Nano-optical Engineering, Korea Polytechnic University, 237, Sangdaehak-ro, Siheung 15073, Korea

<sup>2</sup>Department of Optics and Photonics, Yonsei University, 50, Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul 03722, Korea

(Received October 17, 2020; Revised November 17, 2020; Accepted November 19, 2020)

In this paper, we study the analysis method for the aspherical tolerance of a Korsch telescope using a  $Q$  polynomial. It is important to analyze the tolerances for evaluating quality in high-precision fabrication of aspherical reflectors for high-resolution satellites. Thus we express the aspheric surface in terms of a  $Q$  polynomial in which each coefficient term is composed independently, and analyze the tolerance of a Korsch telescope. We also analyze the tolerance using Zernike fringe sag, which expresses the shape error of an aspherical mirror. By comparing the two results, we confirm that the  $Q$ -polynomial method can be used to analyze an aspherical mirror.

Keywords: Satellite optics, Reflector, Forbes aspheric, Optical design  
OCIS codes: (220.2740) Geometric optical design; (230.4040) Mirrors

## Q-Polynomial을 이용한 Korsch 망원경의 비구면 공차 분석 방법 연구

전원균<sup>1</sup> · 이한울<sup>1</sup> · 이상민<sup>2</sup> · 김기환<sup>2</sup> · 박승한<sup>2</sup> · 정미숙<sup>1†</sup>

<sup>1</sup>한국산업기술대학교 나노반도체공학과  
☎ 15073 경기도 시흥시 산기대학로 237

<sup>2</sup>연세대학교 광과학공학과  
☎ 03722 서울특별시 서대문구 연세로 50

(2020년 10월 17일 받음, 2020년 11월 17일 수정본 받음, 2020년 11월 19일 게재 확정)

본 논문에서는 Q-polynomial을 이용한 Korsch 망원경의 비구면 반사경 공차 분석을 진행하였다. 고해상도 인공위성의 비구면 반사경은 고정밀 제작이 요구되어 품질을 평가하기 위한 공차 분석이 중요하다. 따라서 비구면을 각 계수항들이 독립적인 Q-polynomial로 표현하고 Korsch 망원경 광학계의 공차 분석을 진행하였다. 또한 비구면 반사경에 형상 오차를 Zernike fringe sag로 부여하여 공차 분석하고 두 결과를 비교하여 Q-polynomial으로도 공차 분석할 수 있음을 확인하였다.

Keywords: 위성광학계, 반사경, Forbes 비구면, 광학설계  
OCIS codes: (220.2740) Geometric optical design; (230.4040) Mirrors

### I. 서 론

지상 관측용 인공위성은 감시·정찰 임무와 같은 군사 목적으로 주로 사용되며 미국의 경우에는 0.25 m급 고해상도 인공위성의 민간 사용을 허가하면서 다양한 민간 기업에서 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>[1]</sup>. 또한 표 1의 지상 관측용 인공 위성 개발 사례를 보면 같은 해상도에서 높은 성능을 만족하기 위해 광학계의 주경 크기가 점차 증가하고 있다<sup>[2]</sup>.

이에 따라 비구면 반사경의 제작 비용이 증가하고 고정밀 제작이 요구되며 반사경의 품질을 평가하기 위한 공차 분석이 중요하게 되었다. 비구면 형상에 대한 공차 분석은 기존 Zernike fringe sag를 이용한 방법 이외에 비구면 다항식의 계수에 변화를 주어 허용 공차를 분석하는 방법도 있다. 그러나 기존에 짝수항 비구면 다항식으로 공차 분석을 진행하면 각 계수항들이 독립적으로 구성되어 있지 않아 정확한 분석이 어렵다. 따라서 비구면을 짝수항 다항식이 아닌

<sup>†</sup>E-mail: msopic@kpu.ac.kr, ORCID: 0000-0003-3430-876X

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

**Table 1.** Technical trends for high resolution satellites

| Satellite (country)   | Resolution (m) | Diameter (m) | Altitude (km) | Wavelength     | Launch date |
|-----------------------|----------------|--------------|---------------|----------------|-------------|
| CSO-THR A (France)    | 0.20           | 1.5          | 800           | EO, MWIR, LWIR | 2011.12.19  |
| Worldview-3 (America) | 0.30           | 1.1          | 617           | EO             | 2014.08.13  |
| Gaofen-11 (China)     | 0.15 ~ 0.20    | 1.7          | 470           | EO             | 2018.07.31  |
| Cartosat-3 (India)    | 0.25           | 1.2          | 450           | EO             | 2019.11.27  |
| Pleiades NEO (France) | 0.30           | 1.35         | 620           | EO             | 2020, 2021  |

Q-polynomial으로 표현하여 허용 공차를 분석하는 방법을 제시하고자 한다. Q-polynomial은 짝수항 다항식과 달리 계수항이 독립적이고 고차항으로 갈수록 형상 기여도가 감소하여 효율적인 공차 분석이 가능하다.

## II. 본 론

### 2.1. Korsch 망원경 광학계 사양

비구면 반사경의 공차 분석 방법을 설명하기 위해 인공위성 광학계 타입을 Korsch 망원경 광학계로 선정하였다. 국내에서는 다목적실용위성 3호에 Korsch 타입이 탑재되었으며

일반적으로 고해상도 인공위성 광학계에 적용하는 타입이다. 표 2는 Korsch 망원경 광학계의 사양으로 기존 0.25 m 해상도의 광학계의 사양을 참고하여 결정하였다<sup>3,4)</sup>.

### 2.2. Korsch 망원경 광학계 설계

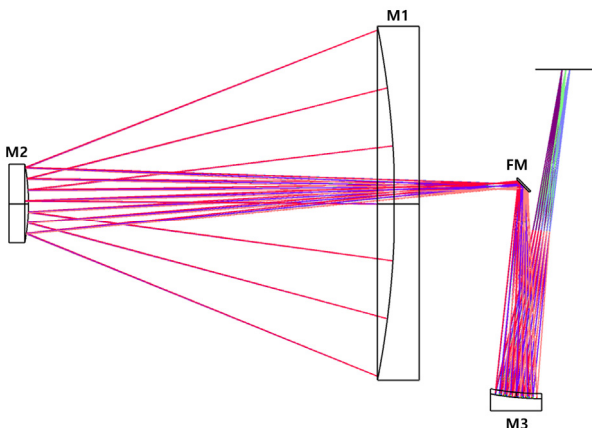
인공위성 광학계의 설계는 광학 설계 소프트웨어 ZEMAX를 사용하여 수행하였다. 비축 field를 구현하기 위하여 Object angle을 (0°, 0.345°)에서 (0°, 0.475°)까지 적용하고 주경 뒷면의 지지 구조물과 평면경 사이의 거리를 고려하여 약 450

**Table 2.** Specifications for the Korsch telescope optical system

| Korsch telescope |                             | Specification      |
|------------------|-----------------------------|--------------------|
| Detector         | Sensor size                 | 244.4 mm × 31.8 mm |
|                  | Pixel size                  | 7 μm               |
| Observation      | GSD                         | 0.25 m             |
|                  | Altitude                    | 500 km             |
|                  | Swath width                 | 8.7 km             |
| Optics           | Wavelength                  | 0.38-0.78 μm       |
|                  | FOV                         | 1.0° × 0.13°       |
|                  | Focal ratio                 | 9.86               |
|                  | Focal length                | 14000 mm           |
|                  | Effective aperture diameter | 1420 mm            |
|                  | Secondary mirror ratio      | ≤25%               |

**Table 3.** Parameters of the optical system

| Item                  |                       | Value                  |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| Primary mirror (M1)   | Diameter              | 1450 mm                |
|                       | Central hole diameter | 325 mm                 |
|                       | Radius                | -3709.815 mm           |
|                       | Conic constant        | -0.9873                |
|                       | 4th coefficient       | -2.889E <sup>-14</sup> |
|                       | 6th coefficient       | -6.256E <sup>-23</sup> |
|                       | 8th coefficient       | -1.482E <sup>-28</sup> |
| Secondary mirror (M2) | Diameter              | 325 mm                 |
|                       | Radius                | -869.885 mm            |
|                       | Conic constant        | -1.8853                |
|                       | 4th coefficient       | 9.024E <sup>-15</sup>  |
|                       | 6th coefficient       | 3.329E <sup>-18</sup>  |
|                       | 8th coefficient       | -1.652E <sup>-22</sup> |
| Folding mirror (FM)   | Diameter              | 112 mm × 38 mm         |
|                       | Decenter Y            | 102.5 mm               |
|                       | Tilt X                | -45°                   |
| Tertiary mirror (M3)  | Diameter              | 215 mm × 105 mm        |
|                       | Decenter Y            | 103 mm                 |
|                       | Radius                | 1129.386 mm            |
|                       | Conic constant        | -0.5439                |
|                       | 4th coefficient       | -2.154E <sup>-12</sup> |
|                       | 6th coefficient       | 1.594E <sup>-18</sup>  |
| Distance              | M1 - M2               | 1500 mm                |
|                       | M2 - FM               | 2100 mm                |
|                       | FM - M3               | 800 mm                 |
|                       | M3- Focal plane       | 1349 mm                |



**Fig. 1.** 0.25 m Korsch telescope layout.

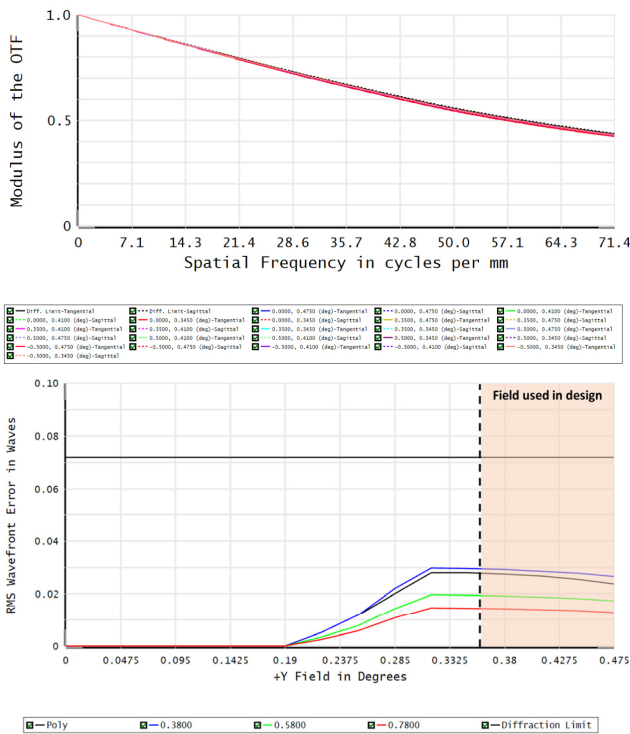


Fig. 2. MTF and RMS wavefront error.

mm 이상의 구속 조건을 적용하였다<sup>[5]</sup>. 후면 초점거리는 경통 크기를 벗어나지 않게 하기 위하여 1500 mm 이하로 설정하였다. 이외에 초점거리 14000 mm, 부경 크기를 주경의 25% 이하로 제한하고 최적 설계를 진행하였다.

그림 1은 최적 설계한 Korsch 망원경 광학계로 크기를 최소화하기 위해 3개의 비구면 반사경과 1개의 평면경으로 설계를 진행하였다. 표 3은 최적 설계한 광학계의 데이터로 RMS wavefront error 요구사항을 만족하기 위하여 각 반사경에 짝수항 비구면 계수를 적용하였다. 부경의 크기는 주경의 유효 직경 1420 mm 대비 약 23%인 325 mm이다.

그림 2는 설계한 광학계의 성능 분석 그래프로 MTF는 중앙 차폐를 구현한 수치이며 max frequency 71.4 cycles/mm에서 회절 한계선에 근접한 것을 확인하였다. 또한 RMS wavefront error 값이 비축 field에서 0.03λ 이하인 것을 알 수 있다.

### 2.3. 비구면 공차 분석 방법 비교

반사경의 형상 오차는 성능 저하의 주요 요인으로 제작된 반사경의 품질을 평가하기 위한 공차 분석이 필요하다. 반사경의 품질은 측정 sag값이 도면의 허용 공차 범위 내에 있는지의 여부로 제작의 성패를 판단한다. 따라서 비구면 공차 분석은 제작 도면에 명시할 수 있는 허용 sag 공차를 도출하는 것이 목적이다. 본 논문에서는 설계한 0.25 m Korsch 망원경의 반사경을 통해 Zernike fringe sag와 Q-polynomial를 이용한 공차 분석을 소개하고 비교 분석하고자 한다.

Zernike fringe sag는 직교성을 가진 Zernike fringe 계수항

Table 4. Permissible tolerance analyzed in Zernike fringe sag

| Zernike fringe sag |     | Max sag error (μm) |                  |                      |                       |
|--------------------|-----|--------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
|                    |     | Primary mirror     | Secondary mirror | Tertiary mirror (0°) | Tertiary mirror (90°) |
| Z4                 | Max | 2.94               | 4.70             | 19.35                | 18.10                 |
|                    | Min | 3.04               | 4.10             | 17.76                | 16.63                 |
| Z5                 | Max | 0.04               | 0.05             | 0.350                | 0.33                  |
|                    | Min | 0.04               | 0.06             | 0.350                | 0.33                  |
| Z6                 | Max | 0.04               | 0.05             | 0.325                | 0.32                  |
|                    | Min | 0.04               | 0.05             | 0.337                | 0.33                  |
| Z7                 | Max | 0.08               | 0.12             | 0.20                 | -                     |
|                    | Min | 0.08               | 0.11             | 0.20                 | -                     |
| Z8                 | Max | 0.08               | 0.10             | -                    | 0.16                  |
|                    | Min | 0.06               | 0.12             | -                    | 0.15                  |
| Z9                 | Max | 0.06               | 0.09             | 0.07                 | 0.11                  |
|                    | Min | 0.06               | 0.07             | 0.07                 | 0.11                  |
| Minimum tolerance  |     | 0.04               | 0.05             | 0.07                 | 0.11                  |

에 가중치를 주어 생기는 형상 변형을 나타낸다<sup>[6]</sup>. Zernike fringe 다항식은 수차 관련 항들로 이루어져 있어 공차 분석 시 비점수차, 코마, 구면 수차와 같은 주요 수차의 영향을 알 수 있다<sup>[7,8]</sup>. 식 (1)은 Zernike fringe sag의 공식으로 짝수항 비구면 계수와 Zernike fringe 다항식으로 이루어져 있다.  $N$ 은 Zernike 계수항의 개수,  $A$ 는 Zernike 계수,  $Z$ 는 반경 좌표  $\rho$ , 각도 좌표  $\phi$ 로 이루어진 Zernike 함수이다.

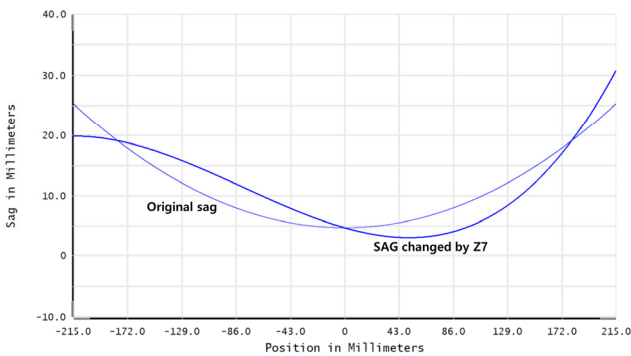
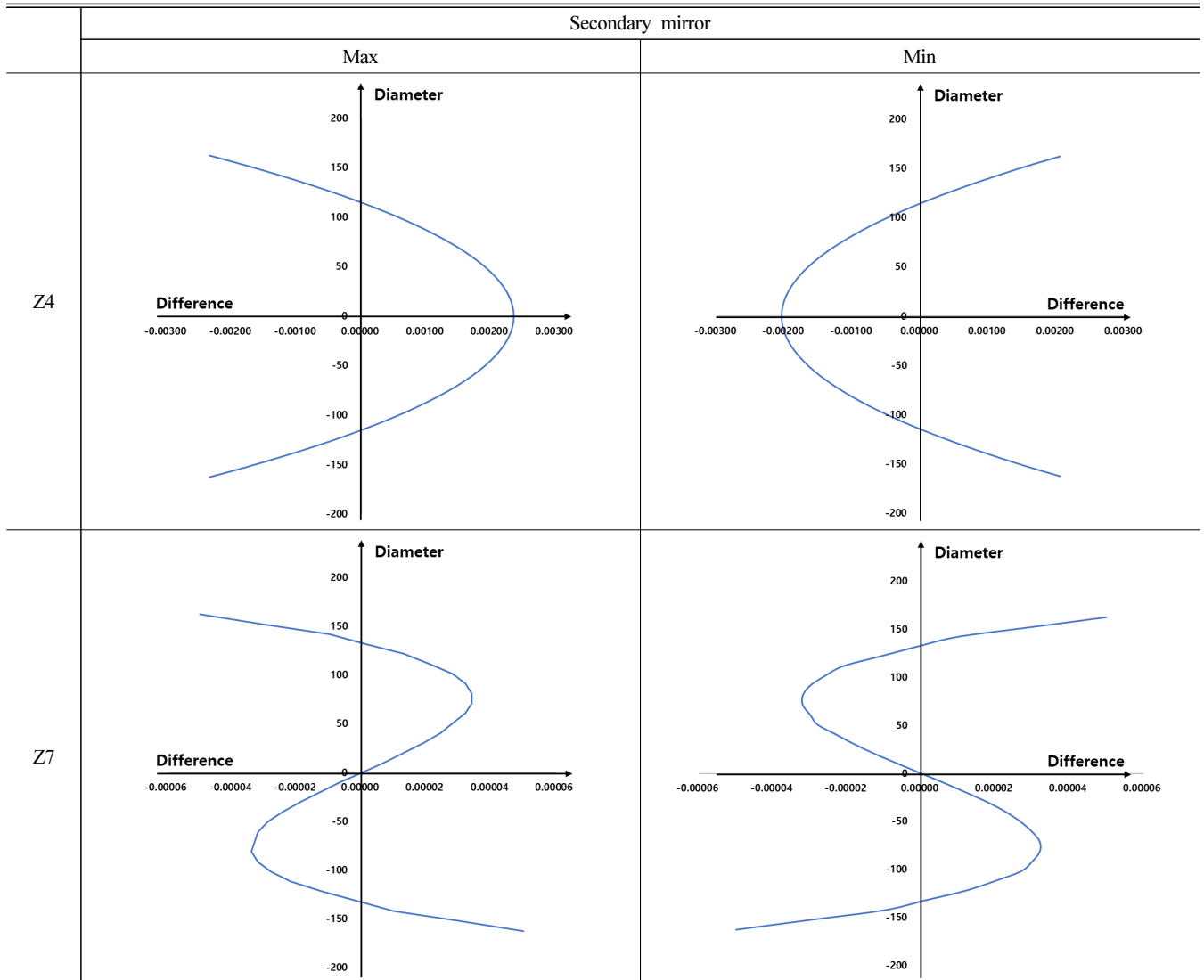
Zernike fringe sag =

$$\frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + \sum_{i=1}^8 \alpha_i r^{2i} + \sum_{l=1}^N A_l Z_l(\rho, \phi) \quad (1)$$

공차 분석 방법은 0.6328 μm 파장을 기준으로 다른 항목들이 오차가 없다는 전제 하에 한 개의 분석항에만 중감치를 주어 개별 공차를 산출하는 방식으로 진행하였다<sup>[9]</sup>. 공차 범위는 RMS wavefront error가 0.05λ 이하가 되도록 조절하였으며 분석 항목은 Z4 디포커스부터 Z9 구면수차까지 진행하였다. 표 4는 Zernike fringe sag를 이용하여 공차 분석을 진행한 결과로, max sag error는 분석 항목들의 개별 공차이며 peak to valley (PV) 값이다. 표 하단에 최소 허용 공차는 반사경의 최소 max sag error 값으로 모든 공차 항목에서 성능 기준을 만족할 수 있는 PV값을 의미한다. 따라서 Zernike fringe sag를 이용하여 분석한 최소 허용 공차는 주경 0.04 μm, 부경 0.05 μm, 제3 반사경 0.07 μm이다.

표 5는 부경의 비구면 형상에 대한 공차를 분석하였을 때의 sag 변화 그래프로 Z7항에서 vertex를 중심으로 반사경 상면과 하면이 다른 sag error 값을 가지게 된다. 설계한 광학계는 목표 성능 기준 이하가 되도록 Z7항에 미세한 값을 주어 상면과 하면이 단순히 다른 부호의 sag error를 가지고 있다.

**Table 5.** Sag error of the secondary mirror analyzed in Zernike fringe sag



**Fig. 3.** Sag cross section for large values of Z7.

Zernike fringe sag는 그림 3과 같이 특정항에 큰 값을 주는 경우에 vertex를 기준으로 sag error가 비대칭으로 형성되는 경우도 분석할 수 있는 장점이 있다.

Q-polynomial은 Greg. W. Forbes가 고안한 비구면 표현식

으로 짝수항 다항식과 달리 계수항들이 서로 직교성을 가지고 있어 비구면 계수에 오차를 부여하여 허용 공차를 분석할 수 있다. 따라서 각 계수 항이 정의하는 비구면에 대해 분석이 가능하며 형상을 예측할 수 있다<sup>10)</sup>.

공차 분석 방법은 Zernike fringe sag와 같은 방법으로 RMS wavefront error 0.05λ 이하가 되도록 설계한 radius, conic,  $Q^{con}$  계수항에 증감치를 주어 개별 공차를 구하는 방식으로 진행하였다. 표 6은 반사경을 Q-polynomial로 공차 분석한 결과로 최소 허용 공차는 주경 0.08 μm, 부경 0.09 μm, 제3 반사경 0.08 μm이다. 그리고 계수항이 고차항으로 갈수록 max sag error가 작아지는 경향성을 띄었다.

Q-polynomial은 표 7과 같이 sag error가 대칭으로만 형성되어 비대칭 error를 포함하는 Zernike fringe sag 방식보다 2배 정도 큰 공차를 갖는다고 할 수 있다. 실제 공차 분석 결과에서도 대칭 구조를 가진 주경과 부경에 대하여 Q-polynomial이 Zernike fringe sag 방식 대비 약 2배 큰 공차를 가졌으며

**Table 6.** Permissible tolerance analyzed in Q-polynomial

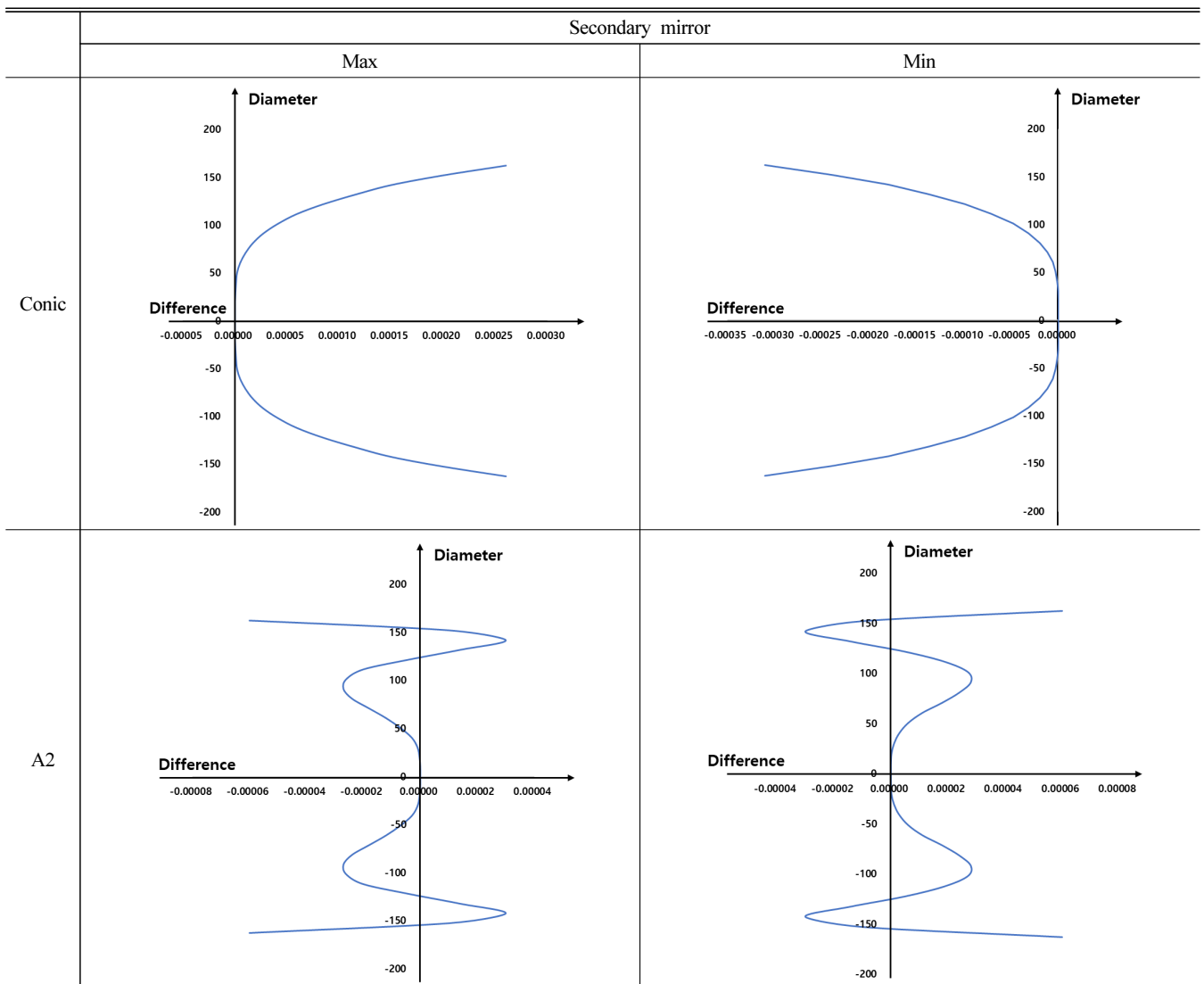
| $Q^{com}$<br>coefficient |     | Max sag error ( $\mu\text{m}$ ) |                  |                               |                                |
|--------------------------|-----|---------------------------------|------------------|-------------------------------|--------------------------------|
|                          |     | Primary mirror                  | Secondary mirror | Tertiary mirror ( $0^\circ$ ) | Tertiary mirror ( $90^\circ$ ) |
| Radius                   | Max | 4.72                            | 4.01             | 109.8                         | 70.3                           |
|                          | Min | 4.44                            | 4.09             | 158.5                         | 101.5                          |
| Conic                    | Max | 0.22                            | 0.26             | 0.38                          | 0.21                           |
|                          | Min | 0.24                            | 0.31             | 0.37                          | 0.21                           |
| A0                       | Max | 0.24                            | -                | 0.38                          | 0.22                           |
|                          | Min | 0.22                            | -                | 0.38                          | 0.22                           |
| A1                       | Max | 0.08                            | 0.18             | -                             | -                              |
|                          | Min | 0.08                            | 0.13             | -                             | -                              |
| A2                       | Max | 0.09                            | 0.09             | 0.12                          | 0.09                           |
|                          | Min | 0.10                            | 0.09             | 0.10                          | 0.08                           |
| Minimum tolerance        |     | 0.08                            | 0.09             | 0.10                          | 0.08                           |

비대칭 구조의 제3 반사경은 유사한 공차를 가졌다. 따라서 Q-polynomial으로 대칭 구조의 반사경을 공차 분석 시 약 절반의 값을 고려하면 Zernike fringe sag로 분석한 공차 분석과 유사한 공차 값을 얻을 수 있다.

### III. 결 론

본 논문에서는 Q-polynomial을 이용한 Korsch 망원경의 비구면 공차 분석 방법에 대한 연구를 진행하였다. Q-polynomial은 짝수항 다항식과 달리 계수항이 독립적이고 고차항으로 갈수록 형상 기여도가 감소하여 효율적인 공차 분석이 가능하다. 따라서 설계한 Korsch 망원경 광학계를 이용하여 Q-polynomial로 비구면 공차 분석하고 기존에 사용된 Zernike fringe sag와 결과를 비교하였다. 분석 방법은 공차 항목의 증감으로 최소 허용 공차를 구하는 방식으로 Q-polynomial은 설계한 반사경의 radius, conic,  $Q^{com}$ 에 변화를 주었다.

**Table 7.** Sag error of the secondary mirror analyzed in Q-polynomial



Zernike fringe sag로 분석한 허용 공차는 PV값으로 주경 0.04  $\mu\text{m}$ , 부경 0.05  $\mu\text{m}$ , 제3 반사경 0.07  $\mu\text{m}$ 이며 비대칭 sag error를 포함하고 있는 것을 확인하였다. Q-polynomial를 통한 허용 공차는 주경 0.08  $\mu\text{m}$ , 부경 0.09  $\mu\text{m}$ , 제3 반사경 0.08  $\mu\text{m}$ 이며 sag error가 대칭으로만 형성되었다. 두 방식을 비교한 결과, Q-polynomial이 대칭 구조의 반사경에서 Zernike fringe sag 방식보다 약 2배 더 큰 공차를 가지고 비대칭 구조의 반사경은 유사한 공차를 가진다는 것을 확인하였다. 이를 통해 Q-polynomial 계수들의 변화를 이용하여 비구면 공차 분석이 가능함을 알 수 있었다.

### 감사의 글

이 논문은 2020년도 한화시스템(주)의 재원을 지원받아 수행되었습니다(초소형위성 광학 탑재체 연구).

### References

1. L. Sun, Q. Zhao, and Z. Shen, "Demand analysis of optical remote sensing satellites under the belt and road initiative," in *5th International Symposium of Space Optical Instruments and Applications* (Springer Proceedings in Physics Series Vol. 232), H. P. Urbach, Q. Yu, ed. (Springer, Switzerland, 2020), pp. 11-20.
2. H. B. Lee and S. C. Choi, "Technology trend of reflective optical system for defense weapons system," in *Proc. OSK Annual Summer Meeting* (Busan, Korea, Jul. 2020), W1F-II-2.
3. Z. Chen, J. Zhu, J. Peng, X. Zhang, and J. Ren, "A coaxial and off-axial integrated three-mirror optical system with high resolution and large field of view," *J. Opt. Soc. Korea* **1**, 94-100 (2016).
4. M. Metwally, T. M. Bazan, and F. Eltohamy, "Design of very high-resolution satellite telescopes part I: optical system design," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **56**, 1202-1208 (2020).
5. S. C. Choi, H. K. Kim, and Y. S. Kim, "Optical design of flat field anastigmatic three-mirror telescope," *Korean J. Opt. Photon.* **3**, 175-182 (1997).
6. Radiant ZEMAX LLC, *ZEMAX User Manual* (2011) [Online]. Available: <https://neurophysics.ucsd.edu/Manuals/Zemax/ZemaxManual.pdf>, pp. 341.
7. J. Schwiegerling (2017), "Review of Zernike polynomials and their use in describing the impact of misalignment in optical systems," [Video]. <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/10377/103770D/Review-of-Zernike-polynomials-and-their-use-in-describing-the/10.1117/12.2275378.short?SSO=1>.
8. Z. Zheng, X. Sun, X. Liu, and P. Gu, "Design of reflective projection lens with Zernike polynomials surfaces," *Displays* **29**, 412-417 (2008).
9. K.-I. Seon, I. S. Yuk, K.-S. Ryu, J. H. Park, H. Jin, J.-H. Seon, S.-H. Oh, J.-G. Rhee, D.-H. Lee, U.-W. Nam, W. Han, and K.-W. Min, "Error budget analysis of FIMS optical system," *J. Astron. Space Sci.* **18**, 219-230 (2001).
10. G. W. Forbes, "Shape specification for axially symmetric optical surfaces," *Opt. Express* **15**, 5218-5226 (2007).