

## 웨이브렛 변환을 이용한 선형시스템 분석: 초음파 신호 해석의 응용

주영복<sup>\*†</sup>

<sup>\*†</sup>한국기술교육대학교 컴퓨터공학부

## Linear System Analysis Using Wavelets Transform: Application to Ultrasonic Signal Analysis

Young Bok Joo<sup>\*†</sup>

<sup>\*†</sup>Department of Computer Science & Engineering, Korea University of Technology & Education

### ABSTRACT

The Linear system analysis for physical system is very powerful tool for system diagnostic utilizing relationship between the input signal and output signal. This method utilized generally to investigate physical properties of system and the nondestructive test by ultrasonic signals. This method can be explained by linear system theory. In this paper the Continuous Wavelets Transform is utilized to search the relation between the linear system and continuous wavelets transform.

**Key Words :** Wavelet Transform, Linear, System, Ultrasonic, Signal, Analysis

### 1. 서 론

$$g(t) = f(t) \otimes h(t) \quad (1)$$

선형 시스템은 시스템에 입력  $f(t)$ 를 인가한 후 시스템에 의해 영향을 받은 출력  $g(t)$ 를 이용하여 시스템의 물리적 특성을 분석하기 위한 모델이며, 시스템 진단에 가장 일반적으로 적용되는 방법이다. 다음의 블록선도로 표현된다.

Fig. 1에서와 같은 선형 시스템의 입력함수  $f(t)$ 와 출력 함수  $g(t)$ 는 다음과 같이 합성적으로 표현된다

위 식에서 시스템의 특성을 표현하는 함수  $h(t)$ 를 응답 함수라 정의하며, 주파수상에서 위 식은 다음과 같이 내적(product)로 정의된다.

$$G(f) = F(f) \bullet H(f) \quad (2)$$

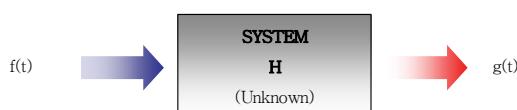
따라서 시스템  $H(f)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$H(f) = \frac{G(f)}{F(f)} = |H(f)| \exp - j\phi_H(f) \quad (3)$$

이와 같이 입력과 출력의 관계를 통한 시스템해석의 대표적인 모델이 초음파 또는 acoustic을 이용한 비파괴 검사(Non Destructive Test), 임펄스(impulse)를 이용한 진동 분석 등이다. 이 논문에서는 초음파를 이용한 NDT 방법에 대한 선형시스템에 대하여 웨이브렛 변환을 적용하였다.

Fig. 1. Linear System.

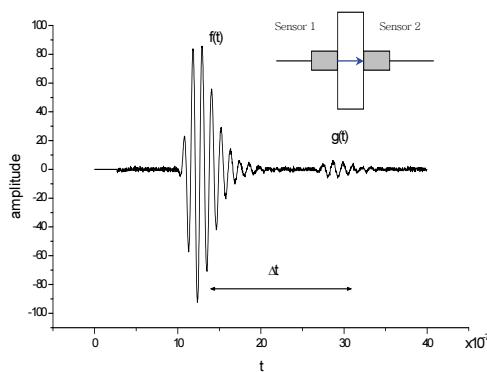
<sup>†</sup>E-mail: ybjoo@koreatech.ac.kr



2장에서 초음파를 이용한 NDT 기초 이론에 관해 설명하였고, 3장에서 연속 웨이브렛 변환을 적용하여 신호의 시간 정보를 분석하는 방법과 감쇄(attenuation) 분석 방법에 관해 논하였다. 그리고 4장에서는 연속 웨이브렛 역변환을 이용한 잡음제거 방법과 신호 복원에 관해 논하였다.

## 2. 초음파를 이용한 NDT 기초 이론

다음 그림은 초음파 탐상의 기본적인 모델을 나타낸 것이다.



**Fig. 2.** NDT model and output signal using ultrasound wave (1MHz Transducer,  $dt=2\times 10^{-8}$ , 2000pts).

위 모델에서 입력 신호  $f(t)$ 는 센서1 (Transducer) 시스템  $h(t)$ 에 입사된 후 반대편의 센서2를 통해 출력 신호  $g(t)$ 로 표현된다. 초음파 시스템을 이용한 NDT는 일반적으로 시스템 내부의 결함 검사, 재질 특성 검사의 2가지 목적을 지니고 있으며, 이를 위해 시스템 함수  $h(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$h(t) = h(V, \alpha) \quad (4)$$

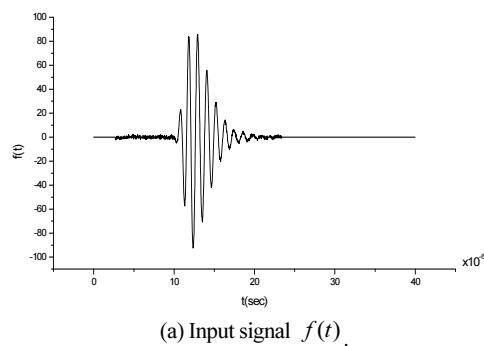
$V$  : 초음파 속도,  $\alpha$  : 감쇄(attenuation)

위의 두 파라미터는 초음파를 이용한 system의 특성을 표현하는 대표적인 측정값이며, 이를 측정하기 위해 입력 함수  $f(t)$ 와 출력 함수  $g(t)$ 를 이용한다. 초음파의 속도  $V$ 를 구하기 위해서는 위 그림 표시된  $\Delta t$  즉 초음파가 재질을 통과하는 데 걸린 시간을 알아야 하며 이를 거리-시간-속도의 관계식을 통해 속도를 구한다. 만일 Fig. 2와 같이 재질에 강한 감쇄가 존재할 경우  $\Delta t$ 의 측정이 실시간 상에서는 측정하기 어려우며 일반적으로 두 신호에 대한 cross-correlation을 통해 시간을 구한다. Cross-correlation을 이용하기 위해서는 먼저 시간 필터링을 통해 다음과

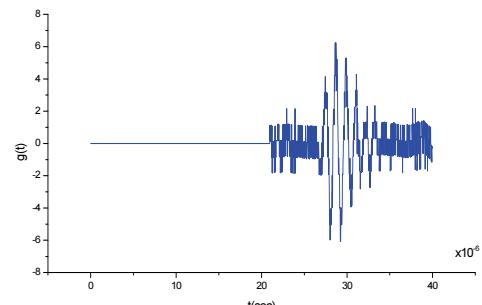
같이  $f(t)$ 와  $g(t)$ 를 분리해야 하며, 분리한 신호에 대한 cross-correlation을 구한다[1].

$$R_{fg} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau \quad (5)$$

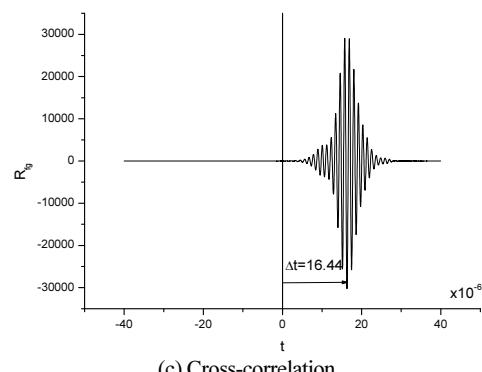
다음 그림은 cross-correlation을 이용한  $\Delta t$ 의 연산 과정을 나타낸 것이다.



(a) Input signal  $f(t)$ .



(b) Output signal  $g(t)$ .



(c) Cross-correlation

**Fig. 3.**  $\Delta t$  operation using cross-correlation.

위의 샘플의 두께는 11mm이며,  $\Delta t = 16.44 \times 10^6$  sec이다. 따라서 속도는 669 m/sec의 값을 얻는다. 일반적으로 초음

파 속도는 재질을 구성하고 있는 입자의 밀도 및 균일도에 의존하며, 수중에서 (상온)에서의 초음파 속도는 1480m/sec<sup>o</sup>]고 금속이 약 5,180 m/sec인 점을 감안하면 이 속도의 재질을 구성하는 입자의 밀도는 아주 적음을 알 수 있다.

초음파의 속도 중 종파(Longitudinal wave)와 횡파(Transversal wave)는 다음 표와 같이 재료의 물성과 관계된다[2].

**Table. 1.** Relation between velocity of ultrasound waves and coefficients of property of matter

Longitudinal Modulus	$L = \rho V_L^2$
Shear Modulus	$S = L = \rho V_s^2$
Bulk Modulus	$L - \frac{4S}{3}$
Young's Modulus	$\frac{(3L - 4S)}{(L - S)}$
Lame coefficient	$\frac{(L - 2S)}{2(L - S)}$
ρ: 밀도, $V_L$ : 종파의 속도, $V_s$ : 횡파의 속도	

속도 이외에 재질의 내부 특성에 영향을 받는 파라미터가 초음파 감쇄이며 이는 재질 내부의 균일도, defect 등에 의해 영향을 받는다. 초음파의 감쇄는 입력신호  $f(t)$  가 물체 내부에서 얼마만큼의 에너지를 상실했는지를 나타내는 척도이며, 초음파 에너지 손실은 일반적으로 분자 간의 결합이 먼 경우 즉 밀도가 적은 경우에 더욱 많이 발생하며, 금속이나 유리 등의 고체에 비해 풀리며 재질의 감쇄가 더 크다. 그리고 내부의 균일도가 일정하지 않을수록 더 커진다. 초음파 감쇄는 시간과 주파수 상에서 각각 다음과 같이 정의된다.

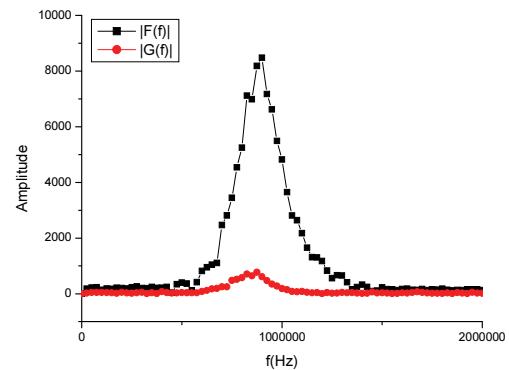
$$\alpha(t) = 20 \log \frac{f(t)_{\max}}{g(t)_{\max}}, \alpha(f) = 20 \log \frac{|F(f)|}{|G(f)|} \quad (6)$$

다음 그림은  $f(t)$ ,  $g(t)$  두 신호에 대한 퓨리에 스펙트럼 및 감쇄  $\alpha(f)$ 를 나타낸 것이다.

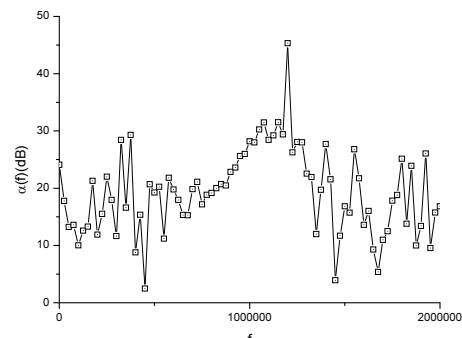
Fig. 4에서 주파수상에서의 감쇄는 1Mhz의 센서의 주파수를 중심으로 일정한 기울기를 형성하고 있으며, 이 기울기의 크기가 주파수에 따른 재료의 감쇄를 의미한다.

### 3. 웨이브렛 변환의 적용

웨이브렛 변환은 선형 시스템 분석에 있어서 입력 신호  $f(t)$ 와 출력 신호  $g(t)$ 의 분석 영역을 한 차원 더 확장한다. 즉 신호  $f(t)$ 와  $g(t)$ 에 대한 스케일 분석을 추가하여 시스템 분석의 새로운 방법을 도출할 수 있다. 웨이브렛 변환 및 역변환은 다음과 같이 정의된다[3].



(a) Fourier spectrum of input function  $f(t)$  and output function  $g(t)$



(b) Attenuation of input signal  $f(t)$  and output signal  $g(t)$

**Fig. 4.** Attenuation of ultrasound signals.

$$W^f(b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*(\frac{t-b}{a}) dt \quad (7)$$

$$f(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} W_{b,a}^f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a} \quad (8)$$

$$C_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \text{ (허용가능 조건)} \quad (9)$$

웨이브렛 변환은 신호  $f(t)$ 를 스케일에 따라 크기가 변화하는 웨이브렛을 이용하여 “시간-스케일” 공간으로 사영하는 것을 의미하며, 역변환은 “시간-스케일” 공간으로부터 원래의 신호  $f(t)$ 를 복원하는 것을 의미한다. 다음은 초음파신호에 대한 웨이브렛 적용결과를 나타낸 것이다.

#### 3.1 신호의 시간 정보 분석 (Localization time information)

Fig. 5는 입력 신호  $f(t)$ 와 출력 신호  $g(t)$ 에 대한 웨이브렛 변환 결과를 나타낸 것이다. 위 결과에서 입력신호

$f(t)$  및 출력신호  $g(t)$ 는 모두 1MHz의 센서를 이용하였고 따라서 중심주파수도 1MHz( $a=0.5$ )를 따라서 형성된다. 신호의 크기에 따라서 “시간-스케일” 공간에 형성되는 정보대역의 넓이와 크기가 변화한다. 위 “시간-스케일” 공간에서 에너지의 크기는 초음파 신호의 출력을 표현한다. 먼저 속도  $V_L$ 의 결정하기 위한 두 신호의 시간차이  $\Delta t$ 는 에너지가 최대가 되는 지점의 시간차이로 쉽게 결정될 수 있으며, 이는 웨이브렛 부분 최대선을 통해서 구해진다. 다음 그림은 웨이브렛 부분 최대선을 이용한 두 신호의 차이를 나타낸 것이다.

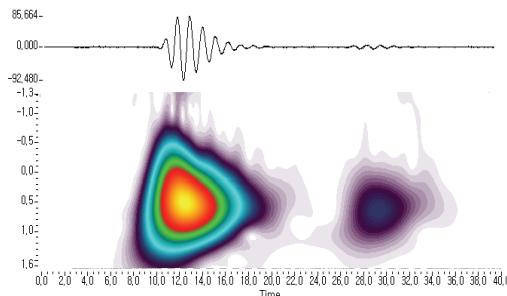


Fig. 5. Wavelet transform of Input signal  $f(t)$  and output signal  $g(t)$ .

(Morlet wavelet[4],  $\alpha=2$ ,  $f_0=1$ )

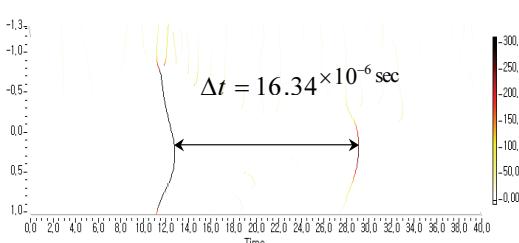


Fig. 6.  $\Delta t$  using maximum local line.

### 3.2 감쇄 (Attenuation)

초음파의 경우 감쇄와 주파수와의 관계는 재료 특성을 분석하는 중요한 파라미터이다. 시간상에서의 감쇄는 단지 입력 신호의 최대치와 출력 신호의 최대치 만을 비교하면 간단하게 정의되나 이를 위해 푸리에 변환을 이용하여 감쇄의 주파수 상에서의 추이 분석이 불가피하며, 이 경우 감쇄가 심할 경우 노이즈 및 출력신호의 감쇄에 의한 왜곡 등으로 주파수 공간에서 감쇄의 주파수 특성을 분석하기가 어려워진다. Fig. 7은 입력신호  $f(t)$ 와 출력신호  $g(t)$ 에 대한 웨이브렛 변환 결과이다.

이 그림에서 감쇄의 크기만을 정량화 하기 위한  $\alpha(a)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\alpha(a)_{\max} = \frac{|W_{b,a}^f(t)|_{\max}}{|W_{b,a}^g(t)|_{\max}} \quad (10)$$

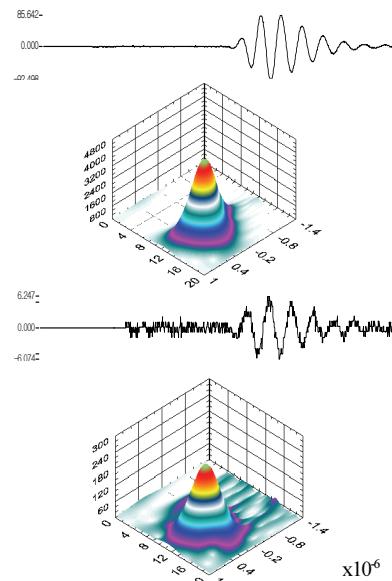


Fig. 7. Wavelet transform of Input signal  $f(t)$  and output signal  $g(t)$ .

(Morlet wavelet[4],  $\alpha=2$ ,  $f_0=1$ )

Fig. 7에서 감쇄의 크기만을 정량화 하기 위한  $\alpha(a)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다. Fig. 7에서 감쇄의 크기만을 정량화 하기 위한  $\alpha(a)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\alpha(a)_{\max} = \frac{|W_{b,a}^f(t)|_{\max}}{|W_{b,a}^g(t)|_{\max}} \quad (11)$$

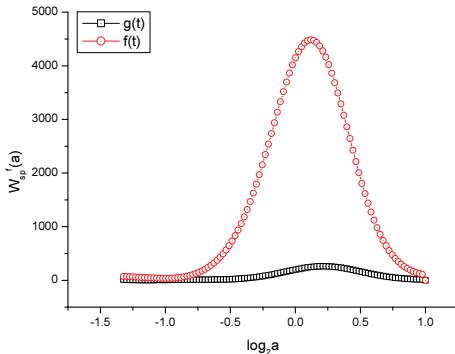
다음 표는 식 (6)과 (11)에 의해 결정된 감쇄의 값을 비교한 것이다.

Table 2. Comparison of attenuation of ultrasound waves

$\alpha(t)$ 신호 진폭비교	$\alpha(f)$ 푸리에 변환	$\alpha(a)_{\max}$ -CWT
23.375dB	23.54dB	24.735dB

위 결과와 같이 어떤 방법을 사용하던지 감쇄의 크기는 크게 차이가 나지 않는다. 반면에 웨이브렛 변환은 센서의 중심주파수 부근에서 안정된 에너지 형태를 나타낸다. 이는 웨이브렛 스펙트럼의 특성으로 인한 것이다. 다

음 그림은 입력신호  $f(t)$ 와 출력 신호  $g(t)$ 의 에너지가 최대인 지점의 웨이브렛 스펙트럼을 나타낸 것이다.



**Fig. 8.** Wavelet spectrum of Input signal  $f(t)$  and output signal  $g(t)$ . at the maximum energy  $W_{sp}^f(t_0), W_{sp}^g(t_1)$ .

위의 웨이브렛 스펙트럼으로부터 초음파 감쇄의 스케일 특성 즉 주파수 특성을 분석할 수 있는 새로운 파라미터를 정의할 수 있다. 다음 그림은 초음파 신호에 대한 웨이브렛을 이용한 초음파의 감쇄  $\alpha(a)$ 를 정의한 것이다.

$$\alpha(a) = \log_2 \frac{\alpha(a_i)}{a} = \log_2 \frac{|W_{sp}^f(t_0)|}{|W_{sp}^g(t_1)|} \quad (12)$$

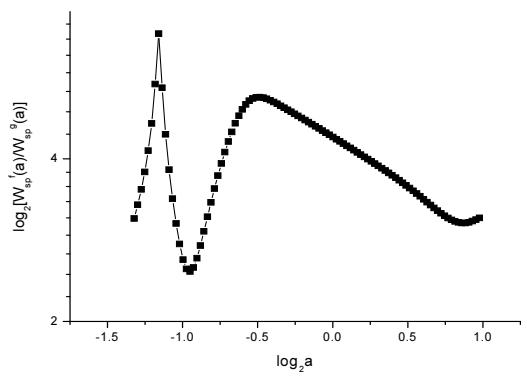
Fig. 9는 위 식 (12)에 의해 구해진 입력신호  $f(t)$ 와 출력신호  $g(t)$ 의 스케일 관계를 나타낸 것이다. 그림에서 센서의 주파수와 일치하는 영역 ( $f=1\text{MHz}$ ,  $\log_2 a=0$ )에서 감쇄는 일정한 기울기를 나타내며 이 기울기를 구하면 감쇄와 스케일간의 관계를 정량화 할 수 있다.

Fig. 10은 퓨리에 스펙트럼을 이용한 감쇄와 웨이브렛 스펙트럼을 이용한 감쇄를 나타낸 것이다. 입력과 출력의 에너지가 존재하는 대역에서는 두 결과가 비슷한 형태를 나타내고 있으나, 웨이브렛 스펙트럼의 경우 데이터의 변동이 심하지 않게 표현된다.

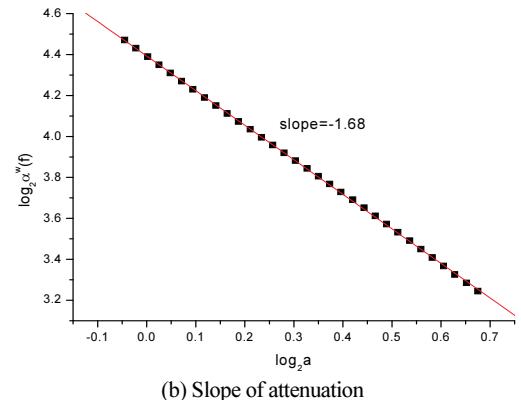
#### 4. 연속 웨이브렛 역변환을 이용한 잡음제거

일반적으로 측정 데이터를 디지털화 할 경우 시스템 및 기타 요인에 의해 노이즈가 신호에 중첩된다. 이 노이즈는 진동 계통의 모든 신호 처리에서 다루기 까다로운 성분이다. 웨이브렛 변환의 대표적인 특성중의 하나는 신호의 노이즈 처리에 기존의 신호처리 방법으로는 처리하기 어려운 노이즈 성분을 쉽게 처리할 수 있는 장점이 있다. 웨이브렛 변환을 이용한 잡음제거 방법은 이산 웨이

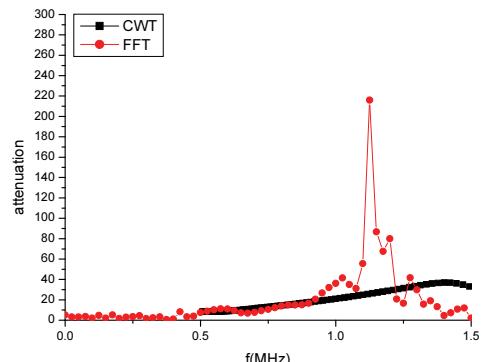
브렛을 이용한 잡음제거 방법이 1999년에 발표되었다. 이 장에서는 ICWT를 이용한 잡음제거 방법을 논한다. Fig. 11은 잡음이 제거되기 전의 입력신호  $f(t)$ 와 출력 신호  $g(t)$ 에 대한 웨이브렛 플랜 (ICWT)을 나타낸 것이다



(a) Log-log plot of attenuation and scale



**Fig. 9.** Attenuation of ultrasound signals using wavelet transform.



**Fig. 10.** Comparison between Fourier transform and attenuation using CWT.

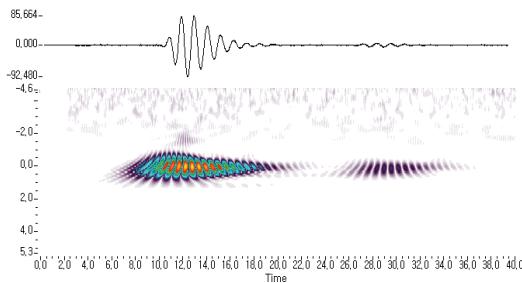


Fig. 11. Wavelet plan of (a) Input signal  $f(t)$  and output signal  $g(t)$  (Before noise elimination)

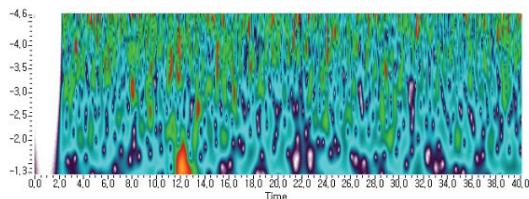
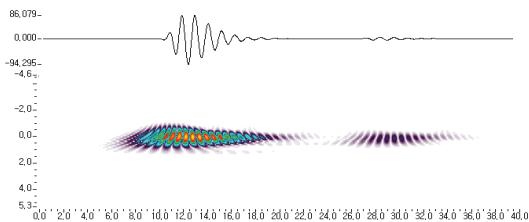


Fig. 11 (b) Wavelet plan between  $a=0.04\sim 0.4$   
( $f=2.5 \text{ MHz}\sim 25 \text{ MHz}$ )

Fig. 11. Inverse wavelet transform of input out signals  
(Before noise elimination).



(a) Wavelet plan after noise elimination

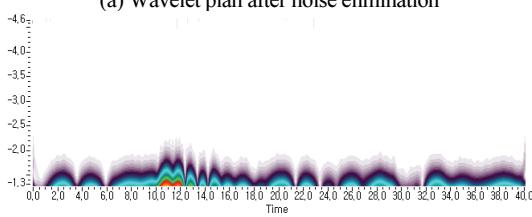


Fig. 12. Inverse wavelet transform of input out signals  
(After noise elimination).

Fig. 10에서와 같이 측정 노이즈는 스케일이 적은 영역 전체에 걸쳐 분산되어 있다. 앞장에서 논한 것과 같이 위의 웨이브렛 플랜에서 고주파 성분을 제외한 나머지 성분에 대한 “시간 – 스케일” 대역 필터[4]를 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

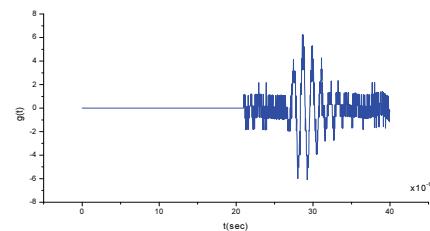
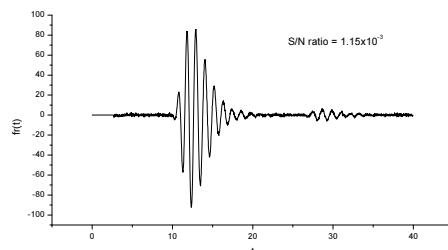
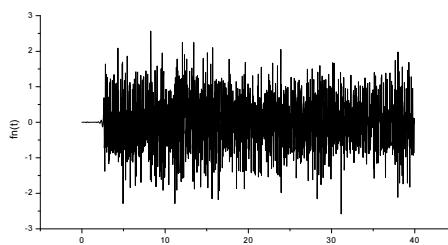


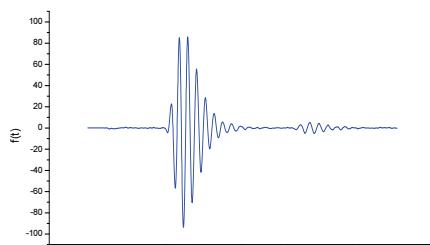
Fig. 13. Results of noise elimination of the output signal  $g(t)$ .



(a) Restored signals by inverse wavelet transform



(b) Extracted noise signal from the wavelet plan  
( $a=0.04\sim 0.4$ ,  $f=2.5 \text{ MHz}\sim 25 \text{ MHz}$ )



(c) Input  $f(t)$  and output signal  $g(t)$  after noise elimination

Fig. 14. Noise elimination using inverse wavelet transform.

이 결과는 웨이브렛 역변환을 이용한 잡음제거가 거의 완벽함을 나타내고 있다. Fig. 13은 잡음에 의해 영향을 받은 출력 신호  $g(t)$ 만을 비교한 결과이다. Fig. 14는 웨이브렛 역변환에 의해 복원된 신호, 웨이브렛 플랜으로부터 추출된 노이즈, 노이즈가 제거된 입력 출력 신호를 나타낸 것이다.

이 논문에서 초음파 신호를 이용한 입출력 신호는 웨이브렛과 유사한 단일 주파수(1MHz)로 구성되어 있으며 따라서 웨이브렛을 이용한 신호의 복원이 우수하고, 노이즈 또한 완벽하게 제거할 수 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 연속 웨이브렛 변환을 이용하여 측정 모델에 대한 분석 및 측정 신호의 잡음 처리에 대하여 논하였다. 측정 모델은 초음파 시스템을 이용하였으며, 연속 웨이브렛 변환을 이용하여 초음파의 측정 파라미터인 속도와 감쇄에 대한 분석 결과 및 디지털 신호의 잡음 처리 결과를 나타냈다. 연속 웨이브렛 변환의 초음파에 대한 분석은 초음파의 입력과 출력 신호를 “시간-스케일” 공간에서 비교함으로써 기존의 시간 또는 주파수의 1차원 분석보다 세밀한 물성의 특성을 파악할 수 있는 장점이 있으며, 특히 감쇄가 심할 경우 정확한 출력 신호의 위치 탐지 및 감쇄의 형태, 그리고 잡음 제거를 통해 보다 정밀한 물성치를 파악할 수 있다.

## 감사의 글

이 논문은 2019년도 한국기술교육대학교 교수 교육연구진흥과제 지원에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

1. Paradis, L. “Development of methods and a device of signal processing adapted to NDT by ultrasonic waves”, Thesis of Doctor Engineer, INP Grenoble, 1983
2. E. Carnevale, L. Lynnworth and G. Larson, Ultrasonic Measurements of elastic moduli at elevated temperatures using momentary contacts, *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 36, No. 9, pp 1678-1684, 1964
3. G.J Lord, E Pardo-Iguzquiza, I.M Smith, “A practical guide to wavelets for Metrology”, NPL Report CMSC 02, June, 2000
4. Candes, E.J. and Donoho, D.J. Curvelets, Multi-resolution Representation, and Scaling Laws, Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, SPIE, 4119 .2000.
5. Kim, Sung Joo, Kim, Gyung Bum. “A Study on the Defect Classification of Low-contrast Uneven-Featureless Surface Using Wavelet Transform and Support Vector Machine”, *Journal of the Semiconductor & Display Technology*, Volume 19, Issue 3, Pages 1-6, 2020.
6. Lee, Yong-Hwan, Kim, Youngseop, “Benchmarking of Single Image Reflection Removal Algorithms”, *Journal of the Semiconductor & Display Technology*, Volume 18, Issue 4, Pages 154-159, 2019.
7. Mahmood, Muhammad Tariq, Choi, Young Kyu, “An Improved Multiple Interval Pixel Sampling based Background Subtraction Algorithm”, *Journal of the Semiconductor & Display Technology*, Volume 18, Issue 3, Pages 1-6, 2019.
8. Lee, Jun Ha, “Analysis of Surface Characteristics for Clad Thin Film Materials”, *Journal of the Semiconductor & Display Technology*, Volume 17, Issue 1, Pages 1-62-65, 2019

---

접수일: 2020년 12월 3일, 심사일: 2020년 12월 7일,  
제재확정일: 2020년 12월 10일