Journal of the Korea Convergence Society ISSN 2233-4890
Vol. 10. No. 11, pp. 71-77, 2019 https://doi.org/10.15207/JKCS.2019.10.11.071

다중 선택 배낭 제약식 하에서의 오목 함수 최소화 문제

오세호
청주대학교 BT융합학부 교수

An Concave Minimization Problem under the Muti-selection Knapsack Constraint

Se-Ho Oh
Professor, Division of BT Convergence, Cheongju University

요 약 본 연구에서는 다중 선택 배낭 모형의 최적해를 찾는 해법을 제시하고자 한다. 다중 선택은 동일한 집단에 소속된 구성원들이 동시에 선택되거나 동시에 배제되는 상황에서 관찰된다. 각 집단 간 관련성의 측정치인 오목 함수가 의사결정기준으로 설정되었다. 다중 선택은 비선형 제약식으로 모형화 되는데 일반 배낭 제약식으로 변환될 수 있다. 따라서 최적 해법 개발을 위해 오목함수 최소화 문제와 배낭 문제의 일반적인 해법들에서 채택하고 있는 분지 한계 접근법을 이용하였다. 단체상에서 오목함수를 가장 근접하게 하한추정하는 함수가 1차식이라는 사실이 한계 전략의 이론적 토대가 된다. 또한 하위 단계에서도 1차식 목적함수가 유일하게 결정되도록, 후보 단체를 두 개의 초평면에 투사시킴으로써 1차원 낮은 두 개의 하위 단체로 분할하는 방법이 분지 전략의 핵심이다. 앞으로 본 연구의 결과는 다양한 형태의 배낭 제약식 하에서의 오목 함수 최소화 문제의 해법을 개발하는데 응용될 수 있을 것이다.

주제어 : 다중 선택, 배낭 문제, 분지 한계, 오목 함수 최소화, 유효 절단식, 단체

Abstract This paper defines a multi-selection knapsack problem and presents an algorithm for seeking its optimal solution. Multi-selection means that all members of the particular group be selected or excluded. Our branch-and-bound algorithm introduces a simplex containing the feasible region of the original problem to exploit the fact that the most tightly underestimating function on the simplex is linear. In bounding operation, the subproblem defined over the candidate simplex is minimized. During the branching process the candidate simplex is splitted into two one-less dimensional subsimplices by being projected onto two hyperplanes. The approach of this paper can be applied to solving the global minimization problems under various types of the knapsack constraints.

Key Words : Branch-And-Bound, Concave minimization, Knapsack, Muti-selection, Simplex

1. 서론

본 연구에서는 아래의 (P)와 같이 다중 선택 배낭 문제를 정의하고 정의된 문제의 최적해를 찾는 해법을 제시하고자 한다. 다중 선택은 동일한 집단에 소속된 구성원들이 동시에 선택되거나 동시에 배제되는 것을 의미하는데 집단 간의 상호 관련성의 측정치가 오목함수 형태로 나타나는 상황을 다루고자 한다.

(1)의 비선형 제약식을 선형 제약식으로 변환하면 문제(P)는 전형적인 배낭 제약식 하에서의 오목함수 최소화 문제로 바뀐다. 0-1 정수 선형계획법[1-4], 선형 고정비용 문제[5], 전략 무기 계획 문제[6], 오목

*This work was supported by the Research Grant of Cheongju University(2018.3.1.-2020.2.29.)
* Corresponding Author : Se-Ho Oh(ohsho@cju.ac.kr)
Received September 30, 2019 Revised November 4, 2019
Accepted November 20, 2019 Published November 28, 2019

함수 설비배치 문제[7]등 많은 유용한 모형들이 이러한 유형의 문제로 연구되어 왔다.

$$(P)\qquad \begin{aligned} &\min -x^T R x \\ &s.t\ \sum_{j=1}^{m} a_j y_j \le b \\ &\quad x_i = \Pi_{j \in K_i} y_j,\ i=1,..,n \\ &\quad y_j = 0 \text{ or } 1 \quad ,\ j=1,..,m \\ &where\ R: (n \times n)\, PD \\ &\qquad K_i: jth\, group \end{aligned} \qquad (1)$$

볼록함수 문제의 최적 해법은 해집합에서 부분 최적점(local optimum)을 찾는 절차로 볼 수 있다. 부분 최적해가 전체 최적해(global optimum)이기 때문이다. 하지만 목적함수가 오목인 경우에는 부분 최적점이 최적해임을 보장 받을 수 없다. 그러므로 오목함수 최소화 해법은 볼록함수 최적화 해법을 이용하여 부분 최적점 들을 찾되, 이들을 비교하여 최적해를 구하는 열거법의 형태를 벗어날 수 없는 것이다. 실제로 대부분의 오목함수 최소화 문제의 최적해법이 열거법인 분지-한계 구조 안에서 만들어져 왔다.[8-11].

분지 전략은 가능해 집합의 분할(partition) 방법에 의존한다. 분할이란 가능해 영역을 여러 개의 작은 크기의 영역으로 나누는 것을 말하는데 어떠한 분할 단위(element)를 채택할 것인지에 따라 분할 방법이 특징 지워진다. 대표적으로 직원뿔[12], 평행다면체[3], 다면체[6], 단체[13-15] 등이 분할 단위로 제시 되었다. Tui[16]는 직원뿔(cone)을 Kalantari & Rosen[17]은 평행다면체(parallelpiped)를 분할 단위로 채택하였다. 단체(simplex)가 분할 단위로 사용된 경우는 Benson[12], Falk & Hoffman[6], Horst[14] 등의 연구에서 찾아볼 수 있다.

가능해 집합의 분할 방법은 한계전략과도 밀접한 관계를 갖는다. 분할 단위에 따라 한계연산의 핵심인 부문제의 목적함수 형태가 결정되기 때문이다. 볼록유계다면체 상에서 오목함수를 하한추정하는 볼록함수의 형태로서 Tui[16]는 단순한 선형 절단식(cut)을, Falk & Hoffman[6]은 부분 선형식(piecewise linear)을, 그리고 Kalantari & Rosen[17]은 2차식을 제시하였다. 특히, Benson[12]은 볼록유계다면체가 단체(simplex)이면 목적함수에 가장 가까이 하한추정하는 볼록함수가 일차식임을 증명하고 유도된 선형연립방정식을 풀어 선형 하한추정함수를 구하였다.

본 연구에서의 최적 분지-한계 해법 개발 과정은 이산조건 완화로부터 시작된다. 문제 (P)의 비선형 조건식을 이산 조건으로 변환한 다음 이산조건을 선형 부등식으로 완화시키면 볼록유계다면체 상에서의 오목함수 최소화 문제 (TP)를 얻는다. 이 문제의 최적해는 적어도 볼록유계다면체의 정점들 중에서 발견된다. 한계연산 과정에서 이러한 정점들이 드러나도록 부문제의 목적함수로 1차식 하한추정함수를 채택하였다. 한편 단체(simplex)상에서만 하한추정함수가 선형식으로 유일하게 결정되는 사실을 이용하기 위해 볼록유계다면체를 포함하는 단체를 도입하여 추정함수를 구하게 된다. 따라서 한계연산 과정에서 발견된 정점은 최적 목적함수 값의 상·하한을 수정하는데 이용된다. 즉, 정수해면 (P)의 해이고 분지끝이 일어나면서 최적 목적함수값의 상한 값이 수정된다. 정수해가 아니면 (P)의 해는 아니지만 현재의 부문제로부터 생성되는 하위 부문제들의 목적함수 값의 하한 값을 계산하는데 이용된다. 처음 도입된 단체로부터 가능해를 누락시키지 않고 단체 형태로 분할하는 방법이 분지 전략의 핵심이다. (TP)의 해집합을 담고 있는 후보 단체를 두 개의 초평면에 투사시키면 1차원 낮은 두 개의 단체가 생성되고 후보단체가 담고 있는 (TP)의 해들은 이들 두 단체에 나뉘어져 담기게 된다. 차원이 낮아진다는 것은 하위로 생성될수록 부문제의 크기가 점차 작아짐을 의미한다. 하위 단체는 현 단체로부터 선택된 분지 변수를 0 혹은 1로 고정시킴으로써 비교적 용이하게 얻을 수 있다.

비선형 제약 조건을 선형식으로 완화시키는 과정과 분지 전략을 2장에서 기술하였다. 3장에서는 선택된 단체 상에서 부문제의 목적함수가 어떻게 구해지고 한계 연산이 이루어지는지를 설명하였다. 4장은 해법의 절차를 기술하고 수치 예제를 통해 해법의 타당성을 확인하였다. 마지막으로 결론과 추후 연구 방향에 대하여 언급하였다.

2. 문제의 변환과 부문제 생성

2.1 문제의 변환

아래의 제약식 (2)는 문제 (P)에서 각 집단의 구성원들이 동시에 선택되거나 배제되는 조건을 나타낸다.

$$x_i = \Pi_{j \in K_i} y_j, y_j = 0 \text{ or } 1 \quad \text{for } i = 1,..,n \qquad (2)$$

y_j가 1이면 K_i에 속한 j번째 구성원이 포함되는 것을 의미하고 선택된 i번째 집단은 전체 용량 중 c_i만큼 잠식한다. 따라서 문제 (P)는 식(3)을

$$\sum_{j \in K_i} a_j = c_i \qquad (3)$$

이용하여 (TP)로 재정의 할 수 있다.

$$\begin{array}{lll} & \min -x^T R x & \\ (TP) & s.t \ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le b & (4) \\ & x_i = 0 \text{ or } 1, i = 1,..,n & \\ \multicolumn{3}{l}{where\ R: (n \times n)\, PD} \end{array}$$

2.2 부문제 생성(subproblem generation)

분지 전략은 문제 (TP)의 가능해 집합을 재귀적으로 분할(partition)하는 절차를 의미한다. 본 연구에서 (TP)의 해들은 단체(simplex) 안에 담겨 분할된다. 이렇게 단체 단위로 분할되면 한계연산 과정에서 부문제의 목적함수가 선형식으로 유일하게 결정될 수 있다.

해법의 개발 과정을 논리적으로 명확하게 표현하기 위해 다음의 표기와 정의를 사용한다.

<u>표기</u>

N: 집단의 집합

K_i: i번째 집단의 구성원 집합

Θ: 후보 단체(candidate simplex) 목록 집합

$S_\varphi(\varphi \in \Theta)$: 후보 단체

(CP_φ): S_φ로부터 정의된 부문제(subproblem)

$L.B_\varphi$: (CP_φ)의 최적 목적함수 값

$U.B_k$: k번째 부문제 연산 후 갱신된 최적 목적함수 값의 상한

i_φ: S_φ에서 하위 단체를 생성하기 위해 선택된 분지변수의 첨자

$\overline{x^\varphi}$: (CP_φ)의 최적해

Ψ_φ: S_φ에서 0으로 고정된 변수 집합

Φ_φ: S_φ에서 1로 고정된 변수 집합

정의 1[12]: $\upsilon^0, \upsilon^1, .., \upsilon^n$을 R^n공간에서 (n+1)개의 점독립인 점(affinly independent points)이라 할 때 이 점들의 볼록 일차결합(convex linear combination)으로 나타낼 수 있는 점들의 집합을 n차원 단체(simplex)라 하고 점$\upsilon^0, \upsilon^1, .., \upsilon^n$를 단체의 정점(vertice)이라 한다.

(TP)의 이산 조건을 완화시키면 (RTP)이 된다.

$$\begin{array}{lll} & \min -x^T R x & \\ (RTP) & s.t \ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le b & (5) \\ & 0 \le x_i \le 1, i = 1,..,n & \end{array}$$

완화된 문제 (RTP)의 가능해는 다음과 같다.

$$\Omega = \left\{ x \in R^n | \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le b, 0 \le x_i \le 1, i = 1,..,n \right\}$$

다음의 집합 S_0를 초기 단체로 잡아 보면 이 단체는 Ω를 포함한다.

$$S_0 = \left\{ x \in R^n | \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le b, x_i \ge 0, i = 1,2,...,n \right\}$$

S_0는 다시 다음과 같이 (n+1)개의 점독립인 점들 $\upsilon^0, \upsilon^1, .., \upsilon^n$의 볼록 일차결합(convex linear combination)으로 나타낼 수 있다.

$$S_0 = \left\{ x \in R^n | x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \upsilon^i, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0, \forall\, i \right\}$$
$$where\ \upsilon^0 = (0, 0, ..., 0)$$
$$\upsilon^i = (0, 0, ..., \frac{b}{c_i}, 0, ..., 0), i = 1, 2, ..., n$$

한계 연산을 위해서 선택된 단체(simplex)를 위식과 같이 점독립인 정점들의 일차결합으로 규정해야 하는데 동일한 해공간에서 동일한 차원의 단체로 분할되면 하위 한계 연산에서도 동일한 개수의 정점들을 확인해야하기 때문에 계산상의 부담이 지속된다. 그러나 단체를 초평면에 투사시키는 방식으로 분할하면 분할의 결과로 생성된

단체들은 1차원 낮은 해공간에 존재하게 되므로 정점들을 찾기가 비교적 용이하고 정점들의 개수도 점점 줄어든다. 이 과정에서 (RTP)의 해집합 Ω의 일부가 배제되는데, 배제되는 점들은 정수해가 아닌 점들이고 (TP)의 정점들은 온전히 두 개의 집합으로 나뉜다.

S_0를 분할하기 위해 두 개의 초평면을 고려해보자.

$$H^0=\left\{x\in R^n | x_i=0\right\},$$
$$H^1=\left\{x\in R^n | x_i=1\right\}$$

이들 초평면위로 S_0를 투사시키면 $S_{01}=H^0\cap S_0$, $S_{02}=H^1\cap S_0$가 생성되는데, (TP)의 해집합은 이들 2개의 단체 내부로 분할(partition)되어 포함된다. 초평면 H^0, H^1은 변수 x_i가 0과 1인 점들의 집합이다. 따라서 S_{01}, S_{02}은 다음과 같이 표현된다.

$$S_{01}=\left\{x\in R^n | x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_{01}^i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1, \alpha_i\ge 0, \forall\, i\right\}$$
$$where\ v_{01}^i=(0,0,...,0_i,...,0)$$
$$v_{01}^j=(0,0,...,\xi_j,0,...,0), \xi_j=\frac{b}{c_j} for\, j\ne i$$
$$S_{02}=\left\{x\in R^n | x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_{02}^i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1, \alpha_i\ge 0, \forall\, i\right\}$$
$$where\ v_{02}^i=(0,0,...,1_i,...,0)$$
$$v_{02}^j=(0,0,...,\xi_j,0,...,0), \xi_j=\frac{b-c_i}{c_j} for\, j\ne i$$

변수 x_i의 선택은 한계 연산 과정에서 부문제의 최적해가 구해졌을 때 이루어진다. 부문제의 최적해가 정수해가 아니면 0과 1사이의 값을 갖는 변수는 한 개이므로 이것을 분지 변수로 선택하면 된다.

지금까지의 설명을 바탕으로 분지 해법을 요약하면 다음과 같다.

하위단체(subsimplices) 생성 절차

단계 1. 분지 변수 x_{i_φ}선택

단계 2. 두 개의 단체 $S_{\varphi 1}, S_{\varphi 2}$ 생성

$$S_{\varphi 1}=S_\varphi\cap\left\{x\in R^n | x_{i_\varphi}=0\right\}$$
$$S_{\varphi 2}=S_\varphi\cap\left\{x\in R^n | x_{i_\varphi}=1\right\}$$

단계 3. $S_{\varphi 1}, S_{\varphi 2}$의 정점을 확인하고 Θ에 등록

3. 한계 연산

단체 목록에서 후보 단체$S_\varphi(\varphi\in\Theta)$가 선택되면 한계 연산이 시작된다. 한계 연산의 핵심은 부문제의 정의이다. 부문제는 점독립인 점들로 규정된 단체상에서 원 문제 (P)의 오목함수를 하한추정하는 1차식을 목적함수로, 문제 (RTP)의 Ω를 가능해 집합으로 하는 선형계획법 문제이다. 따라서 부문제의 최적해는 Ω의 정점이다. 이점이 정수해면 문제 (P)의 가능해이므로 문제 (P)의 최적 목적함수 값의 상한을 제공하고 더 이상 분지가 일어나지 않는 분지끝 상태가 된다. 정수해가 아니면 부문제의 최적 목적함수 값은 현 부문제로부터 분지되는 하위 부문제 들의 하한값 $L.B_\varphi$이 된다. 그러므로 부문제의 최적 목적함수 값이 현재까지 수정된 상한값보다 크면 더 이상 하위 단체를 생성할 필요가 없게 된다. 현 후보 단체는 문제 (P)의 최적해가 포함하지 않고 있음을 확신할 수 있기 때문이다. 따라서 가지치기가 일어난다.

후보 단체의 선택 기준은 이론적으로 우위에 있는 기준이 존재하지 않는다. 경험적으로 다음의 기준을 제시한다.

후보 단체 선택 기준:

1) S_φ s.t $L.B_\varphi=\min_{j\in\Theta}L.B_j$

2) $S_\varphi=\min_{j\in\Theta}\dim(S_j)$

첫 번째 기준은 최소 하한 값 선택(least-lower-bound-next)기준이다. 가급적 분지 위치가 높은 문제를 우선적으로 선택하여 하한 추정치를 개선하려는 의도가 내포되어 있다.

두 번째는 가장 최근에 생성된 단체로부터 새로운 하위 단체를 생성시키게 한다. 가능한 한 빨리 원문제의 가능해를 얻게 되어 최적 목적함수의 상한값을 수정할 수 있다.

다음으로 선택된 후보 단체 상에서 문제 (P)의 목적함수를 하한추정하는 식을 구하는 방법을 생각해보자. 초기 단체의 점독립인 정점들이 확인되면 식 (6)에 대입하여 1차 연립방정식을 얻는다. Benson은 이러한 방법으로 도출한 1차 연립방정식을 풀어 선형 하한추정함수를 구했다.[12]

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j^i + \gamma = f(v^i),\, i = 0,1,...,n \qquad (6)$$
$$\text{for } v^i = (v_1^i, v_2^i, ..., v_n^i),\, \alpha_j, \gamma \in R$$

이 연립방정식의 해 $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \gamma$는 다음과 같이 부문제의 목적함수 계수가 된다.

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j + \gamma \qquad (7)$$

따라서 최초의 한계연산을 위한 부문제는 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} &\min \Gamma_0(x) \\ (CP_0)\ & s.t \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le b \\ & 0 \le x_i \le 1, i = 1,..,n \end{aligned} \qquad (8)$$

마찬가지 방법으로 후보단체 S_φ로부터 부문제 (CP_φ)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\min \Gamma_\varphi(x) = \sum_{i \in N-\Psi_\varphi-\Phi_\varphi} \alpha_i x_i \\ (CP_\varphi)\, & s.t \sum_{i \in N-\Psi_\varphi-\Phi_\varphi} c_i x_i \le b - \sum_{i \in \Phi_\varphi} c_i \\ & 0 \le x_i \le 1, i \in N - \Psi_\varphi - \Phi_\varphi \end{aligned} \qquad (9)$$

부문제 (CP_φ)의 최적해 $\overline{x^\varphi}$가 정수해면 최적 목적함수 값의 상한이 수정될 수 있고 분지 끝이 된다. 정수해가 아니면 S_φ로부터 분지되는 부문제의 목적함수 값의 하한이 수정된다.

일반적으로 후보단체 S_φ에 대한 한계연산의 절차는 다음과 같다.

한계연산 (bounding operation) 절차

단계 1. 단체 S_φ의 정점을 확인

단계 2. 일차연립방정식으로부터 Γ_φ를 구하고 부문제 (CP_φ)를 정의

단계 3. $\overline{x^\varphi}$이 정수해면 분지끝

$$U.B_k = \min\{UB_{k-1}, f(\overline{x}^\varphi)\}$$

아니면 $UB_{K-1} \le \Gamma_\varphi(\overline{x}^\varphi)$이면 가지치기

아니면 $U.B_k = UB_{k-1}$

$$L.B_\varphi = \Gamma_\varphi(\overline{x}^\varphi)(= \Gamma_\varphi(\overline{x^\varphi}))$$

4. 해법 및 수치 예제

4.1 해법 절차

본 연구에서 제시하고자 하는 문제 (P)의 최적 해법은 다음과 같다. 단체 목록 집합이 $\varnothing$이면 상·한값을 최근에 갱신한 해가 최적이다.

Iteration 0: 초기화

0-1: (RTP)의 Ω을 포함하는 단체 S_0선택

0-2: 한계연산 절차 수행

$\overline{x^0}$ 가 정수해면 최적해

아니면 $L.B_0 = \Gamma_0(\overline{x}^0)$,$U.B_0 = 0$

0-3; 분지 변수를 선택하여 단체분할

S_{01}, S_{02}를 단체 목록 Θ에 등록

Iteration k:

k-0: 선택 기준에 의해 후보 단체 S_φ선택

k-1: S_φ로부터 부문제를 정의하고

한계연산 절차 수행

$\overline{x^\varphi}$가 정수해면 $U.B_k$를 수정하고 분지끝

$U.B_k$보다 작은 하한값을 갖는 부문 제를 정의 하는데 사용될 단체들을 목록에서 제거

분지변수를 선택하고 단체분할 실행

k-2: 단체 $S_{\varphi 0}, S_{\varphi 1}$을 단체 목록에 등록

4.2 수치 예제 및 부문제(subproblem table)

해법의 타당성을 확인하기 위하여 다음의 예제를 풀어보자.

$$\min\ -(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} 8 & -4 & -18 & 0 \\ -4 & 8 & 24 & 0 \\ -18 & 24 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s.t\ & y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 2y_7 + 2y_8 + 3y_9 \\ & + 3y_{10} + 3y_{11} + 5y_{12} \le 16 \\ & x_i = \Pi_{j \in K_i} y_j,\ i = 1,...,n \\ & y_j = 0 \text{ or } 1,\ j = 1,...,m \end{aligned}$$

Table 1. the subproblem at the kth iteration

k	subproblem	convex envelope	$\overline{x^{\varphi}}$	$L.B_{\varphi}$	$U.B_k$	branching var
0	CP_0	$-\frac{128}{3}x_1-\frac{128}{5}x_2-144x_3-\frac{256}{11}x_4$	$(1,\frac{4}{5},1,0)$	-207	0	x_2
1	CP_{01}	$-\frac{128}{3}x_1-144x_3-\frac{256}{11}x_4$	$(1,0,1,\frac{4}{11})$	-195	-53	x_4
2	CP_{02}	$-\frac{64}{3}x_1-147x_3-16x_4-8$	$(\frac{2}{3},1,1,0)$	-158.5	-53	x_1
3	CP_{011}	$-\frac{128}{3}x_1-144x_3$	$(1,0,1,0)$		-53	fathomed
4	CP_{012}	$-\frac{40}{3}x_1-\frac{40}{9}x_3-16$	$(1,0,\frac{2}{9},1)$	-30,3		pruned
5	CP_{021}	$-147x_3-16x_4-8$	$(0,1,1,\frac{2}{11})$	-157.9	-53	x_4
6	CP_{022}		infeasible			pruned
7	CP_{0211}	$-147x_3-8$	$(0,1,1,0)$	-137	-137	fathomed optimal
8	CP_{0212}		$(0,1,0,1)$	-24	-24	pruned

$$K_1=\{1,2\}, K_2=\{3,4,5\}, K_3=\{6,7,8,9\},$$
$$K_4=\{10,11,12\}$$

완화된 문제로 변환시키면 다음과 같다.

$$\min\ -(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix} 8 & -4 & -18 & 0 \\ -4 & 8 & 24 & 0 \\ -18 & 24 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
$$s.t\quad 3x_1+5x_2+9x_3+11x_4 \le 16$$
$$x_i=0\,\text{or}\,1,\ i=1,..,4$$

Table 1은 최적해를 구할 때까지의 부문제와 한계연산 결과를 보여준다.

위 문제의 최적해는 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,1,1,0)$임으로 K_2, K_3 집합에 속하는 구성원들이 선택됨을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 동일한 집단에 소속된 구성원들이 동시에 선택되거나 동시에 배제되는 상황을 묘사한 배낭 제약식 하에서의 오목함수 최소화 문제를 다루었다. 제시된 분지·한계 최적해법은 단체를 분할 단위로 하여 개발되었다. 단체상에서 오목함수의 하한추정함수가 1차식으로 유일하게 고정된다는 사실에 근거하여 부문제로서의 선형계획법 문제가 한계연산 과정에서 다루어진다. 그리고 분지 변수가 0 값을 갖는 초평면과 1값을 갖는 초평면으로 단체를 투사시킴으로써 이 안에 담겨있는 해집합을 새로운 하위 단체들에 나뉘어 분할되게 한다. 이렇듯 분지가 일어날 때마다 부문제 해공간의 차원이 작아지면서 부문제의 크기가 줄어 한계 연산에 필요한 계산량이 감소하는 점이 본 해법의 가장 큰 장점이라고 볼 수 있다.

한편 단체의 크기가 작을수록 하한추정함수의 목적함수에의 근접도가 높아지고 결과적으로 해법의 효율성이 개선된다는 것을 의미한다. 따라서 절단 제약식을 추가하여 단체를 가능한 한 작게 만드는 방법과 함께 후보단체를 선택하는 기준에 대한 연구도 요구된다. 앞으로 본 연구의 결과는 다중 선택 오목함수 배낭 문제와 같은 의사 결정 모형의 최적 해법을 개발하는데 응용될 수 있을 것이다.

REFERENCES

[1] B. Kalantari & A. Bagchi. (1990). An Algorithm for Quadratic Zero-One Programs. *Naval Research Logistics Quarterly, 37,* 527-538.

[2] J. J. More & S. A. Vavasis. (1991). On the Solution of Concave Knapsack Problem. *Math. Prog. 49,* 397-411.

[3] S. H. Oh. (2018). A Branch-and-Bound Algorithm for Concave Minimization Problem with Upper Bounded Variables. *International Journal of Engineering Technology. 7(2), Sp Is 12,* 333-337.

[4] X. L. Sun, F. L. Wang & L. Li. (2005). Exact Algorithm for Concave Knapsack Problems: Linear Underestimation and Partition Method. *Journal of Global Optimization. 33,* 15-30.

[5] T. V. Tieu. (1978). Convergent Algorithms for Minimizing a Concave Function. *Acta Mathematica Vietnamica. 5,* 106-113.

[6] J. E. Falk & K. R. Hoffman. (1976). A Successive Underestimation Method for Concave Minimization Problems. *Math. Opns. Res. 1,* 251-259.

[7] R. M. Soland. (1974). Optimal Facility Location with Concave Costs. *Opns. Res. 22*, 373-382.

[8] H. P. Benson. (1996). Deterministic Algorithms for Constrained Concave Minimization: A Unified Critical Survey. *Naval Research Logistics Quarterlyl. 43*, 756-795.

[9] J. K. Hong. (2017). Review on Security Communication Environment in Intelligent Vehicle Transport System. *Journal of Convergence for Information Technology. 7(6)*, 97-102.

[10] Y. S. Jeong, Y. T. Kim & G. C. Park. (2018). User Privacy management model using multiple group factor based on Block chain. *Journal of Convergence for Information Technology. 8(5)*, 107-113.

[11] S. H. Oh & H. Dho. (2014). An Algorithm for Globally Minimization of a Linearly Constrained Concave Function over a Parallelepiped. *European Journal of Scientific Research, 123(4)*, 404-411.

[12] H. P. Benson. (1985). A Finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron. *Naval Research Logistics Quarterly. 32*, 165-177.

[13] M. W. Choi. (2018). A Study on the Equity of Regulation in Advertising, *Journal of Digital Convergence, 16(11)*, 275-280.

[14] R. Horst. (1986). A General Class of Branch-and-bound Methods in Global Optimization with Some New Approachs for Concave Minimization. *J. Optim. Theory Appl. 51*, 271-291.

[15] E. M. Yang, H. J. Lee & C. H. Seo. (2017). Comparison of Detection Performance of Intrusion Detection System Using Fuzzy and Artificial Neural Network. *Journal of Digital Convergence. 15(6)*, 391-398.

[16] H. Tui. (1964). Concave Programming under Linear Constraints. *Dok. Akad. Nauk SSSR 159, 32-35, Translated 1964 in Soviet Math. Dokl. 4*, 1437-1440.

[17] B. Kalantari & J. B. Rosen. (1987). An Algorithm for Global Minimization of Linearly Constrained Concave Quadratic Functions. *Math. Opns. Res. 12*, 544-560.

오 세 호(Se-Ho Oh) [정회원]

· 1984년 2월 : 서울대학교 서울대학원 산업공학과 (산업공학석사)
· 1991년 2월 : 서울대학교 서울대학원 산업공학과(산업공학박사)
· 1986년 3월 ~ 현재 : 청주대학교 산업공학과 교수
· 관심분야 : 선형계획법, 일정관리
· E-Mail : ohsho@cju.ac.kr