

겹치기 이음부의 설계변수 변화에 따른 고유진동수의 예측

윤성호*[#]

*금오공과공대 학교 기계공학과

Prediction of Natural Frequency via Change in Design Variable on Connection Area of Lap Joint

Seong-Ho Yun*[#]

*Department of Mechanical Engineering, KUMOH NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(Received 25 September 2019; received in revised form 3 October 2019; accepted 10 October 2019)

ABSTRACT

This paper describes the prediction of eigenfrequencies due to changes in stiffness and mass in the connection area of the lap joint beam in terms of linear and torsional stiffness as well as connection length. The sensitivities of mass and stiffness in the finite element model were derived by using the first-order differential and algebraic equation and were thereafter applied to obtain new natural frequencies that were compared with theoretical exact solutions. Newly predicted natural frequencies due to only a change in stiffness were in relatively good agreement with those in lower modes for rigid joints, while further investigation was needed for flexible joints. On the other hand, only the change in mass resulted in a large discrepancy in the flexible joint case. It may be strongly anticipated that this study will provide a useful tool for estimating modal parameters by change in any design variable, such as the structural dimension, material property, or connection type for a large-scale structure, even though the proposed methodology is currently limited to a jointed beam.

Key Words : Structural Modification(구조변경), Lap Joint(겹치기 결합), Frequency Sensitivity(진동수 민감도)

1. 서 론

구조물의 동적 거동을 최적화하는데 있어 질량, 강성, 감쇠, 강성의 값을 변경함으로써 목표로 설정된 고유진동수를 변화시키는 것이 일반적인 방법이다. 특히 피로나 공진 문제에 매우 취약할 할 때 이러한 방법은 매우 유용하지만 강도 또는 안정성 측면에서 내구성의 취약함을 초래할 수도 있다^[1]. 따라서 설계 형상변수를 직접 변경하여

고유진동수의 민감도를 미리 예측함으로써 구조물의 동적 성능과 형상을 결정할 수 있는 최적화된 알고리즘을 도출하는 것이 바람직하다^[2].

산업 현장에서 일반적으로 구조물의 진동 거동을 최적화하는 방법은 설정된 고유진동수에 도달하도록 유한 요소 모델에 일련의 수정작업을 반복적으로 수행하는 일이다. 이러한 방법을 전향적 진동해석(forward vibration analysis)이라고 볼 수 있으며 소요 시간이 많고 목표치에 도달하는 경우가 매우 드문 것이 현재의 실정이다. 이러한 단점을 보완하고자 먼저 구조적인 형상이나 강성을 변화시켜 진동 문제의 고유치를 산정하는 역 고유치

Corresponding Author : shyun@kumoh.ac.kr

Tel: +82-54-478-7324, Fax: +82-54-478-7319

Copyright © The Korean Society of Manufacturing Process Engineers. This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 3.0 License (CC BY-NC 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

정식화(inverse eigenvalue formulation)가 대안이 되고 있다. 반대로 이러한 방법은 원하는 고유진동수를 얻고자 요구되는 설계변수의 변화량을 산정하는데 유용하게 사용될 수 있으며 강성과 질량의 변화량을 산정하여 진동의 특성을 최적화할 수 있다.

고유치를 역산정하는 이론적인 배경은 유한요소 구조물에서 질량과 강성을 변화시켜 도출되는 미분방정식과 대수방정식의 계산에 근거를 두고 있다¹⁾. 이 방법은 설계 변수에 관하여 고유치의 1차 확장 근사법(the first order expansion approximation)을 적용한 것이고 어떠한 구조물의 유한요소 모델에도 적용이 가능할 것이다. 이의 알고리즘을 컴퓨터 프로그램으로 이식하여 실제 이음 구조물에 해석을 적용할 것이다.

본 연구에서는 이론적인 토대를 바탕으로 일반적인 자유 감쇠 진동의 경우 n 자유도 시스템의 유한요소 분할을 통한 1차원 오일러-베르누이 보에 대하여 살펴볼 것이다. 구조물의 결합 방법 중의 하나인 겹치기 이음(lap joint)에 대하여 이음부의 형상 및 강성 변화에 대하여 고려할 것이다. 이음부의 면적 크기에 따라서 질량의 변화를 가져올 수 있으며 오랜 시간 동적 하중에 의하여 이음부는 강성을 잃게 될 것이므로 강성의 변화를 초래할 것이다. 이러한 질량과 강성의 변화가 개별적으로 또는 복합적으로 일어날 때 고유진동수의 변화를 살펴볼 것이다. 고유진동수의 변화율은 미분대수방정식으로 표현됨을 살펴 볼 것이다. 질량과 강성의 변화에 따라서 구해지는 고유진동수의 해는 선형 또는 비선형 거동을 하는지 관찰할 필요가 있으며, 이를 위한 일련의 알고리즘을 제시하였다.

2. 이론 및 해석

2.1 민감도 해석 정식화

우선 구조물의 일반적인 동역학적 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = f(t) \quad (1)$$

여기서 M 은 질량행렬, C 는 감쇠행렬, K 는 강성행렬, $f(t)$ 시간이력 하중벡터, U 는 변위벡터이다. 무시할 정도의 감쇠를 가지는 구조물의 고유진동수는 다음의 고

유치 문제를 풀어서 구할 수 있다.

$$(K - \lambda_m M)\phi_m = 0 \quad (2)$$

여기서 ϕ_m 은 m 번째 고유벡터이고 λ_m 은 고유치이다. 이로부터 m 번째 고유진동수 f_m 은 다음과 같다.

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_m} \quad (3)$$

만일 구조물의 물성치 또는 기하학적 형상이 변화하면 동적인 거동의 대표적인 물성치인 모드 형상 ϕ_m 과 고유진동수 f_m 의 변화를 초래하게 된다. 설계변수 p 의 변화에 따른 모달 매개변수의 민감도를 먼저 파악해야 하며, 이를 위하여 식 (1)을 p 에 관하여 미분을 하면 다음과 같다.

$$(K' - \lambda'_m M - \lambda_m M')\phi_m + (K - \lambda_m M)\phi'_m = 0 \quad (4)$$

여기서 $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial p$ 이다. 또한 윗 첨자 T 는 전치행렬을 표시하며, 질량행렬에 관하여 고유벡터를 정규화시키면 다음의 직교성이 성립하도록 한다.

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases} \quad (5)$$

상기의 식 (4) 앞에 ϕ_m^T 를 곱하고 식 (5)를 적용하면 두 번째 항은 다음과 같이 표현되어 사라지게 된다.

$$\{(K - \lambda_m M)\phi_m\}^T \phi'_m = 0 \quad (6)$$

따라서 식 (4)를 다시 정리하면 k 개의 설계변수에 대한 고유치의 변화율 또는 민감도는 다음과 같으며 고유치는 중복된 값이 나타나지 않는다고 가정하였다.

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial p_j} = \phi_m^T \left\{ \frac{\partial K}{\partial p_j} - \lambda_m \frac{\partial M}{\partial p_j} \right\} \phi_m, \quad j = 1, \dots, k \quad (7)$$

식 (7)은 다음의 1차 미분대수방정식으로 방정식으로 정리할 수 있고 설계변수 p 에 따라서 변하지 않는 새로운 상수 A 와 B 를 정의할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial p_j} + \phi_m^T \frac{\partial M}{\partial p_j} \phi_m \lambda_m - \phi_m^T \frac{\partial K}{\partial p_j} \phi_m = 0 \quad (8)$$

$$A = \phi_m^T \frac{\partial M}{\partial p_j} \phi_m; B = \phi_m^T \frac{\partial K}{\partial p_j} \phi_m \quad (9.a, b)$$

상기 식 (8)의 미분대수방정식과 관련된 초기조건은 다음과 같다.

$$\lambda_m \Big|_{@p=\bar{p}} = \bar{\lambda}_m \quad (10)$$

여기서 $\overline{(\bullet)}$ 는 구조물의 동적 초기치를 나타내며 이에 따른 식 (8)의 해는 다음과 같다.

$$\lambda_m(p) = \frac{B}{A} + \frac{e^{-Ap}(A\bar{\lambda}_m - B)}{Ae^{-A\bar{p}}}, A \neq 0 \quad (11)$$

2.2 겹치기 이음의 설계 변경

2개의 보를 겹치기 이음(lap joint)을 하였고 보의 전체 길이가 l 이고 길이가 l_e 인 유한요소로 Fig. 1과 같이 분할하였다. 이음부의 길이는 l_j 이고 전단력 V 와 굽힘 모멘트 M 과 관계가 있는 강성 요소를 선형스프링(linear or vertical spring)강성 k_v 와 비틀림스프링(torsional spring)강

성 k_t 로 각각 나타내었다. 보의 단면은 높이 h 와 폭 b 로 밀도는 ρ 로 나타내었다. 보의 요소 1개에 해당하는 질량행렬 M_e 와 강성행렬 K_e 는 다음과 같다.

$$M_e = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ sym & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ sym & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Fig. 2는 외팔보에 끝에 선형 및 비틀림스프링이 달려있는 n 개의 유한요소로 분할하고 절점은 $(n+1)$ 개를 가진다. 이때 이음부의 강성을 결정하는 요소는 Fig. 2의 전체 질량행렬 M 과 강성행렬 K 구조에서 대각선상에 있으며 $(2i+1)$ 번째 요소는 선형강성을 나타내며 $(2i+2)$ 번째 요소는 비틀림강성을 나타낸다.

첫째, 겹치기 이음 보에서 설계 파라미터를 이음부의 요소길이 l_j 를 변경한다고 가정한다. 이에 해당하는 $(2i+1)$ 번째 요소의 질량과 $(2i+2)$ 번째 요소의 질량관성모멘트는 다음과 같다.

$$M_{(2i+1, 2i+1)} = \frac{\rho A l_e}{420} (156 + 2bh l_j \rho) \quad (14)$$

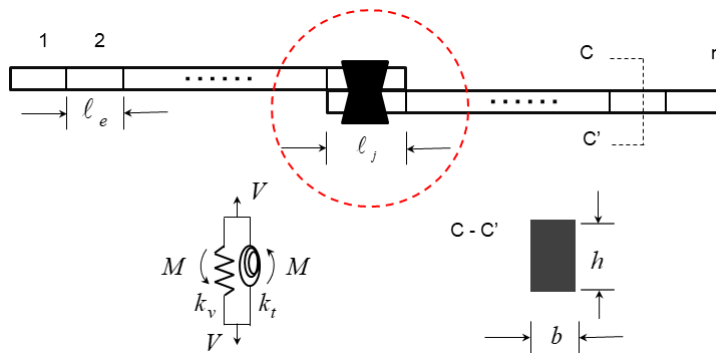


Fig. 1 A generic model for the lumped lap joint

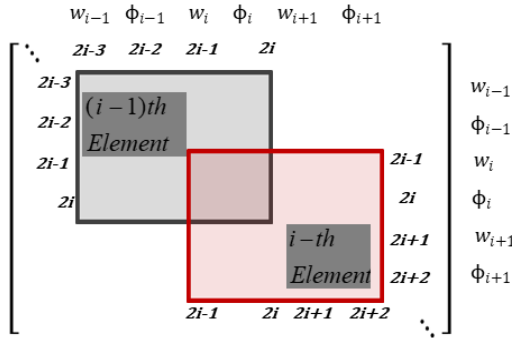


Fig. 2 An assembled matrix for the finite elements of the cantilever beam with linear and torsional spring at tip

$$M_{(2i+2, 2i+2)} = \frac{\rho A \ell_e}{420} (4\ell_e^2 + 2bh\ell_j\rho)\ell_j^2 \quad (15)$$

따라서 이음부 길이 ℓ_j 에 대한 질량과 질량관성모멘트의 변화율은 다음과 같으며 질량행렬의 다른 요소들에 대한 값은 0이다.

$$\frac{\partial M}{\partial \ell_j}_{(2i+1, 2i+1)} = 2pbh \quad (16)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \ell_j}_{(2i, 2i)} = 6pbh\ell_j^2 \quad (17)$$

둘째, 이음부의 유연성 강건성을 판단할 수 있는 선형 및 비틀림강성을 식 (18)과 (19)로 나타낸다.

$$K_{(2i+1, 2i+1)} = \frac{EI}{\ell_e^3} \left\{ 12 + K_f \left(\frac{\ell_j}{\ell} \right)^3 \right\} \quad (18)$$

$$K_{(2i, 2i)} = \frac{EI}{\ell_e^3} \left\{ 4\ell_e^2 + G_f \left(\frac{\ell_j}{\ell} \right) \ell_e^2 \right\} \quad (19)$$

여기서 K_f 와 G_f 는 다음과 같이 정의되는 무차원 선형 강성계수와 무차원 비틀림강성계수이다⁴⁾.

$$K_f = \frac{k_v \ell^3}{EI}, \quad G_f = \frac{k_t \ell}{EI} \quad (20.a, b)$$

따라서 이음부의 강성 K_f 와 G_f 대한 강성의 변화율은 다음과 같으며 강성행렬의 다른 요소들에 대한 값은 0이다.

$$\frac{\partial K}{\partial K_f}_{(2i+1, 2i+1)} = \frac{EI}{\ell_e^3} \quad (20)$$

$$\frac{\partial K}{\partial G_f}_{(2i, 2i)} = \frac{EI}{\ell_e} \quad (21)$$

본 연구에서는 이음부의 길이 ℓ_j 만 변화했을 때 식 (9.b)에서 $B = 0$ 이고 고유치는 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_m = \bar{\lambda}_m e^{-A(\ell_j - \bar{\ell}_j)} \quad (22)$$

또한 이음부에서 오직 강성만 변화했을 경우 식 (9.a)에서 $A = 0$ 이고 고유치는 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_m = \bar{\lambda}_m + B(K - \bar{K}) \quad (23)$$

2.3 수치해석

Fig. 1에서 2개의 보가 겹쳐 결합되는 영역의 크기를 조절함으로써 질량의 변화를 초래하는 경우 고유치의 산정은 식 (22)를 적용하고, 단지 결합의 강건성 또는 유연성에 따라서 강성만을 조절할 때 고유치 변화의 관찰은 식 (23)을 적용한다. 이를 바탕으로 Fig. 3에 이 알고리즘을 구현하기 위한 흐름도를 작성하였다. 먼저 모델의 절점과 요소의 개수를 정하고 질량과 강성 행렬을 결정한다. 결합부의 질량이나 강성을 변화시키고 변경된 질량 또는 강성 행렬을 재산정하고 이에 대한 민감도 행렬을 계산하여 새로운 고유치를 구한다. 이를 원래 고유치 문제의 결과와 비교하여 그 차이를 관찰한다. 이 때 원하는 오차 범위 밖에 있으면 새로운 민감도 행렬을 다시 만들고 오차가 만족하는지 다시 계산을 한다.

본 연구에서는 보의 전체 길이 $\ell = 2m$, 유한요소 길

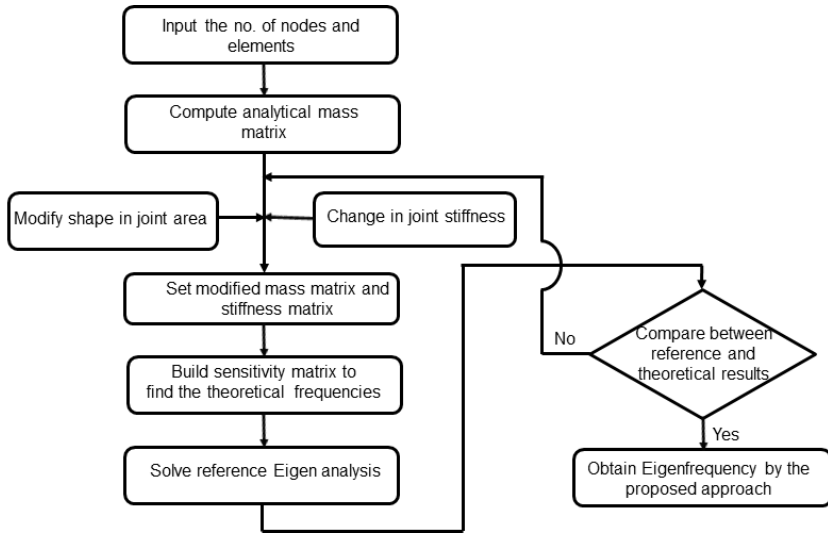


Fig. 3 A flow chart for algorithm of predictions on the eigenvalue in case of modifications in connection area and joint stiffness

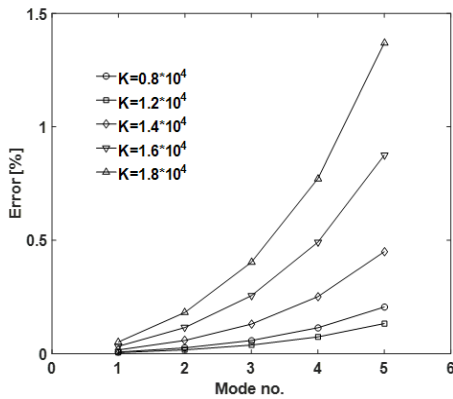


Fig. 4 Errors of natural frequency for various dimensionless linear stiffnesses

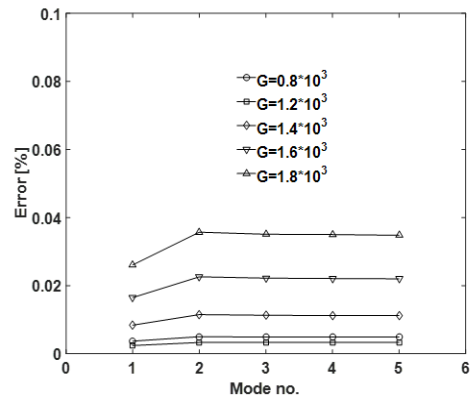


Fig. 5 Errors of natural frequency various dimensionless torsional stiffnesses

이 $\ell_e = 0.1m$, 보의 횡방향으로 절단한 직사각형의 단면 가로(b)×세로(h) = $0.1m \times 0.05m$, 재료의 밀도 $\rho = 7,850kg/m^3$, I 는 단면 2차모멘트이고 재료의 탄성계수 $E = 2 \times 10^{11}N/m^2$ 를 사용하였다. Fig. 4는 무차원 선형스프링강성 10^4 을 기준으로 $-20\% \sim 80\%$ 까지 강성을 변화시켰을 때 1차-5차 모드의 고유진동수의 차이가 1.5% 미만을 보여주고 있다. Fig. 4는 무차원 비틀림스프링강성 10^3 을 기준으로 $-20\% \sim 80\%$ 까지 강성

을 변화시켰을 때 고유진동수의 차이가 거의 없음을 관찰할 수 있다. Fig. 5는 무차원 선형스프링강성과 비틀림스프링강성 모두 동일하게 10^5 을 기준으로 결합부의 길이를 $-50\% \sim -30\%$ 까지 변화시켰을 때 1차-5차 모드의 고유진동수의 차이가 4% 미만을 보여주고 있다. Fig. 6은 무차원 선형 및 비틀림강성 모두 동일하게 10^3 을 기준으로 결합부의 길이를 $5\% \sim 25\%$ 까지 변화시켰을 때 고유진동수의 차이가 최대 17%까지 나타내고 있다.

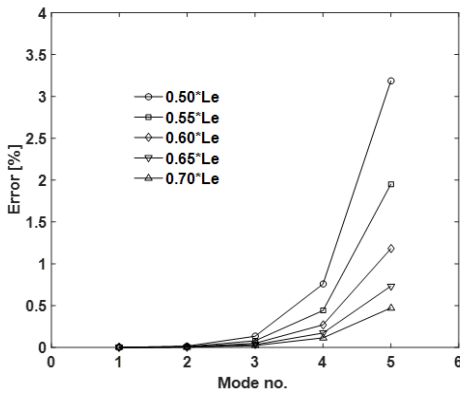


Fig. 6 Errors of natural frequency for various joint area for two reference stiffnesses 10^5

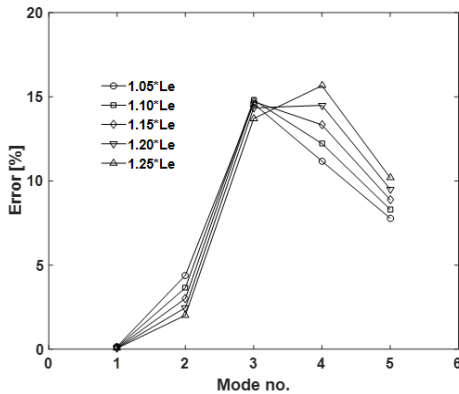


Fig. 7 Errors of natural frequency for various joint area for two reference stiffnesses 10^3

일반적으로 고차의 모드일 경우에 정밀해와의 차이가 더욱 커지나 매우 미미함을 알 수 있다. 유연성에서 강건성으로 천이되는 구간 $10^3 \sim 10^4$ 에서 강성의 변화가 고유진동수에 미치는 영향은 작음을 알 수 있다. Fig. 6~7에서 결합부의 길이, 즉 질량의 변화에 의한 고유진동수에 미치는 영향은 크며 유연성 영역에서 그 차이가 더 크음을 알 수 있다.

3. 결론

본 연구에서는 겹치기 이음부에서 설계 변수인 이음부의 면적과 강건성을 변화시킴으로써 고유치를 예측할 수

있도록 정식화하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 이음부의 질량 및 강성 민감도를 고려하여 도출되는 1차 미분대수방정식에서 고유진동수를 예측하여 그 정밀도를 파악할 수 있는 알고리즘을 작성하였다.
2. 결합부의 강성만을 변화시켜 예측한 고유진동수는 정밀해와 비교적 잘 일치하고 고차 모드에서 차이가 있지만 그 영향은 미미할 수 있다.
3. 결합부의 질량만을 변화시킬 때 고유진동수에 미치는 영향은 강성을 변화시킬 때보다 크며 유연성 영역에서는 정밀해와의 차이가 더 크음을 알 수 있다.

후기

“본 연구는 2017년도 금오공과대학교 학술비 지원에 의하여 연구된 논문임.”

REFERENCES

1. Lee, N.-Y., Jeong, D.-H. and Kim, B.-T., “A Study on the Behavior of Class 900 Flange Joints with Metal Ring Gaskets,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 17, No. 1, pp. 34-41, 2018.
2. Yun, S.-H., “Analysis of the Dynamical Characteristics and Prediction of Stiffness for the Joint between Members,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 18, No. 2, pp. 58-64, 2019.
3. Farahani, K. and Bahai, H., “An Inverse Strategy for Relocation of Eigenfrequencies in Structural Design. Part I: First Order Approximate Solutions,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 274, pp. 481-505, 2004
4. Yun, S.-H. and Bauchau, O. A., “Improving Modal Parameter Predictions for Jointed Airframe Panel, Part I: Experiments,” Journal of the American Helicopter Society, Vol. 43, pp. 156-163, 1998.