Journal for History of Mathematics
Vol. 32 No. 5 (Oct. 2019), 241–255
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2019.32.5.241

Pythagorean Theorem II : Relationship to the Parallel Axiom

피타고라스의 정리 II : 평행공리와의 관계

Jo Kyeonghee 조경희 YANG Seong-Deog* 양성덕

The proposition that the parallel axiom and the Pythagorean theorem are equivalent in the Hilbert geometry is true when the Archimedean axiom is assumed. In this article, we examine some specific plane geometries to see the existence of the non-archimidean Hilbert geometry in which the Pythagorean theorem holds but the parallel axiom does not. Furthermore we observe that the Pythagorean theorem is equivalent to the fact that the Hilbert geometry is actually a semi-Euclidean geometry.

Keywords: Pythagorean theorem, Parallel Postulate, Semi-Euclidean, Archimedean Axiom; 피타고라스의 정리, 평행공리, 준-유클리드, 아르키메데스의 공리.

MSC: 52A01, 52A55

1 서론

힐베르트의 다섯 공리군 [10] 중 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군을 모두 만족시키는 평면기하를 우리는 중립기하, 절대기하, 또는 힐베르트 기하라고 부른다. 이 논문에서는 힐베르트 기하라고 명명하기로 한다. 나머지 두 공리군은 평행공리와 연속공리인데 그 중 평행공리는 다음과 같다.

> (평행공리) 직선 l과 그 직선에 있지 않은 한 점 A가 주어졌을 때, 점 A를 지나고 직선 l을 만나지 않는 직선은 단 하나 있다.

일반적으로 평행공리는 피타고라스의 정리와 동치라고 알려져 있다.

---

*Corresponding Author.
이 연구를 수행함에 있어 양성덕은 한국연구재단 연구비 NRF 2017 R1E1A1A 03070929의 지원을 받았습니다.
Jo Kyeonghee: Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime Univ.
E-mail: khjo@mmu.ac.kr
YANG Seong-Deog: Dept. of Math., Korea Univ. E-mail: sdyang@korea.ac.kr
Received on Sep. 4, 2019, revised on Oct. 4, 2019, accepted on Oct. 30, 2019.

(피타고라스의 정리) 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b이고 빗변의 길이가 c일 때 $a^2 + b^2 = c^2$이 성립한다.

그러나 여기에는 유의해야 할 부분이 있다. 아르키메데스의 공리의 성립 여부가 위 두 명제의 동치 여부를 결정하기 때문이다. 아르키메데스의 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 평행공리와 피타고라스의 정리가 동치이지만, 비-아르키메데스 힐베르트 기하에서는 그렇지 않다. 피타고라스의 정리는 성립하지만 평행공리가 성립하지 않는 비-아르키메데스 힐베르트 기하가 존재한다. 이 논문에서는 이러한 피타고라스의 정리와 평행공리의 관계에 있어서 극적인 차이를 나타내는 아르키메데스 힐베르트 기하와 비-아르키메데스 힐베르트 기하를 구체적인 모델을 통하여 비교 분석하고, 이 과정에서 피타고라스의 정리의 본질을 살펴본다.

평행공리를 만족시키는 힐베르트 기하, 즉 유클리드 기하[1)]에서 피타고라스의 정리가 성립함은 잘 알려져 있다. 이는 유클리드의 『원론』에 나타난 명제 I.47이며, 힐베르트의 『The Foundations of Geometry』에서 정립한 공리체계에 의해 그 증명이 완벽하게 완성되었다고 볼 수 있다. 그러나 피타고라스의 정리를 만족시키는 힐베르트 기하에서 평행공리가 성립하지 않을 수도 있다. (본 논문의 명제 5.2와 5.3 참조.)

아르키메데스의 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 그 역도 성립한다. 즉, 아르키메데스의 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서 평행공리와 피타고라스의 정리는 서로 동치다. 아르키메데스의 공리를 가정하지 않는 힐베르트 기하에서는 피타고라스의 정리와 그 기하가 준-유클리드 기하(6절의 정의 참조)라는 것이 동치임을 §6에서 보게 될 것이다.

이 논문의 저자들이 피타고라스의 정리와 평행공리 사이의 이러한 관계에 대하여 명확하게 서술되어 있는 문헌 또는 논문을 찾으려고 하였으나 성공하지 못하였다. 대부분 아르키메데스 공리를 은연중에 가정하고 있어서 피타고라스의 정리와 평행공리가 동치라고 생각하지만 구체적으로 명시하지 않았으며, 또한 비-아르키메데스 기하에서 어떤 변화가 있는지에 대해서는 전혀 언급하고 있지 않다 ([1], [24], [20] 등 참조). [2)] 그러한 이유로, 고전기하를 연구한 수학자라면 당연히 알 수 있는 내용임에도 불구하고 이 두 명제 사이의 관계를 명확히 하기 위하여 하나의 논문으로 만드는 작업을 하였다. 이 과정에서 때로는 다른 책들에 있는 이미 알려진

1) 유클리드 기하의 정의에 원의 연속원리를 포함시키기도 한다. 원의 연속원리는 다음과 같다.

한 원이 다른 원의 내부점과 외부점을 각각 포함하면 두 원은 (두 개의) 교점을 갖는다.

이 논문에서는 [13]에서와 마찬가지로 힐베르트 공리계에 평행공리만 추가한 것을 유클리드 기하라고 하기로 한다. 참고로, [5]에서는 'circular continuity principle', [6]에서는 'circle-circle intersection property' 라는 용어가 사용되었다. 우리말 문헌에서는 '원의 연속원리' [23], [18], [4], '원의 연속의 원리' [17]라는 용어가 사용되었다.

2) [23]의 정리 1.6.19와 [4]의 정리 11.1.2에서는 중립기하가 준-유클리드라는 것과 그 기하에서 평행공리가 성립하는 것이 동치라고 하였는데, 이는 중립기하의 정의에 아르키메데스의 공리를 포함시킨 데에 기인한다. 이 책 뿐만 아니라, 대부분의 우리말 문헌에서 아르키메데스의 공리에 대한 가정하에 모든 논의가 전개되고 있다. 영문으로 된 현대 문헌에서도 아르키메데스의 공리를 기본적으로 전제하고 있지 않은 것으로는 핫숀의 [6]와 [7]을 제외한 그 어떤 자료도 발견하지 못하였다.

내용에 대해서도 증명을 새롭게 구성하여 제시하기도 하였음을 밝혀둔다.

2 좌표평면기하

우리에게 익숙한 유클리드 기하는 실좌표평면기하 $\Pi_{\mathbb{R}}$ 이다. $\mathbb{R}$ 대신 임의의 수체(field) F 에 대해서 마찬가지로 좌표평면기하 Π_F 를 생각할 수 있다. 그렇지만 이러한 기하가 모두 힐베르트 기하가 되는 것은 아니며, 힐베르트 기하가 되기 위해서는 수체 F 가 특정 조건을 만족시켜야 한다.

정의 2.1: 수체 F 가 다음 성질을 만족시키는 부분집합 P 를 가지고 있을 때 F 를 **순서체*(ordered field)***라고 한다.

(i) a 와 b 가 P 의 원소이면, $a+b$ 와 ab 도 P 의 원소이다.

(ii) F 의 임의의 원소 a 에 대하여 a 는 P 의 원소이거나, $a=0$ 이거나, $-a$ 가 P 의 원소이다.

이 때 P 의 원소 a 를 양*(positive)*이라고 하며 $a>0$ 로 표시한다.

정의 2.2: F 가 순서체일 때,

(i) F 의 임의의 원소 a 에 대하여 $b^2=a^2+1$ 을 만족시키는 양의 원소 $b=b(a)\in P\subset F$ 가 존재할 때, F 를 **피타고라스 수체*(Pythagorean ordered field)***라고 한다. 이 때 $b=\sqrt{1+a^2}$ 이라고 한다.

(ii) $P\subset F$ 의 임의의 원소 a 에 대하여 $b^2=a$ 를 만족시키는 양의 원소 $b=b(a)\in P\subset F$ 가 존재할 때, F 를 **유클리드 수체*(Euclidean ordered field)***라고 한다. 이 때 $b=\sqrt{a}$ 라고 한다.

정의 2.3: 수체 F 위에서 정의된 **좌표평면기하*(the Cartesian plane)*** Π_F 의 점, 직선, 거리, 선분의 길이, 직각은 다음과 같이 정의된다:

(i) Π_F 의 점은 F^2 의 임의의 원소이다.

(ii) Π_F 의 직선은 다음 선형방정식을 만족시키는 점 (x,y) 들의 집합이다.

$$ax+by+c=0, \quad a,b,c\in F,(a,b)\neq(0,0)$$

(iii) Π_F 의 임의의 두 점 $A_1=(x_1,y_1)$ 과 $A_2=(x_2,y_2)$ 사이의 거리 $d(A_1,A_2)$ 는

$$d(A_1,A_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

이다.

(iv) Π_F 의 선분 A_1A_2 의 길이는 $d(A_1,A_2)$ 이다.

(v) 직각은 그 각을 이루는 두 반직선의 기울기의 곱이 -1인 각을 말한다.

정리 2.1: 모든 좌표평면기하는 평행공리와 피타고라스의 정리를 만족시킨다.

임의의 좌표평면기하에서 평행공리와 피타고라스의 정리가 성립하지만, 모든 좌표평면기하가 힐베르트 평면기하인 것은 아니다.

예 2.2: $\Pi_{\mathbb{Z}}$ 또는 $\Pi_{\mathbb{Q}}$에서 점 $O = (0, 0)$와 점 $A = (1, 1)$를 끝점으로 하는 선분 OA는 길이가 $\sqrt{2}$이다. 그러나 x축 위에 놓인 임의의 선분은 길이가 정수 또는 유리수이므로 길이가 $\sqrt{2}$와 같을 수 없다. 그러므로 점 O를 한 쪽 끝점으로 하여 x축 위에 놓인, 선분 AB와 합동인 선분은 존재하지 않는다. 이는 힐베르트의 합동공리에 위배되므로 $\Pi_{\mathbb{Z}}$와 $\Pi_{\mathbb{Q}}$는 힐베르트 평면기하가 아니다. 여기에서 좌표평면기하 Π_F의 두 선분 AB와 CD가 합동이라 함은 두 선분의 길이가 같다는 것으로 정의된다.

임의의 좌표평면기하 Π_F는 힐베르트의 평면 공리 중 결합 공리(incidece axioms)를 항상 만족한다. 그리고 F가 순서체이면 Π_F는 순서 공리(betweenness axioms)도 만족한다. 그렇지만 Π_F가 합동 공리(congruence axioms)를 만족시키기 위해서는 F가 피타고라스 수체라는 가정이 필요하다. 그러므로 좌표평면기하가 힐베르트 기하가 되기 위해서는 그 바탕이 되는 수체가 최소한 피타고라스 수체가 되어야 한다. 또한 내부와 외부에 어떤 다른 한 원의 점을 각각 포함하는 원이 그 다른 원과 반드시 교점이 생기기 위해서는 수체 F가 유클리드 수체라는 가정이 추가로 필요하다.

명제 2.3: 수체 F와 그 위에서 정의된 좌표평면기하 Π_F에 대하여 다음이 성립한다.

(i) F가 피타고라스 수체이면 Π_F는 힐베르트 평면(그러므로 Π_F는 유클리드 평면)이다.

(ii) F가 유클리드 수체이면 Π_F는 원의 연속원리를 만족한다.

$\mathbb{Q}$의 원소에 사칙연산 $+, -, \times, \div$ 또는 $c \mapsto \sqrt{1 + c^2}$를 유한 번 시행하여 얻은 모든 실수들의 집합을 Ω라 하면 Ω는 피타고라스 수체이다. **힐베르트 수체(Hilbert field)**라고 불리는 이 수체는 그 수체 위에서 정의된 좌표평면기하가 힐베르트 평면이 되는 가장 작은 수체이다.

$\mathbb{Q}$의 원소에 사칙연산 $+, -, \times, \div$ 또는 $c > 0 \;\mapsto \sqrt{c}$를 유한 번 시행하여 얻은 모든 실수들의 집합을 K라 하면 K는 유클리드 수체이다. **작도가능 수체(Constructible field)**라 불리는 이 수체는 그 수체 위에서 정의된 좌표평면기하에서는 자와 컴파스로 작도할 수 있는 가장 작은 수체이다.

3 평행공리는 피타고라스의 정리의 충분조건이다.

유클리드의 원론에 있는 명제 I.47이 피타고라스의 정리로 그 증명은 수백여 가지에 달한다. 그 중 힐베르트에 의해서 증명된 다음 정리가 피타고라스의 정리와 평행공리 사이의 관계를

가장 잘 설명해주는 것이라 생각된다.

정리 3.1: 평행공리가 성립하는 임의의 힐베르트 기하는 피타고라스 수체*(Pythagorean ordered field)*[3)] 위에서 정의된 좌표평면기하*(Cartesian plane)*와 동일하다*(isomorphic)*.[4)]

힐베르트는 이 정리의 증명에 원의 연속원리나 아르키메데스의 공리 등 다른 어떠한 가정을 전혀 하지 않았다. 위 정리의 증명은 힐베르트의 명저『The Foundations of Geometry』에 잘 설명되어 있는데, 그는 주어진 힐베르트 기하가 평행공리를 만족시키면 선분들 사이에 합과 곱을 정의할 수 있으며, 이 정의에 의하여 모든 선분들을 양수로 갖는 피타고라스 수체(field)가 존재하며, 그 수체 위에서 정의된 좌표평면기하와 원래의 힐베르트 기하가 동일함을 증명하였다. 이 과정을 좀 더 쉬운 현대적인 언어로 설명한 책으로 핫숀의『Geometry: Euclid and beyond』가 있다. ([6]의 정리 21.1 참조)

이제 정리 2.1과 정리 3.1로부터 다음을 얻는다.

따름정리 3.2: 평행공리가 성립하는 힐베르트 평면에서는 피타고라스의 정리가 성립한다.

4 아르키메데스 기하

다음 공리가 성립하는 평면기하는 아르키메데스 기하 (Archimedean geometry)라고 불린다.

> (아르키메데스의 공리) 임의의 두 선분 AB와 CD에 대하여 $nAB > CD$인 자연수 n이 존재한다.

이 절에서는 아르키메데스의 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 평행공리와 피타고라스의 정리가 동치임을 볼 것이다. 평행공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 피타고라스의 정리가 당연히 성립하므로 다음 정리를 보이면 된다.

정리 4.1: 피타고라스의 정리가 성립하는 아르키메데스 힐베르트 평면에서는 평행공리가 성립한다.

피타고라스의 정리로부터 평행공리를 도출해내는 많은 증명들이 있지만, 그 증명 과정에서

---

3) 수체 F의 임의의 원소 a에 대하여 $\sqrt{1+a^2}$이 존재할 때, F는 피타고라스 수체라 불린다. 예를 들어 실수 집합 $\mathbb{R}$은 피타고라스 수체이지만, 유리수 집합 $\mathbb{Q}$는 피타고라스 수체가 아니다.

4) 이 정리가 평행공리를 만족시키는 모든 힐베르트 기하가 $\Pi_{\mathbb{R}}$임을 의미하지는 않는다. 다음 데데킨트 공리 (Dedekind's axiom)가 추가로 있어야만 $\Pi_{\mathbb{R}}$이라는 결론을 내릴 수 있다.

> 직선 위의 점들이 공집합이 아닌 두 개의 부분 집합 S와 T로 나뉘고, S의 어떤 점도 T의 두 점 사이에 있지 않고, T의 어떤 점도 S의 두 점 사이에 있지 않을 때, 유일한 점 P가 그 기하에 존재하여 $A \in S, B \in T$이면 $A = P$이거나 $B = P$이거나 P가 A와 B 사이에 있다.

데데킨트 공리는 아르키메데스의 공리보다 훨씬 강한 공리로 아르키메데스의 공리만 만족시키는 경우에는 평행공리를 만족시키더라도 그 힐베르트 기하가 $\Pi_{\mathbb{R}}$이 아닌 부분 수체 위에서 정의된 좌표평면기하일 수 있다. 예를 들어 Π_{Ω}가 그러하다.

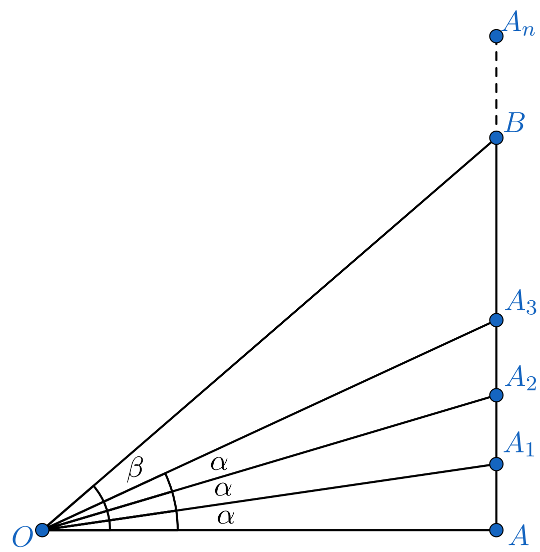

Figure 1. Angles in an Archimedean geometry

는 다음 명제, 또는 이에 동등한 명제가 필요하다.

> 주어진 직선 l 밖의 임의의 한 점을 지나 주어진 각 보다 더 작은 각으로 l을 만나는 직선이 존재한다.

이를 보이기 위해선 임의의 각 α를 유한 번 이등분하여 임의의 다른 각 β 보다 더 작게 만들 수 있다는 사실이 필요하다. 그렇지만 이는 아르키메데스 기하라는 가정하에서만 참이다.

도움정리 4.2 ([6]의 Lemma 35.1)**:** 아르키메데스 힐베르트 평면에서는 주어진 임의의 두 각 α, β에 대하여 $n\alpha > \beta$인 자연수 n이 존재한다.

증명. 임의의 힐베르트 기하에서 각을 이등분할 수 있으므로 (유클리드 명제 I.9[5]) 우리는 β가 예각이라고 가정할 수 있다. 그러므로 각 β를 이루는 한 쪽 반직선 위의 한 점에서 다른 쪽 반직선에 수선을 내려[6] 직각삼각형을 만들 수 있다. (이 수선의 발이 반직선의 반대쪽 편에 있지 않음은 '삼각형의 두 각의 합은 두 직각 보다 작다'[7] 는 사실로부터 알 수 있다.) 이제 꼭지점 O에서의 각이 β고 꼭지점 A에서의 각이 직각인 직각삼각형 OAB를 생각하자.

임의의 힐베르트 기하의 삼각형에서 '외각이 내대각보다 크다' 는 사실과 '큰 각에 대응하는

5) 유클리드의 ' 원론 '에 있는 명제 I.1부터 I.28 중에서 I.1과 I.22를 제외한 26개의 명제는 모든 힐베르트 평면에서 성립한다. 즉 평행공리의 가정이 필요하지 않다.

6) 유클리드 명제 I.12

7) 유클리드 명제 I.17

변의 길이가 더 길다' 는 사실을 이용하여 (유클리드 명제 I.16과 I.19) 그림 1에서 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$AA_1 < A_1A_2 < A_2A_3 < \cdots$$

그런데 아르키메데스의 공리로부터 $nAA_1 > AB$ 인 자연수 n 이 존재하므로

$$AA_n = AA_1 + A_1A_2 + A_{n-1}A_n > nAA_1 > AB$$

이고, 이로부터 $n\alpha > \beta$가 성립한다. □

정리 4.1의 증명은 §6에서 보게 될 것이다.

5 비-아르키메데스 기하

우리는 앞 절에서 아르키메데스의 공리를 만족시키는 힐베르트 평면에서는 피타고라스의 정리와 평행공리가 서로 동치임을 보았다. 그러나 비-아르키메데스 힐베르트 평면 중에는 피타고라스의 정리는 성립하지만 평행공리가 성립하지 않는 기하가 존재한다. 이 절에서는 그러한 힐베르트 평면 기하의 예들을 살펴본다. 이 예들은 [6]의 18장에 소개된 기하들이다.

유리함수들의 집합 $F = \mathbb{R}(t)$ 에 다음과 같이 순서를 주면 비-아르키메데스 수체 (Non-archimedean ordered field)가 된다. 우선 다음 집합의 원소 ϕ를 양이라 정의하고 $\phi > 0$ 으로 표시한다.

$$P = \{\phi \in F \,|\, \text{충분히 큰 모든 양의 실수 } b\text{에 대하여 } \phi(b) > 0\}$$

F 의 두 원소 ϕ_1 과 ϕ_2 가 $\phi_1 - \phi_2 > 0$을 만족시키면 $\phi_1 > \phi_2$ 로 정의한다.

위 정의에 의해 임의의 정수 n에 대하여 $t > n$이며 또한 다음이 성립한다.

$$\cdots < -2t^3 < -t + 2 < 0 < 1 < 2 < \cdots < t < t + 1 < t^2 < \cdots$$

1을 유한 번 더해서 t보다 더 커질 수 없으므로 F는 비-아르키메데스 수체이다.

정의 5.1: F 의 원소 a에 대하여 $-n < a < n$을 만족시키는 정수 n이 존재하면 우리는 a가 **유계이다 *(finitely bounded)***라고 하고, 그러한 정수가 존재하지 않을 때 **무한히 크다 *(infinite)***라고 한다. 그리고 임의의 자연수 n에 대하여 $-1/n < a < 1/n$을 만족시키는 a는 **무한히 작다 *(infinitesimal)***라고 하며, 유계이지만 무한히 작지는 않은 수는 **유한하다 *(finite)***라고 한다.

예를 들어, $\frac{1}{t}$는 유계인 F의 원소로서 무한히 작고, 3은 유계인 F의 원소로서 무한히 작지는 않으므로 유한한 수이다. 그리고 t는 무한히 큰 F의 원소이다. F의 두 수 a와 b가 다른 유형일 때에는 아르키메데스의 공리가 성립하지 않는다. 그리고 a와 b가 모두 무한히 작은 원소이거나, 둘 다 유한 원소일 경우에는 아르키메데스의 공리가 성립하며, 둘 다 무한히 큰 원소일 경우에는 아르키메데스의 공리가 성립하지 않을 수 있다. 예를 들어, t와 $2t$에 대해서는 아르키메데스의 공리가 성립하며, t와 t^2에 대해서는 아르키메데스의 공리가 성립하지 않는다.

이제 비-아르키메데스 기하를 살펴 보자. 앞에서 정의한 수체 F는 피타고라스 수체 가 아니므로 F 위에서 정의된 좌표평면기하 Π_F는 힐베르트 기하라고 할 수 없다. 그렇지만 F의 원소에 사칙연산 $+, -, \times, \div$과 $c \mapsto \sqrt{1+c^2}$을 유한 번 시행하여 얻은 임의의 연속함수들의 집합을 Ω라 하면 Ω는 피타고라스 수체이다. 마찬가지로 F의 원소에 사칙연산 $+, -, \times, \div$과 $c > 0 \mapsto \sqrt{c}$을 유한 번 시행하여 얻은 임의의 연속함수들의 집합을 Ω'이라 하면 Ω'은 유클리드 수체다. 그러므로 수체 Ω와 Ω' 위에서 정의된 좌표평면기하를 각각 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$이라 하면 다음이 성립한다.

명제 5.1: Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$은 힐베르트 평면기하이며 다음이 성립한다.

(i) Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$은 비-아르키메데스 기하다.

(ii) Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$은 평행공리를 만족시킨다.

(iii) Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$은 피타고라스의 정리를 만족시킨다.

(iv) $\Pi_{\Omega'}$은 원의 연속원리를 만족시킨다.

증명. 임의의 좌표평면기하는 평행공리와 피타고라스의 정리를 만족시킨다. 또한 (비-)아르키메데스 수체 위에서 정의된 좌표평면기하는 (비-)아르키메데스 기하이고, 피타고라스 수체 위에서 정의된 좌표평면기하는 힐베르트 기하, 유클리드 수체 위에서 정의된 좌표평면기하는 원의 연속원리를 만족시키는 유클리드 기하이다. (명제 2.3 참조.) □

여기에서 우리는 비-아르키메데스 기하 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$에서는 도움정리 4.2가 성립하지 않음을 다음과 같이 확인할 수 있다. 원점을 O, $(1,0)$을 점 A, $(1,t)$를 점 B라 하고 임의의 자연수 k에 대하여 $(1,k)$를 점 A_k라 하면,

$$AA_1 < A_1A_2 < A_2A_3 < \cdots$$

은 여전히 성립하지만, 어떤 자연수 n에 대해서도 $n < t$이므로 $nAA_1 > AB$인 자연수 n이 존재하지 않는다. 그러므로 $n\alpha > \beta$인 자연수 n은 존재하지 않는다. (그림 2 참조.)

이제 Π와 Π'을 각각 원점으로부터의 거리가 유계인 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$의 원소들로 이루어진 집합이라고 하면, Π와 Π'은 다음 성질을 갖는 비-아르키메데스 힐베르트 기하가 된다.

명제 5.2: Π와 Π'은 힐베르트 평면기하이며 다음이 성립한다.

(i) Π와 Π'은 비-아르키메데스 기하다.

(ii) 임의의 삼각형의 내각의 합은 두 직각이다.

(iii) 선분 AB가 존재하여 임의의 선분 CD에 대하여 $nAB > CD$인 자연수 n이 존재한다.

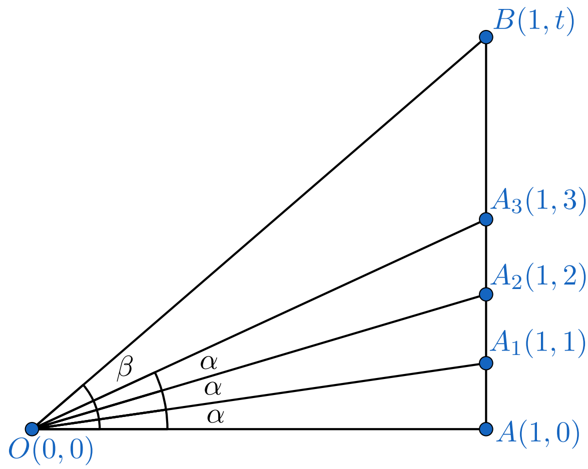

Figure 2. Angles in a Non-Archimedean geometry

(iv) Π와 Π'은 피타고라스의 정리를 만족시킨다.

(v) Π와 Π'은 평행공리를 만족시키지 않는다.

증명. (i) 임의의 n에 대하여 $n\frac{1}{t} = \frac{n}{t} < 1$이므로 Π와 Π'이 비-아르키메데스 기하임은 명백하다. 즉, 길이가 1인 선분은 길이가 $\frac{1}{t}$인 선분 유한개로 덮을 수 없다.

(ii) Π와 Π'의 임의의 삼각형은 각각 유클리드 기하 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$의 삼각형이므로 내각의 합은 두 직각이다.[8)]

(iii) 길이가 1인 선분을 AB로 택하면 된다. 즉, Π와 Π'의 임의의 선분 CD에 대하여, 점 C와 점 D가 원점으로부터 유계인 거리에 있으므로 선분 CD 길이 $\mathrm{d}(C,D)$는 유계이다. 그러므로 $0 < \mathrm{d}(C,D) < n$인 정수 n이 존재한다. 그러므로

$$0 < \mathrm{d}(C,D) < n = n\mathrm{d}(A,B)$$

이고, 이는 $CD < nAB$가 성립함을 의미한다.

(iv) Π와 Π'의 임의의 직각삼각형은 각각 유클리드 기하 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$의 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리가 성립한다. (정리 2.1 참조.)

8) 유클리드의 원론에 있는 명제 I.32 '삼각형의 내각의 합은 두 직각이다'는 평행공리를 만족시키는 임의의 힐베르트 기하, 즉 유클리드 기하에서는 항상 성립한다.

(v) 임의의 실수 $k \neq 0$에 대하여 직선 $y = (3 + \frac{k}{t})x + 5$는 모두 점 $(0, 5)$를 지나며 직선 $y = 3x$와 평행하므로[9] Π와 Π' 에서는 평행공리가 성립하지 않는다.

□

위 정리에서 세 번째 성질 (iii)을 갖는 평면기하를 핫숀은 **유계 기하(finitely bounded geometry)**라고 명명하였다. 유계 기하에서는 임의의 선분의 유한개의 합으로 임의의 다른 선분보다 크게 할 수는 없지만, 어떤 특정 선분이 있어서 그 선분의 유한개의 합으로 임의의 다른 선분보다 크게 할 수 있다. 그러므로 이러한 유계 기하는 아르키메데스 기하를 포함하는 조금 더 일반적인 기하로, 아르키메데스 기하이거나 아르키메데스 기하에 가까운 기하인 것이다. 이 정의에 의하면, Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$ 은 유계 기하가 아니지만, Π와 Π' 은 유계 기하임을 알 수 있다.

Π_1과 Π_1' 을 원점으로부터의 거리가 무한히 작은 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$ 의 원소들로 이루어진 집합이라고 하면, Π와 Π'과 같이 정리 5.3의 (iii)을 제외한 네 가지 성질을 모두 갖는 비-아르키메데스 힐베르트 평면임을 알 수 있다. 그렇지만 Π_1과 Π_1'은 (iii)을 만족시키지 않으므로 유계 기하가 아니다. 그러므로 Π, Π'과는 동일(isomorphic)하지 않은 힐베르트 기하임을 알 수 있다.

명제 5.3: Π_1과 Π_1'은 힐베르트 평면기하이며 다음이 성립한다.

(i) Π_1과 Π_1'은 비-아르키메데스 기하다.

(ii) 임의의 삼각형의 내각의 합은 두 직각이다.

(iii) Π_1과 Π_1'은 유계 기하가 아니다. 즉, 임의의 선분 CD에 대하여 $nAB > CD$인 자연수 n이 존재하는 선분 AB가 존재하지 않는다.

(iv) Π_1과 Π_1'은 피타고라스의 정리를 만족시킨다.

(v) Π_1과 Π_1'은 평행공리를 만족시키지 않는다.

지금까지 우리는 피타고라스의 정리는 성립하지만 평행공리는 성립하지 않는 네 개의 비-아르키메데스 기하 Π, Π', Π_1, Π_1'을 보았다. 그런데 이 기하들은 모두 비록 평행공리는 만족시키지 않지만 유클리드 기하와 매우 비슷한 성질을 여전히 가지고 있다. 즉, 임의의 삼각형의 내각의 합은 두 직각이다. 다음 절에서 우리는 이 성질이 사실은 피타고라스의 정리와 동등한 성질임을 보게 될 것이다.

6 준-유클리드 기하

이 절에서는 유클리드 기하에서 성립하는 성질 중의 하나인 '삼각형의 내각의 합은 두 직각이다'를 만족시키는 평면기하에 대하여 알아보고, 피타고라스의 정리가 성립하는 힐베르트 기하는

9) 두 직선의 교점 $(-\frac{5}{k}t, -\frac{15}{k}t)$은 Π_Ω와 $\Pi_{\Omega'}$ 에는 있지만 Π와 Π' 에는 없다.

항상 이러한 기하임을 살펴본다. 또한, 이러한 성질을 만족시키는 모든 힐베르트 기하에서는 항상 피타고라스의 정리가 성립함을 살펴본다.

정의 6.1: 임의의 삼각형의 내각의 합이 두 직각인 힐베르트 기하를 우리는 **준-유클리드 기하 *(semi-Euclidean geometry)*** 라고 한다.

다음은 Saccheri에 의해서 증명된 잘 알려진 정리이다.

도움정리 6.1 ([6]의 Theorem 34.7)**:** 힐베르트 기하에서 다음은 동치이다.

(i) 내각의 합이 두 직각인 삼각형이 존재한다.

(ii) 임의의 삼각형의 내각의 합이 두 직각이다.

정리 6.2: 피타고라스의 정리가 성립하는 힐베르트 기하는 준-유클리드 기하이다.

증명. Π가 피타고라스의 정리가 성립하는 힐베르트 기하이고, ABC는 Π의 한 직각삼각형이라 하자. (그림 3 참조.) 직각인 꼭지점 C에서 빗변 AB에 수선 CF를 내린 후,[10] 세 직각삼각형에 각각 피타고라스의 정리를 사용하여, 삼각형 AFC, CFB, ACB의 대응하는 변의 비가 일정함을 보일 수 있다. 즉,

$$a^2 + b^2 = c^2 = (x + y)^2, \quad x^2 + h^2 = b^2, \quad h^2 + y^2 = a^2$$

으로부터

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{h} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{y}{a}$$

이 도출된다.

평행공리가 성립하는 유클리드 기하에서는 이러한 두 삼각형은 서로 닮은꼴 삼각형이므로 대응하는 각의 크기가 각각 같게 된다. 그러나 우리는 평행공리의 성립 여부를 모르는 힐베르트 기하에서 생각하여야 하므로 그와 같은 결론을 내릴 수 없다. 그렇지만 주어진 삼각형이 이등변 삼각형인 경우에 대해서는 대응하는 각이 같음을 다음과 같이 증명할 수 있다. $a = b$라면, $x = h = y$가 성립하여 삼각형 AFC와 삼각형 CFB도 이등변 삼각형이고, 또한 삼각형 AFC와 삼각형 CFB는 합동이다. 그런데 이등변 삼각형의 밑각은 합동이므로[11] 각 FAC, 각 FCA, 각 FBC, 각 BCF가 모두 합동이다. 그러므로 이등변 직각삼각형 ABC의 내각의 합은 두 직각이 된다. 도움정리 6.1에 의하여 우리는 임의의 삼각형의 내각의 합이 두 직각임을 알 수 있으므로 주어진 힐베르트 기하 Π는 준-유클리드 기하임이 증명되었다. □

도움 정리 4.2를 이용하면 다음을 증명할 수 있으며, 이 정리와 정리 6.2로부터 앞에서 소개한 정리 4.1을 얻는다.

10) 유클리드 명제 I.11에 의하여 F를 항상 찾을 수 있다.
11) 유클리드 명제 I.7

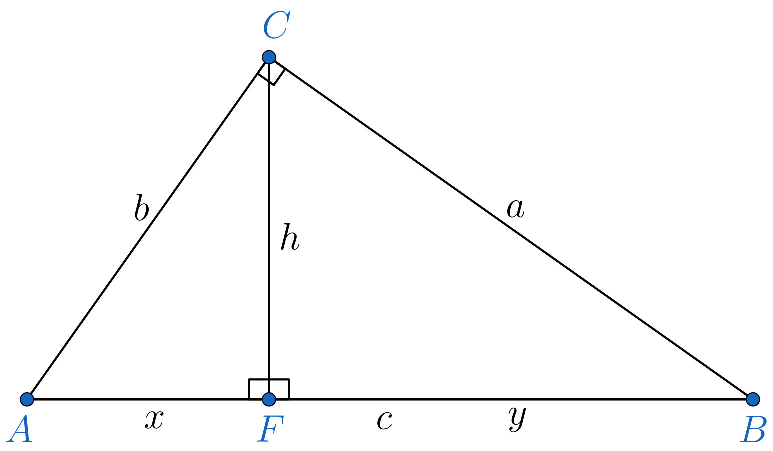

Figure 3. A right triangle in a Hilbert plane

정리 6.3 ([6] **의** Proposition 35.4)**:** 아르키메데스의 공리가 성립하는 준-유클리드 힐베르트 기하에서는 평행공리가 성립한다.

그런데 우리는 앞에서 아르키메데스의 공리가 성립하지 않는 준-유클리드 힐베르트 기하에서는 평행공리가 성립하지 않을 수 있음을 구체적인 예를 통하여 보았다. 이 예들은 모두 피타고라스의 정리는 성립하지만 평행공리가 성립하지 않는 기하들로서 따름정리 3.2의 역에 대한 반례들이다. 그러나 정리 6.2의 역은 여전히 성립한다. 이를 보기 위하여 다음 정의를 먼저 알아보자.

정의 6.2 ([6])**:** 힐베르트 기하 Π_1 이 또 다른 힐베르트 기하 Π_2 의 부분집합이고 Π_1 의 임의의 직선은 Π_2 의 어떤 직선과 Π_1 의 교집합이고, Π_1 의 모든 합동 관계와 순서 관계 등이 Π_2 로부터 온 것일 때, Π_1 은 Π_2 의 **완전부분평면** ***(full subplane)***[12)]이라 불린다.

예 6.4: (i) Π 와 Π_1 은 Π_Ω 의 완전부분평면이고, Π' 과 Π'_1 은 $\Pi_{\Omega'}$ 의 완전부분평면이다.

(ii) 아르키메데스 힐베르트 평면은 자신보다 작은 완전부분평면을 갖지 않는다*([6, Corollary 43.6]).* 그러므로 §2에서 소개한 힐베르트 수체와 작도가능 수체 위에서 정의된 좌표평면 기하는 $\Pi_\mathbb{R}$ 의 부분집합이지만 완전부분평면은 아니다.

힐베르트 평면을 분류한 Pejas의 논문 [21]에 의하면, 모든 준-유클리드 힐베르트 평면은 어떤 피타고라스 수체 F 위에서 정의된 좌표평면기하 Π_F 의 완전부분평면으로 나타난다. 그러므로 우리는 다음 정리를 얻는다.

12) [8]에서 사용한 용어를 차용하였다.

정리 6.5: 준-유클리드 힐베르트 평면은 피타고라스의 정리를 만족시킨다.

증명. 모든 준-유클리드 힐베르트 평면 Π는 어떤 좌표평면기하 Π_F의 완전부분평면으로 나타난다. 그러므로 Π의 임의의 삼각형은 Π_F의 삼각형이고 Π_F에서 피타고라스의 정리가 성립하므로 Π에서도 피타고라스의 정리가 성립한다. □

위 정리는 2003년 원의 연속원리의 가정하에 핫숀에 의하여 증명되었다.([7]의 Theorem 4.) 그렇지만 사실상 핫숀은 이 정리의 증명에 Pejas의 결과를 사용하였다. [13)]

7 결론

우리는 지금까지 힐베르트 기하의 구체적인 모델을 통하여 피타고라스의 정리와 평행공리 사이의 관계를 살펴 보았다. 그 내용을 요약하면 다음과 같다:

$$\begin{tikzcd} & (\text{평행공리}) \arrow[dl, Rightarrow] & \\ (\text{피타고라스의 정리}) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (\text{준-유클리드}) \arrow[ul, Rightarrow, "(\text{아르키메데스의 공리})"'] \end{tikzcd}$$

즉, 아르키메데스의 공리가 성립하는 힐베르트 평면에서는 평행공리, 피타고라스의 정리, 그리고 그 기하가 준-유클리드라는 성질이 모두 동치이지만, 비-아르키메데스 힐베르트 평면에서는

$$(\text{평행공리}) \not\rightleftarrows (\text{준-유클리드}) \Longleftrightarrow (\text{피타고라스의 정리})$$

이며, 평행공리가 성립하지 않는 준-유클리드 비-아르키메데스 힐베르트 기하가 존재한다.

힐베르트의 공리계는 이미 그 자체로도 큰 의미를 갖지만 단순히 수학사의 한 단계로서만이 아니라 피타고라스의 정리를 비롯하여 기하의 여러 명제들의 의미를 다양한 각도에서 분석하게 해 주고 그 본질에 다가갈 수 있는 길을 제시한다는 점에서 여전히 연구할 가치가 충분하고, 또한 현대 수학교육의 중요한 소재라 할 수 있다.

References

1. David E. Dobbs, A single instance of the Pythagorean theorem implies the parallel postulate, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.* 33(4) (2002), 596–600.
2. Euclid, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Vols. 1,2,3, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

13) 핫숀은 다음 유클리드 명제 III.36을 먼저 비-유클리드 평면에 일반화시키고, 이를 이용하여 준-유클리드 평면에서 피타고라스의 정리를 증명하였다.

(유클리드 명제 III.36) 주어진 원 밖의 한 점 P와 이 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여, 직선 PA이 원에 접하고, 직선 PB와 직선 PC가 같을 때 다음이 성립한다.

$$PA^2 = PB \times PC$$

3. H. Eves, *An introduction to the History of Mathematics*, Rinehart, New York, 1953.
4. M. J. Greenberg, (Translation in Korean by Lee, Woo Young), *Euclidean and Non-Euclidean geometries*, Kyung Moon Sa, 1997. M. J. Greenberg, 이우영 역, 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학, 경문사, 2013.
5. M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries : Development and History*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
6. Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
7. Robin Hartshorne, Non-Euclidean III.36, *The American Mathematical Monthly* 110(6) (Jun/Jul 2003), 495–502.
8. R. Hartshorne (難破 誠 번역), 幾何学I, II, 現代数学から見たユークリッド原論, 丸善出版株式会社, 2012.
9. T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*, 2nd ed., 3 vols, Cambridge University Press, 1926(Dover reprint 1956).
10. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 2nd English Edition, Authorized translated by Leo Unger from the 10th German Edition, Revised and Enlarged by Dr. Paul Bernays, The open court publishing company, 1971.
11. K. Jo, A historical study of de Zolt's axiom, *The Korean Journal for History of Mathematics* 30(5) (2017), 261–287.
12. K. Jo, S.-D. Yang, Moulton Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 29(3) (2016), 191–216.
13. K. Jo, S.-D. Yang, Pythagorean Theorem I : In non-Hilbert Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 31(6) (2018), 315–337.
14. R. Kaya, Area formula for Taxicab triangle, *ΠME Journal* 12(4) (2006), 219–220.
15. R. Kaya, H. B. Colakoglu, Taxicab versions of some Euclidean theorems, *Int. J. Pure Allo. Math.* 26(1) (2006), 69–81.
16. İ. Kocayusufoğlu, E. Özdamar, Isometries of Taxicab geometry, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series Al* 47 (1998), 73–83.
17. Lee Jong Woo, *Historical Backgrounds and Developments of Geometries*, Kyung Moon Sa, 1997. 이종우 편저, 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사, 1997.
18. Lee Nany, *Euclidean Geometry and Beyond*, Kyo Woo Sa, 2018. 이난이, 유클리드 기하와 그 너머, 교우사, 2018.
19. E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series.*, National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
20. Paolo Maraner, A Spherical Pythagorean Theorem, *The Mathematical intelligencer* 32(3) (2010), 46–50.
21. W. Pejas, Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie, *Math. Annalen*143 (1961), 212–235.
22. K. P. Thompson, The nature of length, area, and volume in Taxicab geometry, *Int. Electron. J. Geom.* 4(2) (2011), 193–207.
23. Yun Gabjin, *Geometry*, Kyo Woo Sa, 2009. 윤갑진, 기하학, 교우사, 2009.

24. https://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/PTimpliesPP.shtml