

# 다중플립 오류정정을 위한 새로운 QECCs

박동영\* · 김백기\*\*

## New QECCs for Multiple Flip Error Correction

Dong-Young Park\* · Baek-Ki Kim\*\*

### 요약

본 논문은 CNOT 게이트만을 사용해 모든 다중비트플립 오류들로부터 표적큐비트를 완벽하게 보호할 수 있는 새로운 5-큐비트 다중비트플립코드를 제안하였다. 제안한 다중비트플립코드는 기존의 단일비트플립코드에서와 같이 근원오류부에 Hadamard 게이트 쌍들을 임베딩 할 경우에 쉽게 다중위상플립코드로 확장될 수 있다. 본 논문의 다중비트플립코드와 다중위상플립코드는 4 개 보조큐비트들에 의한 상태벡터 오류정보를 공유한다. 이 4-큐비트 상태벡터들은 Pauli X와 Z 정정이 수반되는 모든 다중플립오류들이 특정 근원오류를 공통으로 포함하는 특성을 반영한다. 이 특성을 이용해 본 논문은 Pauli X와 Z 근원오류의 검출과 정정을 단 3 개의 CNOT 게이트로 배치 처리함으로써 다중플립 오류정정을 위한 QECC 설계에도 불구하고 저비용 실현이 가능함을 보였다. 본 논문이 제안한 5-큐비트 다중비트플립코드와 다중위상플립코드는 100% 오류정정율과 50% 오류판별율 특성을 보였다. 이 논문에 제시된 모든 QECC는 QCAD 시뮬레이터를 사용해 검증되었다.

### ABSTRACT

In this paper, we propose a new five-qubit multiple bit flip code that can completely protect the target qubit from all multiple bit flip errors using only CNOT gates. The proposed multiple bit flip codes can be easily extended to multiple phase flip codes by embedding Hadamard gate pairs in the root error section as in conventional single bit flip code. The multiple bit flip code and multiple phase flip code in this paper share the state vector error information by four auxiliary qubits. These four-qubit state vectors reflect the characteristic that all the multiple flip errors with Pauli X and Z corrections commonly include a specific root error. Using this feature, this paper shows that low-cost implementation is possible despite the QECC design for multiple-flip error correction by batch processing the detection and correction of Pauli X and Z root errors with only three CNOT gates. The five-qubit multiple bit flip code and multiple phase flip code proposed in this paper have 100% error correction rate and 50% error discrimination rate. All QECCs presented in this paper were verified using QCAD simulator.

### 키워드

5-Qubit Multiple Bit Flip Code, 5-Qubit Multiple Phase Flip Code, QECC, Pauli X and Z corrections, QCAD Simulator  
5-큐비트 다중 비트 플립 코드, 5-큐비트 다중 위상 플립 코드, 양자 오류 정정 코드, 파울리 X 및 Z 정정, 큐캐드 시뮬레이터

\* 강릉원주대학교 정보통신공학과(kouksundo@gwnu.ac.kr) • Received : Aug. 19, 2019, Revised : Sep. 22, 2019, Accepted : Oct. 15, 2019  
\*\* 교신저자 : 강릉원주대학교 정보통신공학과 • Corresponding Author : Baek-Ki Kim  
• 접수일 : 2019. 08. 19 Dept. of Information and Telecommunication Eng., Gangneung-Wonju National University  
• 수정완료일 : 2019. 09. 22 Email : kouksundo@gwnu.ac.kr (1st Author)  
• 게재확정일 : 2019. 10. 15 bkkim@gwnu.ac.kr (Corresponding Author)

## 1. 서론

양자는 결맞음(coherence) 시간이 극히 짧고 외부 환경 교란에 매우 취약해서 큐비트(qubit, quantum bit)의 정보처리와 전송 과정에서 오류가 발생할 확률이 매우 높다. 큐비트 오류를 정정하기 위해 물리적 측정을 하면 큐비트의 중첩상태가 고유기저 중의 한 상태로 붕괴하는 양자 성질 때문에 양자오류정정은 물리적 측정 없이 자동오류정정이 가능해야 한다. 그동안 양자오류정정을 위해 많은 연구와 방법이 제안 되어왔지만 본 논문은 얽힘이란 양자의 고유성질을 이용한 오류정정기술 분야로 연구범위를 국한하기로 한다. 얽힘 상태를 이용하는 양자오류정정 기술에는 다양한 방법들이 있다[1-8]. 그 대표적 기술은 P.W. Shor[1]에 의해 제안된 Shor 코드이다[1,2]. Shor 코드는 세 개의 비트플립(bit flip) 코드[3]과 한 개의 위상플립(phase flip) 코드[4]를 병합하여 단일비트플립, 단일위상플립 및 이들의 조합을 100% 정정한다. R. Laflamme[5]는 환경과의 상호 작용에 의해 야기 될 수 있는 1-큐비트 오류로부터 1-큐비트 정보를 보호 하기 위한 최소 5-큐비트 양자 오류정정 코드를 제시 하였다. 이 코드는 4개 보조큐비트의 16개 상태벡터로 표적 큐비트의 오염 상태를 Pauli 연산자로 나타냄으로써 Pauli의 X,Y,Z 단일 오류로 오염된 표적 큐비트를 4비트의 보조큐비트 상태벡터로 복구한다. T.C.Ralph[6]은 이중 얽힘 상태에서 보조 큐비트와 2 단 종속 CNOT 연산으로 세 개의 큐비트 중에서 한 개 큐비트의 불일치(decoherence)를 정정할 수 있는 간단한 양자오류 정정 기술을 선형 광(linear optics)으로 실현하였다. G.J.Milburn[7]은 투사측정(projective measurement)과 제어 단일게이트(controlled unitary gate)와 같은 양자오류 정정의 표준 도구를 사용하지 않고 미지의 양자상태를 오류로부터 보호하는 방법으로서 피드백과 약한 측정(weak measurement)을 사용하였다. R. Anitha[8]은 NOT 게이트와 3MCT(multiple controlled Toffoli) 게이트를 사용하여 단일비트플립 오류를 정정할 수 있는 QEC(Quantum Error Correction) 엔코더와 디코더를 제시 하고 QCAD 시뮬레이터[9]로 모의실험을 실시하였다. 본 논문의 연구목적은 기존의 단일 QEC 기술을 연구 하여 새로운 다중 QEC 코드를 개발하는데 있다. 본

논문이 제안하는 QECC는 사고실험과 QCAD 시뮬레이터로 검증하였다.

본 논문은 II장에서 표준화된 단일비트플립코드와 위상플립코드의 동작을 분석하였다. III장에서는 새로운 5-큐비트 다중비트플립코드를 제안하고 다중위상 플립코드로 확장하였다. IV장에서는 본 논문이 제안한 방법들을 타 방법들과 플립오류유형과 게이트비용 측면에서 비교하였다. V장은 결론으로서 본 연구가 이룩한 주요 성과를 언급하였다.

## II. 단일플립 표준 QECC

플립(flip)이란 양자 불일치에 의해 중첩상태에 있는 양자  $|\Psi\rangle$ 의 상태벡터와 위상이 뒤집히는 대표적 유형의 양자 오류이다.



그림 1. 양자 불일치

Fig. 1 Quantum decoherence

단일 양자  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  로는 그림 1과 같은 플립 오류들을 정정할 수 없으므로 보조큐비트와 CNOT 게이트를 사용한 고전적 반복 코드로 보수적(complementary) 얽힘 중첩상태의 진단코드를 생성해 오류정정을 실시한다.

정의 1. n 큐비트 QECC에서  $\forall W \in \{X, Z\}$ 에 대하여 X와 Z가 Pauli 연산자이고,  $g \in \{1, 2, \dots, m\}$  일 때  $W_g$ 은 g행의 근원적 W 플립 오류이다.

정의 2. 출력큐비트 상태벡터 표기는 우측이 LSB인 하향식 표기 ' $R_m \dots R_2 R_1$ '을 따르며, 이때 아래첨자는 행 번호이다.

예로써  $X_{1,2}$ 은 1,2행에서 발생한 다중비트플립 오류이다.

### 2.1 표준 비트플립코드

그림 2는 단일비트플립 오류를 100% 정정할 수 있는 표준 비트플립코드[3]이다.

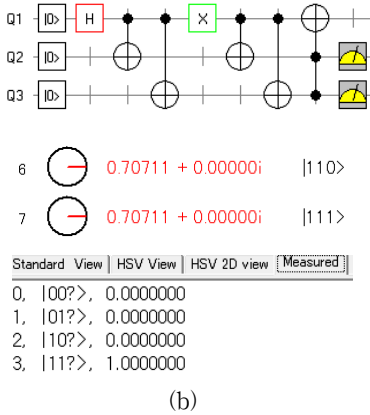
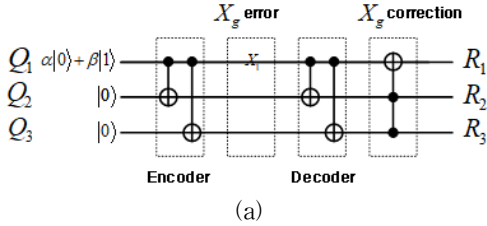


그림 2. 표준 비트플립코드 (a) 양자회로 (b) QCAD 도면과 시뮬레이션 출력

Fig. 2 Standard bit flip code (a) Quantum circuit (b) QCAD schematic and simulation outputs

표준 비트플립코드는 엔코더, 근원오류, 디코더 및 비트플립정정의 4단계로 구성되어 있다.  $Q_1$  중첩상태는 그림 2(a)의  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  과 같은 일반적 경우와 그림 2(b)처럼 H 게이트를 사용하는  $\alpha = \beta = 0.70711$ 인 특수 경우로 구분된다. 그림 2(a),(b)의 엔코더는 각각 식(1),(2)의 진단코드를 생성한다.

$$\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \tag{2}$$

식(1) 진단코드는  $X_1$ 에 의해  $\alpha|001\rangle + \beta|110\rangle$ 로 바뀌고 디코더에 의해  $\alpha|111\rangle + \beta|110\rangle$ 로 진화한다.

$X_g$  정정은  $R_3R_2 = |11\rangle$ 일 때 3MCT 게이트가 작동되어  $\alpha|111\rangle + \beta|110\rangle$ 의 표적큐비트  $R_1$ 을 반전시켜 원래 상태를 복원한다. 그림 2(b)의 QCAD 시뮬레이터[12] 출력에서 십진수 6과 7의 중첩인 식(3)의 결과는  $X_1$  비트플립에도 불구하고 표적큐비트가 원 상태로 복원되었음을 보여 준다.

$$|11\rangle = \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \tag{3}$$

그림 2(b)에서 작은 원의 반지름은 위상을 나타낸다.

### 2.2 표준 위상플립코드

그림 3은 단일위상플립 오류를 100% 정정할 수 있는 표준 위상플립코드[3]이다.

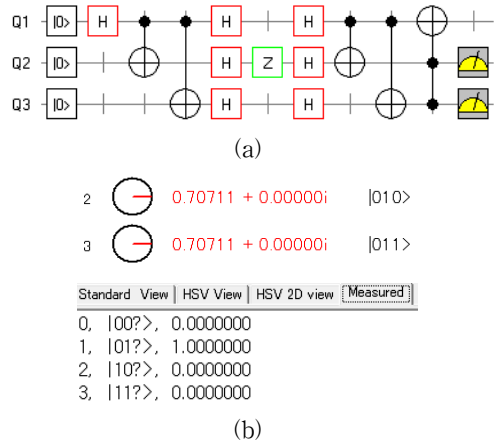


그림 3. 표준 위상플립코드 (a) QCAD 도면 (b) QCAD 시뮬레이션 출력

Fig. 3 Standard phase flip code (a) QCAD schematic (b) QCAD simulation outputs

그림 3의 표준 위상플립코드는 비트플립코드의 근원적 오류 지점에 한 쌍의 H 게이트를 내장하고 있어서 근원오류에 의한 위상플립변화를 H 변환에 의해 비트플립변화로 바꿀 수 있다. 이와 같은 H 변환 기능은 위상플립코드를 비트플립코드 체계로 동작할 수 있게 한다.  $Z_2$  위상플립을 적용한 QCAD 시뮬레이션에서 그림 3(b)은 십진수 2와 3의 중첩을 통해 보조 큐비트출력은  $|01\rangle$ 이고 표적큐비트는 원래의 중첩상

태임을 보여 준다.

$$|01\rangle > \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \tag{4}$$

중첩상태의 보조큐비트들에 대한 물리적 측정은 십진 수  $1=|01\rangle$ 이 확률 1.0000000로 측정됨을 보여 준다.

### 2.3 보조큐비트 오류정보

표 1은 표준 3-큐비트 QECC의 보조큐비트 상태벡터에 따른 오류정보이다.

표 1. 3-큐비트 QECC의 보조큐비트 상태벡터에 따른 오류정보

Table 1. Error information according to auxiliary qubit status vector of 3-qubit QECCs

$R_k R_j$	Flip error syndromes	
	Single $W_g$	Multiple $W'_g$
	corrected	impossible
$ 11\rangle$	$W_1$	$W'_{2,3}$
$ 01\rangle$	$W_2$	$W'_{1,3}$
$ 10\rangle$	$W_3$	$W'_{1,2}$
$ 00\rangle$	$W_\emptyset$	$W'_{1,2,3}$

그림 2에서 보조큐비트 상태벡터  $|11\rangle$ 은 표 1을 참조하면  $X_1$ 이 발생해 3MCT 게이트의 X 정정을 통해 표적큐비트를 원 상태로 복구했음을 알려 준다. 그림 3에서는 보조큐비트 상태벡터가  $|01\rangle$ 이므로 표 1은  $Z_2$  오류가 발생했으나 X 정정 없이 표적큐비트를 원 상태로 복구했다는 정보를 제공한다. 표 1에서 3-큐비트 QECC는 표적큐비트를 제외한 2개 보조큐비트로 표현 가능한  $2^2$ 개 상태벡터로  $2^3$ 개의 플립오류들을 표현해야 한다. 보조큐비트 상태벡터가  $R_k R_j$ 일 때  $W'_g$ 와  $W_g$ 은 보수관계의 여집합 쌍 오류들이므로  $W'_g$ 에 X 정정을 실시하면 역으로 정상출력  $W_g$ 가 반전되므로  $|11\rangle$ 에서와 같이  $|10\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|00\rangle$ 인 경우의 다중플립 오류정정을 3MCT 게이트의 종속 곱으로 실현할 수 없다. 표 1의 다중비트플립들을 정정하기 위해서는 최소한 1개 이상의 추가적 파라메타가 필요하다. 하므로 보조큐비트 추가가 요구된다.

### III. 5-큐비트 다중 QECC

이 장에서는 다중비트플립과 다중위상플립 오류정정이 가능한 새로운 다중 QECC들을 제안하였다.

정의 3. ( $b \leftarrow a$ )은 2-큐비트 순방향 CNOT 연산자로서 a와 b는 각각 제어큐비트와 표적큐비트 행 번호이다.

#### 3.1 5-큐비트 다중비트플립코드

본 논문은 3-큐비트 QECC의 문제점을 해결하기 위해 한 개의 보조큐비트를 추가하고, MCT를 쓰지 않는 그림 4와 같은 새로운 다중비트플립코드를 설계하고 동작을 분석하였다.

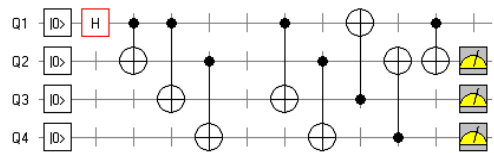


그림 4. 새로운 4-큐비트 다중비트플립코드  
Fig. 4 A new 4-qubit multiple bit flip code

그림 4에 제시된 새로운 4-큐비트 다중비트플립코드의 오류정후는 표 2와 같다.

표 2. 4-큐비트 다중비트플립코드의 오류정후  
Table 2. Error syndromes of the 4-qubit multiple bit flip code

$R_4 R_3 R_2$	Possible flip errors	
	auto corrected	Pauli X required
$ 000\rangle$	$X_\emptyset$	$X_{1,2,3,4}$
$ 001\rangle$	$X_{2,4}$	$X_{1,3}$
$ 010\rangle$	$X_1$	$X_{2,3,4}$
$ 011\rangle$	$X_{1,2,4}$	$X_3$
$ 100\rangle$	$X_2$	$X_{1,3,4}$
$ 101\rangle$	$X_4$	$X_{1,2,3}$
$ 110\rangle$	$X_{1,2}$	$X_{3,4}$
$ 111\rangle$	$X_{1,4}$	$X_{2,3}$

표 2는 3-큐비트의  $2^3$ 개 상태벡터로 4-큐비트의  $2^4$ 개 다중비트플립 오류들을 나타내고 있다. 4-큐비트 다중비트플립코드는 절반의 오류들은 자동치료하고, 나머지 절반은 추가적인 Pauli X 연산이 요구되었다. Pauli X 추가정정을 실시하기 위한 일반적 방법은 QECC 출력 단계 표 2의 세 번째 열과 같은 8 종류의 Pauli X 정정 함수를 종속 곱(cascade product)으로 삽입하는 것인데, 이것은 다수의 4MCT를 사용하여 하는 소모적 방법이다. 본 논문은 표 2에서 Pauli X 정정이 요구되는 모든 다중플립오류들이  $X_3$  오류를 공통으로 포함한다는 특성을 이용하는 새로운 오류정정 방법을 제안한다. 그것은 그림 4에  $X_3$  오류를 검출할 수 있는 보조큐비트 Q5를 추가하여 Q3 선상의 근원오류 전후 지점에서 두 개의 CNOT 게이트에 의해  $X_3$  오류를 검출하고 Q5상의  $R_5$ 에 반영한 후 코드 종단에서 표적큐비트에 대해  $2^3$  종류의 Pauli X 정정을 배치(batch)처리하는 방법이다. 그림 5는 새로운 Pauli X 배치정정 방법을 적용한 새로운 5-큐비트 다중비트플립코드이다.

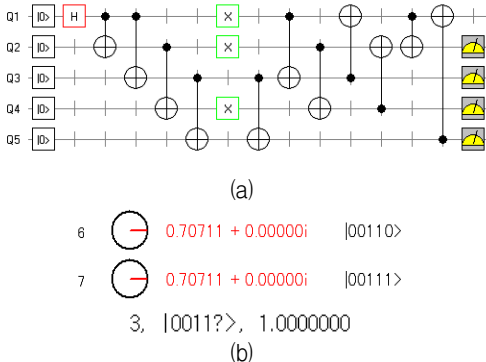


그림 5. Pauli X 배치정정이 가능한 새로운 5-큐비트 다중비트플립코드

(a) QCAD 도면, (b) 중첩과 측정 출력

Fig. 5 A new 5-qubit multiple bit flip code with Pauli X batch correction

(a) QCAD schematic, (b) superposition and measured outputs

5-큐비트 다중비트플립코드는 근원오류가 Q1~Q5의 모든 선상에서 발생할 수 있다. 이때  $X_5$ 은  $X_{1,2,3,4}$ 와 보수이므로 동시에 발생하면 상쇄된다.  $W_3$ 과  $W_5$

오류정정을 다음과 같이 정의한다.

정의 4.  $W_3$ 과  $W_5$ 의 동시 발생을 배타적 연산자 ‘ $\oplus$ ’를 이용해  $W_{3\oplus 5}$ 로 표기한다.

그림 5의 Q5 선상에서 2개의 CNOT 게이트에 의한  $X_{3\oplus 5}$  검출은 식(5)의 스칼라 연산  $R_5$ 과 같다.

$$R_5 = \langle 1|X_{3\oplus 5} \rangle \quad (5)$$

5-큐비트 다중비트플립코드의 표적큐비트  $|\psi\rangle$ 에 대한 Pauli X 배치정정 처리는 식(6)과 같은 산술 역승 연산으로 나타낼 수 있다[10-12].

$$|\psi'\rangle = X^{R_5} |\psi\rangle \quad (6)$$

그림 5의 5-큐비트 다중비트플립코드는 엔코더, 근원오류,  $X_{3\oplus 5}$  검출, 디코더, 그리고  $X_{3\oplus 5}$  배치정정의 5단계 오류정정 구조로 설계되었다. 1단계 엔코더는 우선으로 (2 $\leftarrow$ 1) 이중 얽힘을 생성한다. 계속해서 엔코더는 (3 $\leftarrow$ 1), (4 $\leftarrow$ 2), (5 $\leftarrow$ 3)의 반복 코드들에 의한 상태반복을 통해 식(7)과 같은 오류진단코드를 생성한다.

$$\alpha|00000\rangle + \beta|11111\rangle \quad (7)$$

2단계에서 근원적 다중에러들이 발생하여 에러진단 코드에 불일치가 발생한다. 3단계는  $X_{3\oplus 5}$  검출부로서 진단코드의 (5 $\leftarrow$ 3)와 짝을 이뤄 근원오류에서  $X_{3\oplus 5}$  발생을 식(5)과 같이 검출한다. 4단계는 디코더로서 (3 $\leftarrow$ 1), (4 $\leftarrow$ 2) fw 반복 코드를 통해 제어선이 1,2인 경우의 BF 변화를 표적선 3,4에 반영한다. 반대로 (3 $\rightarrow$ 1), (4 $\rightarrow$ 2)의 bw 반복 코드를 통해 제어선이 3,4인 경우의 BF 변화를 표적선 1,2에 교차 반영하여 비트플립 변화를 교차 반영한다. 그 다음에 (2 $\leftarrow$ 1)를 통해 남은 얽힘 상태를 해제한다. 5단계는 플립오류정정부로서 표적큐비트에 대해 식(6)의 Pauli X 배치정정을 실시한다.

그림 5에 보인 5-큐비트 다중비트플립코드의  $X_{1,2,4}$

오류정정에 식(7)의 일반적 오류진단코드를 적용한 사고실험은 아래와 같다.

- [1단계] 엔코더 출력 :  $(2\leftarrow 1), (3\leftarrow 1), (4\leftarrow 2), (5\leftarrow 3)$   
 $\alpha|00000\rangle + \beta|11111\rangle$
- [2단계] 근원오류  $X_{1,2,4} : \alpha|01011\rangle + \beta|10100\rangle$
- [3단계]  $X_{3\oplus 5}$  검출 :  $(5\leftarrow 3) \alpha|01011\rangle + \beta|00100\rangle$   
 $R_5 = \langle 1|X_{3\oplus 5} = 0$
- [4단계] 디코더:  
 $(3\leftarrow 1), (4\leftarrow 2) \alpha|00111\rangle + \beta|00100\rangle$   
 $(3\rightarrow 1), (4\rightarrow 2) \alpha|00110\rangle + \beta|00101\rangle$   
 얽힘 해제 :  $(2\leftarrow 1)$   
 $\alpha|00110\rangle + \beta|00111\rangle = |0011\rangle |\Psi\rangle$   
 , where  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- [5단계]  $X_{3\oplus 5}$  배치정정:  $|0011\rangle |\Psi'\rangle$   
 $|\Psi'\rangle = X^0 |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$

그림 5(b)의 중첩상태 출력은 사고실험의 Pauli X 정정 출력과 일치하며 보조큐비트 상태벡터가  $|0011\rangle$  일 때 표적큐비트는  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  의 원래 상태임을 보여 준다. 중첩상태에 대한 보조큐비트의 물리적 측정은 확률 1.0000000로  $|0011\rangle$ 이 측정되었음을 보여 준다. 이때  $|0011\rangle$ 에 대한 오류정보를 알아야 무슨 오류들이 발생했는지 알 수 있다.

표 3은 5-큐비트 다중비트플립코드의 보조큐비트 상태벡터 오류정후표이다. 표 3에서  $R_5R_4R_3R_2$ 의  $R_5$  은  $W_{3\oplus 5}$  검출을 반영하는 상태벡터이다. 위 표에서  $W_5$ 와  $W_{1,2,3,4}$ 은 보수관계의 여집합 쌍이다.  $W_3$ 과  $W_5$ 가 동시에 발생한  $W_{3\oplus 5}$ 은  $W_5$ 에 의해  $W_3$ 이 상쇄되므로  $R_5 = |0\rangle$ 이 된다. 그 결과 모든  $R_5 = |0\rangle$  은  $W_3$ 과  $W_5$  모두를 포함하고 있고, 반대로  $R_5 = |1\rangle$ 은  $W_3$ 과  $W_5$ 가 보수관계의 여집합 쌍으로 분리된 결과를 보여 준다. 5-큐비트 다중비트플립코드는 5-큐비트에서 발생 가능한  $2^5$ 개의 오류를 100% 정정할 수 있다. 표 3에서 4-큐비트 상태벡터로 5-큐비트 오류들을 나타내므로 오류판별율은 50%이다. 그림 5의  $X_{1,2,4}$  다중비트플립에 대한 QCAD 시뮬레이션 중첩상태 출력은 그림 5(b)에서 십진수 6과 7의 중첩상태로서 사고실험 결과에  $\alpha = \beta = 0.70711$ 을 적

용할 경우에 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

표 3. 5-큐비트 다중비트플립코드의 오류정후  
 Table 3. Error syndromes of the 5-qubit multiple bit flip code

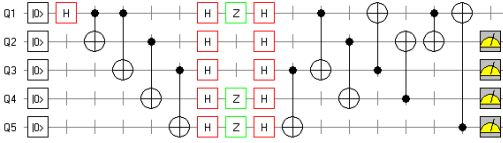
$R_5R_4R_3R_2$	Corrected possible flip errors
$ 0000\rangle$	$W_\emptyset, W_{1,2,3,4,5}$
$ 0001\rangle$	$W_{2,4}, W_{1,3,5}$
$ 0010\rangle$	$W_1, W_{2,3,4,5}$
$ 0011\rangle$	$W_{1,2,4}, W_{3,5}$
$ 0100\rangle$	$W_2, W_{1,3,4,5}$
$ 0101\rangle$	$W_4, W_{1,2,3,5}$
$ 0110\rangle$	$W_{1,2}, W_{3,4,5}$
$ 0111\rangle$	$W_{1,4}, W_{2,3,5}$
$ 1000\rangle$	$W_5, W_{1,2,3,4}$
$ 1001\rangle$	$W_{2,4,5}, W_{1,3}$
$ 1010\rangle$	$W_{1,5}, W_{2,3,4}$
$ 1011\rangle$	$W_{1,2,4,5}, W_3$
$ 1100\rangle$	$W_{2,5}, W_{1,3,4}$
$ 1101\rangle$	$W_{4,5}, W_{1,2,3}$
$ 1110\rangle$	$W_{1,2,5}, W_{3,4}$
$ 1111\rangle$	$W_{1,4,5}, W_{2,3}$

$$|0011\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

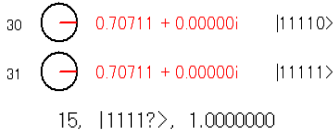
표 3은 상태벡터  $|0011\rangle$ 에서 가능한 다중비트플립 오류가  $X_{1,2,4}$ 와  $X_{3,5}$ 임을 나타낸다. 식(8)의 물리적 측정에서  $R_5R_4R_3R_2$ 은 확률 1.0000000로  $|0011\rangle$ 이 측정되었다. 이것은 식(8)의 중첩상태가 예측했던 결과인  $|0011\rangle$ 로 붕괴되었음을 의미한다. QCAD는 물리적 측정에서 식(8)의 첫 번째 표적큐비트가 제외되었음을 기호 “?”로 표시했다. 물리적 측정 결과는 상태벡터정후  $|0011\rangle$ 에 의해  $X_{1,2,4}$ 또는  $X_{3,5}$ 의 다중비트플립 오류들이 발생했지만 다중비트플립코드가 100% 오류정정을 통해 표적큐비트를 안전하게 보전했음을 보여 준다. 표 3에서  $X_5$  오류를 배제한  $X_3$  정정은 오류정정과 판정율이 모두 100%이다.

### 3.2 5-큐비트 다중위상플립코드

5-큐비트 다중위상플립코드는 5-큐비트 다중비트 플립코드의 근원오류 열에 한 쌍의 H 게이트를 5중 크로네커 곱하여 그림 6과 같이 확장할 수 있다. 5-큐비트 다중위상플립코드는 엔코더, H 변환, 근원오류, H 변환,  $Z_{3\oplus 5}$  검출, 디코더, 그리고  $Z_{3\oplus 5}$  배치정정의 7단계 오류정정 구조를 갖는다. 이때  $Z_{3\oplus 5}$  정정은 H 변환에 의해  $X_{3\oplus 5}$  정정으로 실행된다.



(a)



(b)

그림 6. 새로운 5-큐비트 다중위상플립코드

(a) QCAD 도면, (b) 중첩과 측정 출력

Fig. 6 A new 5-qubit multiple phase flip code

(a) QCAD schematic, (b) superposition and measured outputs

식(9)은 엔코더 출력으로서 5-큐비트 다중위상플립 코드의 일반적 위상플립 에러진단 코드이다.

$$\alpha|+++++\rangle + \beta|-----\rangle \quad (9)$$

$$\text{, where } '+' = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad '-' = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

그림 6에 보인 5-큐비트 다중위상플립코드의  $Z_{1,4,5}$  오류정정에 식(9)의 일반적 진단코드를 적용한 사고실험은 아래와 같다.

[1단계] 엔코더 출력 :  $(2\leftarrow 1), (3\leftarrow 1), (4\leftarrow 2), (5\leftarrow 3)$

$$\alpha|00000\rangle + \beta|11111\rangle$$

[2단계] H 변환 :  $\alpha|+++++\rangle + \beta|-----\rangle$

[3단계] 근원오류  $Z_{1,4,5}$ :  $\alpha|---+-\rangle + \beta|+----\rangle$

[4단계] H 변환 :  $\alpha|11001\rangle + \beta|00110\rangle$

[5단계]  $Z_{3\oplus 5}$  검출 :  $(5\leftarrow 3) \alpha|11001\rangle + \beta|10110\rangle$

$$R_5 = \langle 1|Z_{3\oplus 5}\rangle = 1$$

[6단계] 디코더:

$(3\leftarrow 1), (4\leftarrow 2) \alpha|11101\rangle + \beta|11110\rangle$

$(3\rightarrow 1), (4\rightarrow 2) \alpha|11011\rangle + \beta|11000\rangle$

업힘 해제 :  $(2\leftarrow 1)$

$$\alpha|11001\rangle + \beta|11000\rangle = |1100\rangle |\Psi'\rangle$$

$$\text{, where } |\Psi'\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

[7단계]  $Z_{3\oplus 5}$  배치정정 :  $|1100\rangle |\Psi''\rangle$

$$|\Psi''\rangle = X^1 |\Psi'\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

5-큐비트 다중위상플립코드는 다중비트플립코드와 표 3의 오류징후 정보를 공유하며, 모든 5-큐비트 다중위상플립 오류들을 100% 정정할 수 있다. 보조큐비트 상태벡터에 따른 오류판정율은 다중비트플립코드 경우와 동일하다. 그림 6(a) 상의  $Z_{1,4,5}$ 에 대한 그림 6(b)의 QCAD 시뮬레이션은 식(10)과 같은 십진수 30과 31의 중첩상태 출력을 보여 준다.

$$|1111\rangle = \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (10)$$

이 결과는 실제로 그림 6(b)의 물리적 측정에서 확률 1.0000000로 15=|1111>가 출력되는 것으로 검증되었다. 표 2를 참조하면 식(8)의 물리적 측정값인 |1111>은  $W_{1,4,5}$ 와  $W_{2,3}$  오류징후로서 이 경우는  $Z_{1,4,5}$  또는  $Z_{2,3}$  오류가 발생했다는 오류정보이다.

## IV. QECC 단순 성능 비교

표 4는 기존의 QECC들[2,3,4,5,8]과 본 논문이 제안한 다중플립 QECC들이 정정 가능한 Pauli 오류 유형 비교이다. [2,5]는 정정 가능한 단일 오류 유형의 다양성 측면에서 단일 X,Y,Z 오류의 100% 정정이 가능한 우수한 성능을 보였다. 이에 반해 [3,8]과 [4]는 각각 X와 Z와 같은 특정 단일 오류에 대해서만 100% 오류정정이 가능했다. 본 논문이 제안한 5-큐비트 다중비트플립코드와 다중위상플립코드들도 정정 가능한 오류 유형에서 [3,4,8]이 대상으로 했던 X와 Z에 의한

다중 오류의 경우에만 100% 정정이 가능했다. 본 논문 방법들은 다중플립오류의 검출과 정정에서  $W_{3\oplus 5}$ 과  $W_3$  정정의 적용 방법에 따라 각각 50%와 100%의 오류관정율을 보였다.

표 4. 정정 가능한 Pauli 오류 비교

Table 4. Comparison of possible Pauli error correction

Possible error correction	[2]	[3]	[4]	[5]	[8]	$A^*$	$B^{**}$
	qubit numbers						
	9	3	3	5	6	5	5
single X	yes	yes	no	yes	yes	yes	no
single Y	yes	no	no	yes	no	no	no
single Z	yes	no	yes	yes	no	no	yes
multiple X	no	no	no	no	no	yes	no
multiple Z	no	no	no	no	no	no	yes

p.s. \*5-qubit multiple bit flip code

\*\*5-qubit multiple phase flip code

표 5는 각 QECC들이 사용한 양자 게이트의 단순 게이트 비용 비교표이다.

표 5. QECC 실현을 위한 양자게이트(비용)비교

Table 5. Quantum gate(cost) comparison for QECCs

Gate type (cost)	Gate numbers for QECC						
	[2]	[3]	[4]	[5]	[8]	$A^*$	$B^{**}$
NOT(1)	-	-	-	4	12	-	-
Hadamard(2)	6	-	6	6	-	-	10
CNOT(5)	16	4	4	6	8	11	11
3MCT(13)	4	1	1	2	8	-	-
4MCT(26)	-	-	-	4	-	-	-
Fredkin(19)	-	-	-	2	-	-	-
Total cost	144	33	45	210	156	55	75

[2,5]는 단일 X,Y,Z 오류들을 대상으로 했기에 게이트 실현 비용이 비교적 높았지만 [8]은 단일 X 오류만 정정 가능함에도 3MCT 게이트를 기본 게이트로 사용했기에 비용이 매우 높았다. 본 논문에서 제안한 QECC들은 기본 게이트로 3MCT 게이트 대신에 CNOT 게이트를 사용했고,  $W_{3\oplus 5}$  또는  $W_3$  검출을 통해 모든 다중 X와 Z 오류들을 세 개의 CNOT 게이트로 배치처리 함으로써 실현 게이트 비용을 낮출 수 있었다.

## V. 결론

본 논문은 3MCT 게이트 대신에 CNOT 게이트를 기본 게이트로 사용해 5-큐비트로 모든 다중비트플립과 다중위상플립 오류들을 100% 정정할 수 있는 새로운 5-큐비트 다중비트플립코드와 다중위상플립코드를 제안하고, 중첩상태와 물리적 측정 시의 코드 출력을 QCAD 시뮬레이터로 검증하였다. 제안한 5-큐비트 다중비트플립코드는 근원오류부에 5중 H 게이트 쌍의 크로네커 곱 임베딩을 통해 간단하게 5-큐비트 다중위상플립코드로 전환될 수 있었다. 본 논문이 제안한 다중플립 QECC들은 4개의 보조큐비트 상태벡터들이 제공하는  $2^4$ 개의 보수관계 여집합쌍 오류징후 정보를 공유한다. 이때  $W_3$ 과  $W_5$  오류를 포함하는 다중플립오류의 경우에만  $W_{3\oplus 5}$  정정이 요구되는 특성을 갖고 있어 본 논문은  $W_{3\oplus 5}$  배치정정을 3개의 CNOT 게이트로 실현하는 새로운 오류정정 기법을 개발하고 코드 설계에 적용하여 게이트 저비용 실현을 구현할 수 있었다. 제안한 다중플립 QECC들은  $W_{3\oplus 5}$ 와  $W_3$  적용 시에 각각 50%와 100%의 오류관정율을 보였다.

본 논문이 제안한 다중플립 QECC들은 다중플립 오류들이 많이 발생하는 열악한 환경에서 표적큐비트 정보를 완벽하게 보호할 수 있는 강력한 보호 수단이 될 수 있다. 향후 연구 관심사는 제안한 다중플립 QECC들을 사용하여 Shor 코드를 다중 Pauli 코드로 확장 실현하는 것이다.

## 감사의 글

이 논문은 2018년도 강릉원주대학교 전임 교원 연구년 지원에 의하여 수행되었음.

## References

- [1] P. W. Shor, "Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory," *Phys. Rev. A, Gen. Phys.*, vol. 52, no. 4, 1995, pp. 2493-2496.
- [2] Quantum Shor code, [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_error\\_correction#The\\_Shor\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_error_correction#The_Shor_code). Accessed: Sept. 23, 2019.



- [3] Standard quantum bit flip code, [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_error\\_correction#The\\_bit\\_flip\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_error_correction#The_bit_flip_code), Accessed: Sept. 23, 2019.
- [4] Standard quantum phase flip code, [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_error\\_correction#The\\_sign\\_flip\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_error_correction#The_sign_flip_code), Accessed: Sept. 23, 2019.
- [5] R. Laflamme, C. Miquel, J. Paz, and W. Zurek, "Perfect Quantum Error Correction Code," *Phys. Rev. Lett.* 77, 198, 1 July 1996. arXiv:quant-ph/9602019v1 27 Feb 1996. pp. 198-201.
- [6] T. C. Ralph, "Proposal for a Simple Quantum-Error-Correction Test Gate in Linear Optics," *IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 9, no. 6, 2003, pp. 1495-1497.
- [7] G.J. Milburn, M. Sarover, and C. Ahn, "Quantum control and quantum error correction," *2004 5th Asian Control Conf.*, Melbourne, Australia, 20-23 July 2004. pp. 33-41.
- [8] R. Anitha and B. Vijayalakshmi, "Simulation of quantum encoder & decoder with flip bit error correction using reversible quantum gates," *2018 Int. Conf. on Recent Trends in Electrical, Control and Communication (RTECC)*, Selangor, Malaysia, Mar. 2018, pp. 99-102.
- [9] CAD for Quantum Computer Simulator, <http://qcad.osdn.jp>. Accessed: Sept. 23, 2019.
- [10] D. Park and Y. Jeong, "Realizing Mixed-Polarity MCT gates using  $NCV-|v_1\rangle$  Library," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 11, no. 1, 2016, pp. 29-35.
- [11] D. Park, "A New Function Embedding Method for the Multiple-Controlled Unitary Gate based on Literal Switch," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 12, no. 1, 2017, pp. 101-107.
- [12] D. Park, "Function Embedding and Projective Measurement of Quantum Gate by Probability Amplitude Switch," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 12, no. 6, 2017, pp. 1027-1034.

## 저자 소개



### 박동영(Dong-Young Park)

1980년 인하대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1985년 인하대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)

1995년 인하대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

2019년 현재 강릉원주대학교 정보통신공학과 교수

※ 관심분야 : 다치논리시스템, 양자정보통신



### 김백기(Baek-Ki Kim)

1985년 경희대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1987년 경희대학교 전자공학과 졸업(공학석사)

1997년 경희대학교 전자공학과 졸업(공학박사)

2019년 현재 강릉원주대학교 정보통신공학과 교수

2019년 현재 ICT 플랫폼 학회 회장

※ 관심분야 : 신호처리, 의료시스템

