

# 비스듬히 입사하는 음장에 대한 유한 길이의 탄성 원통 쉘의 음향 산란

## Acoustic scattering of an obliquely incident acoustic field by a finite elastic cylindrical shell

이근화,<sup>†</sup> 변성훈,<sup>2</sup> 김시문<sup>2</sup>

(Keunhwa Lee,<sup>1†</sup> Sung-Hoon Byun,<sup>2</sup> and Sea-Moon Kim<sup>2</sup>)

<sup>1</sup>세종대학교 국방시스템공학과, <sup>2</sup>선박해양플랜트연구소

(Received January 8, 2019; revised June 24, 2019; accepted July 11, 2019)

**초 록:** 본 연구에서는 무한 유체에 놓여있는 유한 길이의 탄성 원통 쉘에 외부에서 비스듬히 평면파가 입사할 때 발생하는 음향 산란 현상을 이론적으로 연구했다. 유한 길이의 원통 쉘에서는 해석적인 산란 해가 존재하지 않기 때문에, Kirchhoff 가정을 적용한 Ye의 산란 기법[Z. Ye, J. Acoust. Soc. Am. **102**, 877-884 (1997)]을 사용했다. 탄성 원통 쉘의 특성은 3차원 탄성과 이론을 적용하여 구현했으며 원통 쉘 내부의 유체를 고려했다. 유도된 해석 해를 이용하여 내부 유체가 산란 음장에 미치는 효과, Rayleigh 변수에 대한 산란 음장, 탄성 재질의 변화에 따른 먼 거리 산란 함수를 살펴보았다.  
**핵심용어:** 유한 원통, 탄성 원통 쉘, 실린더 법, 음향 산란

**ABSTRACT:** In this study, we theoretically study the acoustic scattering of an obliquely incident plane wave from a finite elastic cylindrical shell. A heuristic scattering method of Ye [Z. Ye, J. Acoust. Soc. Am. **102**, 877-884 (1997)] for a finite fluid cylinder is extended into a finite elastic cylindrical shell since no analytic solutions exist in the finite cylinder. The elastic cylindrical shell is modeled with the 3D elastic wave theory considering internal fluid. Using the derived analytic solution, we observe the effect of the internal fluid on the scattering field, the scattering field for the Rayleigh parameter, and the far-field scattering function for the elastic property of the cylindrical shell.

**Keywords:** Finite cylinder, Elastic cylindrical shell, Cylinder method, Acoustic scattering

**PACS numbers:** 43.30.Ft, 43.30.Gv

### 1. 서 론

인공적인 수중 운동체에서 발생하는 음향 산란 현상은 매우 복잡하기 때문에 수신된 산란 신호만으로 산란체의 물리적인 특성을 해석하는 것은 특수한 경우를 제외하고는 불가능하다.

그렇기 때문에 대부분의 연구자들은 연구 방법론적으로 기본적인 입체도형에서의 산란현상에 대한 이해를 통해 보다 복잡한 산란체에서의 산란현상을

분석하는 방식을 취한다.<sup>[1]</sup>

우리는 기본적인 입체도형 중의 하나인 원통에서의 음향 산란 현상을 연구했다. 수중에서 활동하는 생물이나 인공적인 운동체들은 축대칭의 형상을 가진 것들이 많다.<sup>[2-4]</sup> 축대칭의 형상은 여러 원통들로 이루어진 복합체로 생각할 수 있기 때문에, 원통에서의 산란현상에 대한 이해는 수중에서의 산란현상을 이해하는데 필수적이라 할 수 있다.

일반적으로 무한 길이의 원통에 대해서는 모드 해나 적분방정식으로 표현되는 해석적인 해가 존재한다.<sup>[5-11]</sup> 하지만 유한 길이의 원통에 대해서는 해석적인 해가 존재하지 않는다.<sup>[12-14]</sup> 1988년 Stanton<sup>[2-3]</sup>은

<sup>†</sup>Corresponding author: Keunhwa Lee (nasalkh2@sejong.ac.kr)  
Department of Defense Systems Engineering, Building Kwanggaeto,  
Room 1004c, Sejong University, 209 Neungdong-ro, Gwangjin-gu,  
Seoul 05006, Republic of Korea  
(Tel: 82-2-3408-3508, Fax: 82-2-3408-2428)

유한 원통에서의 산란을 동일한 길이에서 ‘단위 길이 당 점 음원’이 분포해서 발생하는 방사 현상으로 치환하여 해석하는 방법(Stanton의 원통법)을 제안했다. 만약에 원통의 길이가 무한대라면, Stanton이 제안한 해는 무한 원통에 대한 산란해와 동일해져야 하는데, 이 조건을 이용하여 Stanton은 점 음원의 크기를 결정했다.

1996년 Ye<sup>[14]</sup>는 Kirchhoff 가정과 Green 정리를 이용하여 유한한 길이를 갖는 유체 원통에 대해서 Stanton의 원통법을 일반화했다. Stanton의 원통법은 입사파가 원통의 길이 방향에 수직으로 입사하는 경우를 가정했지만, Ye의 원통법은 비스듬히 입사하는 음장에 대해서도 적용가능하다.

본 연구에서는 Ye의 원통법을 유한 길이의 탄성 원통 쉘에 대해 적용했다. 탄성 원통 쉘은 탄성을 가지고 있는 고체로 일반적인 원통과 다르게, 속이 비어있거나 내부 유체로 차 있는 것을 말한다. 본 연구에서 탄성 원통 쉘에서의 산란 음장은 3차원 등방성 탄성 이론을 이용하여 계산했다.

본 연구에서 탄성 쉘을 계산할 때 사용한 방법은 기본적으로 Leon *et al.*<sup>[11]</sup>의 1992년 연구와 동일하다. 다만 Leon *et al.*은 입사파의 진행방향이 x-z 평면에 놓여 있다고 가정하고 탄성 원통 쉘에 대한 해를 구했으나, 본 연구에서는 입사파의 진행방향에 대한 특별한 가정을 하지 않았다. 또한 Leon *et al.*의 해는 전산자원이 부족했던 90년대의 연구이기 때문에 Bessel 함수와 변형 Bessel 함수를 구분하여 복잡하게 서술되어 있으나, 본 연구에서는 단순화하여 새롭게 기술했다. 따로 논문에 기술하지는 않았지만 본 논문에서 구현한 탄성 원통 쉘에 대한 알고리즘은 Leon *et al.*의 논문에 나온 예제와 동일한 결과를 준다는 것을 확인했다. 한편 국내에서도 Roh *et al.*<sup>[15]</sup>에 의한 탄성 원통 쉘에 대한 연구가 존재한다. 하지만 이 연구는 Doolittle과 Überall의 결과<sup>[8]</sup>를 사용한 것으로 비스듬히 입사하는 입사파를 고려하지 못했다는 한계가 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 무한한 길이의 탄성 원통 쉘에 대한 산란 해를 구하는 과정을 기술했으며, III장에서는 Ye의 원통법을 탄성 원통 쉘에 적용했다. IV는 결론 및 토론이다. 부록에서는 탄성 원통 쉘에 대한 산란 해의 행렬 방정식을 제공한다.

## II. 무한 길이의 탄성 원통 쉘에서의 음향산란

### 2.1 좌표계와 입사파

Fig. 1과 같은 좌표계를 생각한다. 입사파의 방향은 구면 좌표계의 방위각과 고각을 이용하여  $(\theta_0, \alpha)$ 로 설정한다. 여기서  $\theta_0$ 는  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ 이고,  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ 로 정의된다. 참고로 입사각  $\alpha$ 는 xy평면에서 아랫방향을 +값으로 설정했다. 산란파의 방향은 구면좌표계에서  $(\theta, \phi)$ 로 설정했다. 산란고각  $\phi$ 의 방향은 xy평면에서 위 방향을 +값으로 설정했다. 원통의 중심은 원점에 놓여있고 원통의 길이 방향은 z축과 평행하다고 가정한다.

이때 산란체로 입사하는 평면파는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_i &= e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= e^{jk_0[-\cos\alpha\cos\theta_0 - \cos\alpha\sin\theta_0\sin\alpha]} \cdot [r\cos\theta, r\sin\theta, z] \\ &= e^{jk_0z\sin\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n J_n(k_0r\cos\alpha)\cos[n(\theta-\theta_0)], \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 연산자  $\cdot$ 는 내적을 나타낸다.  $\vec{k}$ 는 평면파의 방향을 나타내는 방향벡터이며, 그 크기는 탄성 원통 쉘을 둘러싸고 있는 외부 유체의 파수  $k_0$ 와 같다.  $\vec{r}$ 은 공간의 점을 나타내는 위치벡터이다. 각각의 벡터는 구면좌표계를 이용해 정리를 했다. 한편,  $\epsilon_n$ 은 n

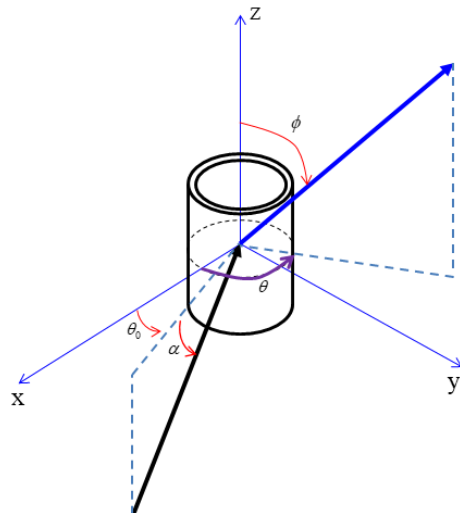


Fig. 1. Coordinate system for cylindrical scatterer.

=0일 때 2이고, n>0에서는 1로 정의된다.  $J_n$  제 1종 Bessel 함수이다.

### 2.2 외부 유체의 음장

외부의 유체에서의 음향 산란은 Helmholtz 방정식을 만족한다. 무한 실린더에 의해 형성되는 산란 음장에 대해서는 변수분리법을 적용할 수 있으므로, Helmholtz 방정식을 원통의 반지름 방향, 길이 방향, 방위각 방향에 대한 2차 상미분 방정식으로 각각 분리할 수 있다. 이 중에 반지름 방향에 대해서는 거리가 증가하는 방향으로 전파하는 파만 존재한다고 생각할 수 있으므로 방정식의 해는 제 1종 Hankel 함수로 나타난다. 길이 방향에 대해서는 평면 입사파의 길이 방향 성분과 동일한 방향의 전달 파가 나타나므로 지수함수로 표현할 수 있다. 방위각 방향에 대해서는 닫힌 경계조건이 되므로 모드 해가 나타난다. 그러나  $\theta = \theta_0$ 를 중심으로 좌우 대칭의 형태로 산란음장이 발생할 것이므로 모드 해는 코사인 함수를 이용하여 전개할 수 있다. 위의 해를 이용하면, 외부 유체의 산란 음장은 Fig. 1에서 원통좌표계를 이용해 아래와 같은 모드 해로 표현가능하다.

$$p_s = e^{jk_0z \sin\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n a_n H_n^{(1)}(k_0 r \cos\alpha) \cos[n(\theta - \theta_0)], \quad (2)$$

여기서  $a_n$ 은 미지수이다.

### 2.3 원통 쉘 내부 유체의 음장

탄성 원통 쉘 내부 유체에서의 음장도 2.1절과 동일하게 Helmholtz 방정식을 만족한다. 다만 내부 유체의 반지름 방향에 대해서는 2개의 서로 직교하는 해가 존재하는데 이중에 2종 Bessel 함수는 원의 중심에서 무한대가 되는 성질이 있어서 해가 될 수 없다. 결국 반지름 방향의 해는 1종 Bessel 함수로 표현될 수 있다. 이를 이용하면 내부의 유체의 음장에 대한 모드 해는 다음과 같이 표현된다.

$$p_I = e^{jk_0z \sin\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n h_n J_n(k_I r \cos\alpha) \cos[n(\theta - \theta_0)], \quad (3)$$

여기서  $k_I^2 = (\omega/c_I)^2 - (k_0 \sin\alpha)^2$ 으로 표현되며  $\omega$ 는 음파의 각주파수이고,  $c_I$ 는 내부 유체의 음속이다.  $k_z = k_0 \sin\alpha$ 로 정의했다.  $h_n$ 은 미지수이다.

### 2.4 탄성 원통 쉘에서 탄성파의 장

등방성의 탄성 쉘에서의 파장(wave field)은 아래와 같이 텐서를 이용해 표현한 탄성과 방정식에 의해 설명할 수 있다.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = -\rho \omega^2 u_i, \quad (4)$$

여기서  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 탄성 매질의 Lamé 계수이며  $u$ 는 탄성 매질의 변위 벡터를 의미한다.  $\rho$ 는 탄성 매질의 밀도이다.

Helmholtz 분해에 따라 압축 길이 포텐셜  $\phi_p$ 와 전단 길이 포텐셜  $\vec{\psi}$ 를 이용해  $\vec{u} = \nabla \phi_p + \nabla \times \vec{\psi}$ 라고 놓고, Eq. (4)를 분해를 하면 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla^2 \phi_p + (\omega^2/c_L^2) \phi_p = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} + (\omega^2/c_T^2) \vec{\psi} = 0, \quad (6)$$

여기서  $\nabla^2$ 는 라플라시안 연산자이다. 포텐셜 표현식에서  $\nabla \phi_p$ 와  $\nabla \times \vec{\psi}$ 에서의  $\nabla$ 은 각각 gradient와 curl 연산자를 나타낸다. 또한,  $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 로 p파의 속도이고,  $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ 로 s파의 속도이다.

원통 좌표계에서 압축 길이 포텐셜에 대한 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial z^2} + k_L^2 \phi_p = 0, \quad (7)$$

여기서  $k_L = \omega/c_L$ 이다.

한편  $\vec{\psi} = \psi_r \vec{e}_r + \psi_\theta \vec{e}_\theta + \psi_z \vec{e}_z$ 라고 할 때, 전단 길이 포텐셜은 각각 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + k_T^2 \psi_r &= 0 \\ \nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + k_T^2 \psi_\theta &= 0 \\ \nabla^2 \psi_z + k_T^2 \psi_z &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $k_T = \omega/c_T$ 이다. 원통 좌표계(거리, 방위각, 깊이)에서 각방향의 변위를  $u, v, w$ 라 할 때, 각각의 변위는 포텐셜과 아래와 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi_p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \\ v &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \\ w &= \frac{\partial \phi_p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

만약에 평면 입사파가 원통의 길이 방향에 수직하게 입사한다면 생성되는 산란 변위도  $\theta = \theta_0$ 를 중심으로 서로 좌우 대칭이어야 할 것이다. 또한 각각의 변위는  $z$ 축에 대해 독립적이어야 할 것이다. 이 경우에 3차원 해석은 'xy평면의 원 산란체에 평면파가 입사하는 경우의 2차원 해석'과 동일할 것이다. 그렇기 때문에  $\psi_\theta$ 와  $\psi_r$ 의 값은 산란 변위에 영향을 주지 못한다. 하지만 평면 입사파가 비스듬히 입사하는 경우에는 위의 두 개의 전단 길이 포텐셜은 사라지지 않는다. 이 두 개의 전단 길이 포텐셜은 Eq. (8)에서 보듯이 서로 연성되어 있기 때문에 동일한 구조의 해를 가진다. 또한 모든 포텐셜들은 해석 대상이 무한 원통 쉘이기 때문에 원통의 횡 방향으로 두 개의 기본 해가 존재하며, 원주 방향으로는 대칭 조건을 만족해야 하며,  $z$ 방향으로는 전달 파의 구조를 가져야 한다. 이 조건들을 모두 고려하여 Eqs. (7)과 (8)의 모드 해를 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{1}{\rho_2 \omega^2} e^{jk_z z} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n [b_n J_n(k_c r) + c_n N_n(k_c r)] \cos[n(\theta - \theta_0)] \\ \psi_r &= \frac{1}{\rho_2 \omega^2} e^{jk_z z} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n [d_n J_{n+1}(k_s r) + e_n N_{n+1}(k_s r)] \sin[n(\theta - \theta_0)] \\ \psi_\theta &= \frac{1}{\rho_2 \omega^2} e^{jk_z z} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n [-d_n J_{n+1}(k_s r) - e_n N_{n+1}(k_s r)] \cos[n(\theta - \theta_0)] \end{aligned}$$

$$\psi_z = \frac{1}{\rho_2 \omega^2} e^{jk_z z} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-j)^n [f_n J_n(k_s r) + g_n N_n(k_s r)] \sin[n(\theta - \theta_0)], \quad (10)$$

여기서  $k_c = (\omega/c_L)^2 - k_z^2$ 이고,  $k_s = (\omega/c_T)^2 - k_z^2$ 이다.  $b_n \sim g_n$ 은 미지수이다.  $N_n$ 은 제 2종 Bessel 함수이다.  $\rho_2$ 는 쉘의 밀도를 의미한다.

한편 원통 좌표계에서 응력-변형률 관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\epsilon_{r\theta} &= 2\epsilon_{\theta r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ 2\epsilon_{z\theta} &= 2\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\epsilon_{zr} &= 2\epsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tau_r &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ \tau_\theta &= \lambda \Delta + 2\mu \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \tau_z &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{z\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\Delta = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 으로 부피 변형률을 나타낸다.

## 2.5 경계 조건

위의 Eqs. (2), (3), (10)의 8개의 미지수를 구하기 위해 각 경계에서 Table 1과 같은 경계조건을 적용할 수 있다. Table 1의 첫 번째 열은 두 개의 매질의 종류를 나타낸다. 예를 들어 fluid/fluid는 상부 반무한 유체와 하부 반무한 유체로 구성되는 경계를 의미한다. 첫 번째 줄은 경계 조건에서 물리량을 나타낸다. 왼쪽부터 순서대로, 원통 좌표계에서 거리, 방위각, 깊이 방향의 변위와 세 가지 응력들을 나타낸다.

Table 1에서 '='는 경계면에서 해당하는 물리량이 연속조건을 만족한다는 의미이며, 'none'은 연속조건이 성립하지 않는다는 것이며, '0'은 해당 물리량

Table 1. Boundary conditions between two media.

	$u$	$v$	$w$	$\tau_r$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{zr}$
fluid/fluid	=	none	none	=	none	none
fluid/solid	=	none	none	=	0	0
solid/solid	=	=	=	=	=	=
vacuum/solid	none	none	none	0	0	0
fluid/rigid	0	none	none	none	none	none
solid/rigid	0	0	0	none	none	none

의 값이 0이라는 것을 의미한다.

내부 유체가 있는 탄성 쉘은 외부유체/탄성체, 탄성체/내부유체에서 각각 4개의 조건이 성립되기 때문에, 8개의 방정식을 만들 수 있다. 이 방정식으로부터 8개의 미지수의 값을 계산할 수 있다.

한편, 모드 해의 경계조건에서 만들어지는 행렬식은 항상 안정적인 것은 아니다. 입력 값이 허수일 때 Bessel 함수는 지수적으로 증가한다는 것은 잘 알려져 있다. 또한 2종 Bessel 함수는 입력 값이 0에 가깝거나  $n$ 이 무한대일 때 특이 값을 갖는다.

또한 입사각의 입사각도에 따라 서로 다른 행렬식은 불안정해질 수 있다. 본 연구에서 작성된 코드는 MATLAB환경에서 제작되었다. 탄성 원통 쉘의 외부 반지름을  $a$ 라고 할 때,  $k_0 a < 20$ 에서는 안정적인 해를 산출하는 것을 확인했다. 그 이상에서는 경우에 따라 행렬의 역행렬을 구하는 것이 불가능한 상황도 발생했다. 이와 같은 오류를 최소화하기 위해서는 Bessel 함수들의 scaling과 행렬식의 변형이 필요하다,<sup>[17-18]</sup> 본 연구에서는 이에 대한 연구는 수행하지 않았다.

참고로 부록에서는 Table 1의 경계조건에서 얻어진 행렬식을 수록했다. Leon 등의 표기법을 따라 경계조건에서 나타나는 Bessel 함수의 도함수들은 Bessel 함수의 회귀 식을 이용하여 높은 차수의 Bessel 함수로 치환했다. Leon 등의 식과 다른 점은 Bessel 함수와 변형 Bessel 함수를 구분하지 않고 단순히 표현했다는 것이다.

### III. Ye의 원통법의 적용

Ye는 Green 정리를 이용하여 Fig. 2와 같은 벡터 좌표계에 대해 ‘임의의 형상의 유체 매질의 산란체’에 대해 아래와 같은 ‘먼 거리 산란 함수’의 식을 유도

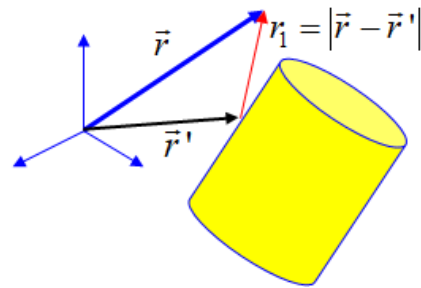


Fig. 2. Coordinate system for far-field scattering function.

했다.<sup>[14]</sup>

$$f = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \nabla_r \cdot p_s(\vec{r}') + jk_0 \frac{r}{r'} p_s(\vec{r}') \right] \cdot \vec{n} e^{-jk_0 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} ds', \tag{13}$$

여기서  $\vec{n}$ 은 산란체 표면에서의 외부방향으로의 정규벡터이며,  $ds'$ 는 산란체 표면의 미소면적을 나타낸다.

Eq. (13)에서 이중 적분은 산란체의 표면에 대한 적분이다. Eq. (13)의 값을 구하기 위해서는 산란체의 표면에서 산란 음장을 알아야 한다.

즉 Eq. (13)을 이용하여 ‘유한 길이의 유체 원통’의 먼 거리 산란함수를 구하기 위해서는 ‘유한 유체 원통’의 산란 음장을 알아야 한다는 모순적인 상황이 발생한다. Ye는 ‘무한 길이의 유체 원통’의 해석해에 Kirchhoff 가정을 도입하여 위의 어려움을 극복했다. Kirchhoff 가정을 통해서 유한 길이에 해당하는 부분의 음장은 ‘무한 길이의 유체 원통의 해석해’와 동일하다고 가정하고 그 이외의 영역은 0으로 생각했다. 본 연구에서는 유한 유체 원통에 대한 Ye의 방법과 동일하게, 탄성 원통 쉘에 Ye의 방법을 도입했다.

길이  $L$ 의 탄성 원통 쉘이 길이 방향으로  $[-L/2, L/2]$

에 놓여 있다고 할 때, 해당 영역에서의 탄성 원통 셀 표면에서의 음장은 Eq. (2)와 동일하다고 생각하고, 그 이외의 음장은 0이라고 생각한다. 이때 원통의 길이 방향에 대해 Eq. (13)을 적분을 하면 아래와 같이 정리된다. 이때 적분은 구면좌표계에서 수행되었다.

$$f(\phi, \theta; \alpha, \theta_0) = \frac{-jL}{\pi} \text{sinc}[k_0 L(\sin\alpha - \cos\phi)/2] \times \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n a_n (-1)^n \cos[n(\theta - \theta_0)] Q_n(\alpha, \phi), \quad (14)$$

여기서  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ 로 정의되며,

$$Q_n(\alpha, \phi) = \frac{\pi}{2j} [ka \cos\alpha H_n^{(1)'}(ka \cos\alpha) J_n(ka \sin\phi) - ka \sin\phi H_n^{(1)'}(ka \cos\alpha) J_n'(ka \sin\phi)]. \quad (15)$$

한편, Stanton의 원통법은 위의 Eq. (15)에  $\phi = \alpha + \pi/2$ 를 넣어서 얻을 수 있다. 이때 Wronskian 항등식에 의해 Eq. (15)는  $Q_n(\alpha, \phi) = 1$ 이 된다.

한편, 무한 길이 탄성 원통의 산란 특성은 아래의 무한 길이 탄성 원통에 대한 먼 거리 산란 함수로 주어진다.

$$|f_{\infty}(\theta)| = \left( \frac{2r}{a} \right)^{1/2} \left| \frac{p_s}{p_i} \right|_{r \rightarrow \infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi k_0 a \cos\alpha}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n a_n (-1)^n \right|. \quad (16)$$

#### IV. 수치 예제

본 절에서는 ‘유한 길이의 탄성 원통 셀’의 음향 산란 특성을 분석하기 위해 세 개의 수치 실험을 수행했다. 수치 실험에 사용한 탄성 원통 셀과 유체의 재질은 Table 2에 정리했다.

첫 번째는 ‘무한 길이의 탄성 원통 셀’과 ‘무한 길이의 탄성 원통’의 특성을 비교했다. Fig. 3에서는 입사파가 수직으로 입사할 때 Rayleigh 값인  $k_0 a$ 의 값에 따라 무한 길이의 탄성 원통 셀과 무한 길이의 탄성 원통의 산란 특성을 비교했다.

탄성체는 brass를 사용했다. 탄성 원통 셀은 ‘두께

Table 2. Material properties.

Medium	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_L$ (m/s)	$c_T$ (m/s)
Water	1000	1493	0
Aluminum	2790	6380	3100
Brass	8500	4284	2142
Stainless steel	7570	5675	3141
Air	1.2	330	0

및 외부 반지름의 비’가 0.05를 사용했다. 0도인 경우가 후방 산란이며, 180도가 전방 산란에 해당한다.

Fig. 3에서 보면 동일한 외부 반지름을 가졌어도 원통 셀과 원통의 산란 특성 차이가 큰 것을 확인할 수 있다. 특히 낮은 Rayleigh 값에서 차이가 컸다. 그리고 낮은 Rayleigh 값에서는 탄성 원통 셀의 내부 유체가 공기인 경우는 전방 산란의 값이 상대적으로 컸으며, 물인 경우는 후방 산란의 값이 상대적으로 큰 것을 알 수 있다. 높은 Rayleigh 값에서는 내부 유체의 효과는 작아지는 것을 볼 수 있다.

Fig. 4는 Fig. 3과 외부 지름은 같으나 두께가 두꺼운 탄성 원통 셀에 대한 결과를 보여준다. ‘두께 및 외부 반지름의 비’는 0.15를 사용했다. 셀의 두께가 두꺼워짐에 따라 내부 유체의 효과는 얇은 경우보다 줄어드는 것을 볼 수 있다.

특히 Fig. 3에서 낮은 Rayleigh 값의 공기로 채워진 탄성 셀에서 발생했던 강한 전방 산란이 Fig. 4에서는 감소하는 것을 확인할 수 있다. 후방 산란의 값은 대부분의 영역에서 내부가 물로 차 있는 경우가 더 크나, 얇은 셀보다는 그 차이가 작다.

두 번째 예제에서는 Eq. (14)를 이용해 ‘유한 길이의 탄성 원통 셀’과 ‘유한 길이 탄성 원통’, ‘유한 길이 강체 원통’의 특성을 분석했다. 이때 원통의 길이는 0.1m로 모든 예제에서 동일하게 생각했다.

Fig. 5는 입사파가 원통에 수직으로 입사할 때 ( $\alpha = 0^\circ$ ) 원통 셀의 산란 고각에 따른 표적 강도를 도시한 것이다. 표적 강도는  $20 \log_{10} |f|$ 으로 계산된다. 탄성 매질은 aluminum이고,  $k_0 a = 3$ 를 사용했다. 이 그림에서 0~180도의 산란 고각은 후방 산란에 해당되며, 180~360도의 산란 고각은 전방 산란에 해당된다. 앞의 예제에서 관찰한 것과 마찬가지로 후방 산란에서는 물이 찬 탄성 셀의 표적 강도가 높고, 전

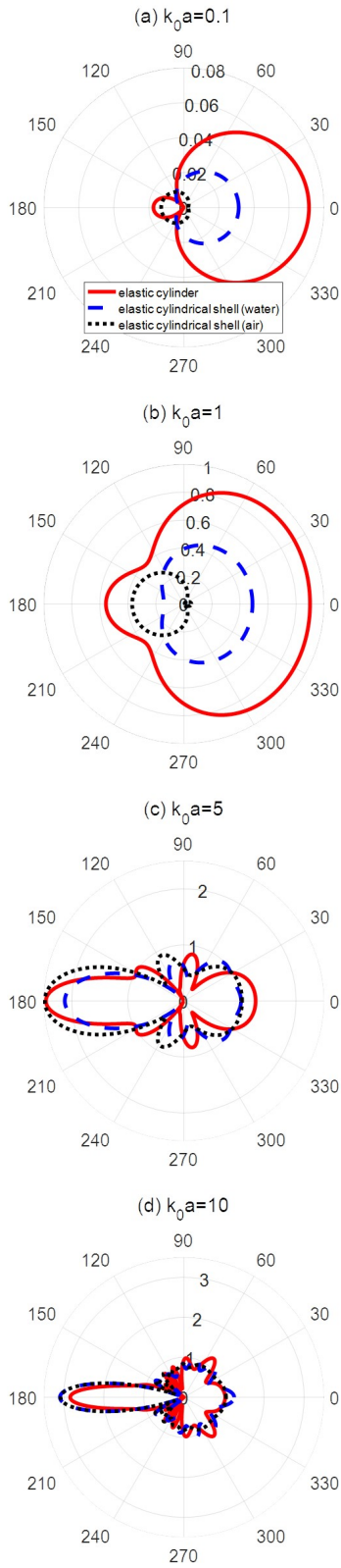


Fig. 3. Scattering pattern for the elastic cylindrical shells with the thickness-radius ratio of 0.05. and the elastic cylinder.

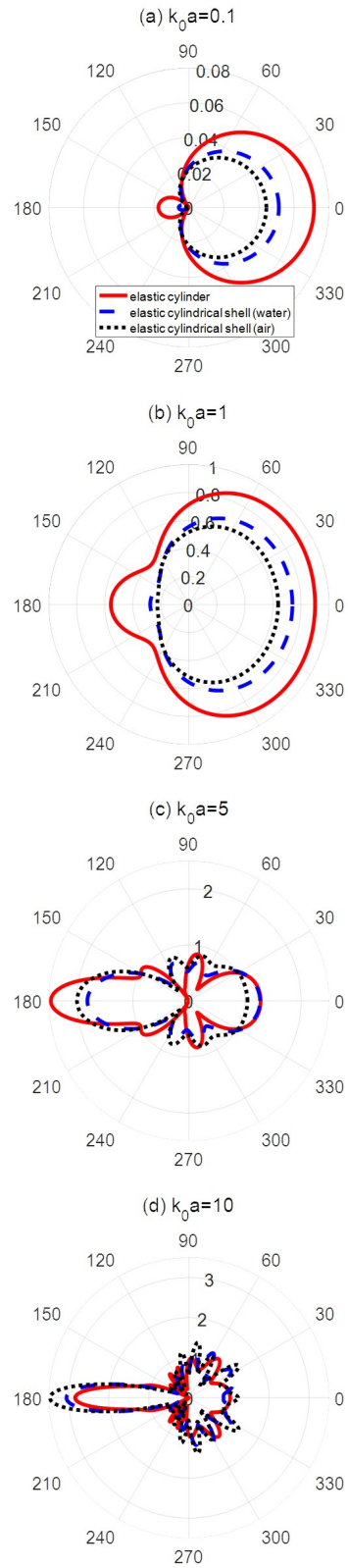


Fig. 4. Scattering pattern for the elastic cylindrical shells with the thickness-radius ratio of 0.15 and the elastic cylinder.

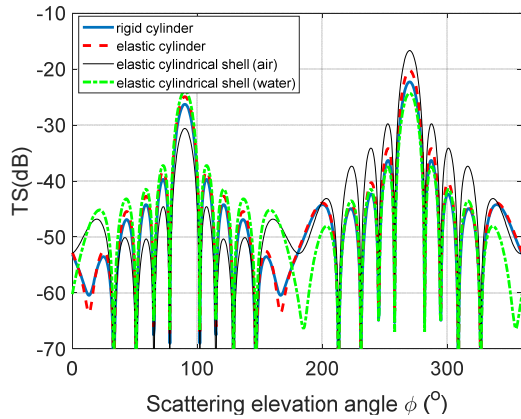


Fig. 5. Target strength for the scattering elevation angle ( $k_0 a = 3$ ). Here, 'TS' stands for the target strength.

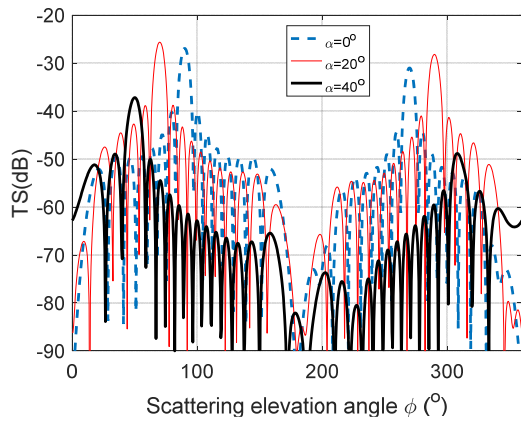


Fig. 6. Target strength from aluminum shell as a function of the scattering elevation angle in case of three incident elevation angles ( $k_0 a = 5$ ). Here, 'TS' stands for the target strength.

방 산란에서는 공기가 찬 탄성 쉘의 표적 강도가 높은 것을 볼 수 있다. 또한, 유한 길이의 원통의 효과가 반영되었기 때문에 산란 고각에 대해 명확한 간섭패턴이 나타나는 것을 확인할 수 있다. 각각의 원통의 재질에 따라 큰 차이가 발생하는 영역은 산란 고각이 원통의 길이방향에 위치해 있을 때이다(0도, 180도 및 360도 근처).

참고로 Fig. 5와 같은 간섭패턴은 본 논문의 연구 대상인 양 끝이 뚫려있는 유한 길이의 원통(또는 원통 쉘)에서만 나타나는 것을 강조한다. 예를 들어 통조림통처럼 원통의 양쪽 끝이 막혀 있는 원통의 경우에는 끝단의 형상이 달라지기 때문에 다른 패턴이 관찰될 것이다.

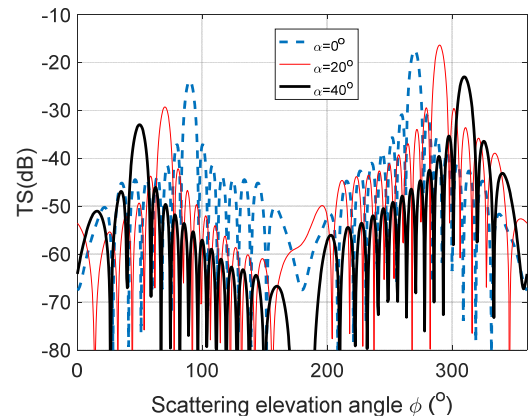


Fig. 7. Target strength from stainless steel shell as a function of the scattering elevation angle in case of three incident elevation angles ( $k_0 a = 5$ ). Here, 'TS' stands for the target strength.

Fig. 6에서는 비스듬한 입사각에 따른 '유한 길이 탄성 원통 쉘'의 산란 고각에 따른 표적 강도를 도시했다. 결과를 명확하게 보이기 위해  $k_0 a = 5$ 로 설정했다. 입사각의 고각은 각각  $\alpha = 0^\circ$  (수직 입사),  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ 로 설정했다. 산란 고각의 부호는 Fig. 5와 동일하다. Fig. 6에서 보면 입사각의 고각에 따라 정반사가 발생하는 산란 고각( $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ )이 달라지는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6에서 재미있는 것은 입사 고각이 0도인 경우보다, 입사고각이 20도인 경우에 정반사되는 영역에서의 표적 강도가 커진다는 것이다. 이러한 경향은 언제나 관찰되는 것이 아니라, 탄성 재질에 따라 달라진다. 이것은 입사각과 산란각에 따라 산란되는 에너지가 탄성 재질에 의존하기 때문이다. 고주파 근사의 관점에서 설명하자면 유체/탄성체의 평면파 반사계수가 각도에 따라 달라지기 때문에 설명할 수 있다.

참고로 Fig. 7은 Fig. 6과 동일한 조건에서 stainless steel에서 실험한 결과이다. 절대적인 표적 강도의 크기와 산란 패턴이 바뀌는 것을 확인할 수 있다.

## V. 결 론

본 연구에서는 유한한 길이의 탄성 원통 쉘에서의 산란 현상을 다뤘다. Ye의 원통법을 탄성 원통 쉘에



적용하여, 내부 유체의 효과, Rayleigh 값에 대한 변화, 탄성 재질의 변화에 따른 먼 거리 산란 함수의 경향을 입사각과 산란각의 관점에서 살펴보았다.

첫 번째로 무한길이의 탄성 원통 쉘의 산란 특성을 살펴보았다. 후방산란의 경우에는 내부유체가 물인 경우가 공기일 때보다 후방산란파의 크기가 큰 경향이 나타났다. 두꺼운 쉘에서는 공기인 경우와 물의 경우에 후방산란크기의 차이는 줄어들었다. 주파수가 증가할수록 내부유체의 효과는 줄어들며 탄성 원통 쉘의 산란 패턴의 모양은 탄성 원통의 산란 패턴과 비슷해진다.

두 번째는 유한 길이의 탄성 원통 쉘에 대해 수치 실험을 수행했다. 유한 길이에 의한 간섭패턴은 산란각이 원통의 길이방향에 가까울수록 분명하게 나타난다. 후방산란영역이나 전방산란영역에서의 표적 강도는 탄성 매질의 재질에 따라 달라지는 것을 확인했다.

향후에는 실험적 연구를 통해 유한 길이의 원통의 양 끝단에서 나타나는 산란 음장의 효과 및 닫힌 유한 길이의 원통의 산란 특성을 측정하고 해석할 것이다.

### 감사의 글

본 논문은 ‘중주파수 대역의 배열 센서를 이용하는 장거리 수중음향 원격 탐사 핵심기술 개발(선박 해양플랜트연구소)’의 위탁과제로 수행되었음.

### 부 록

외부 유체와 내부 유체로 둘러싸인 탄성 쉘에 대해 경계조건을 적용하면 8×8의 행렬식이 나온다. 이 행렬식을  $Mx = c$ 라고 표현할 때 각각의 행렬요소들은 다음과 같다.

참고로  $c = [a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n]^T$ 로 정의된다. 또한 아래의 식에서 사용된  $x_i$ 는 무차원수로서 일반적으로  $x_i = rk_i$ 로 정의가 되며,  $x_z$ 만  $x_z = r(jk_z)$ 로 표현된다.

#### <Normal displacement at the outer radius $r = a$ >

$$c(1) = \frac{\rho_2}{\rho_F} [nJ_n(x_F) - x_F J_{n+1}(x_F)]$$

$$M(1,1) = -\frac{\rho_2}{\rho_F} [nH_n^{(1)}(x_F) - x_F H_{n+1}^{(1)}(x_F)]$$

$$M(1,2) = nJ_n(x_c) - x_c J_{n+1}(x_c)$$

$$M(1,3) = nN_n(x_c) - x_c N_{n+1}(x_c)$$

$$M(1,4) = x_z J_{n+1}(x_s), M(1,5) = x_z N_{n+1}(x_s)$$

$$M(1,6) = nJ_n(x_s), M(1,7) = nN_n(x_s), M(1,8) = 0$$

#### <Normal displacement at the inner radius $r = b$ >

$$c(2) = 0$$

$$M(2,1) = 0$$

$$M(2,2) = nJ_n(x_c) - x_c J_{n+1}(x_c)$$

$$M(2,3) = nN_n(x_c) - x_c N_{n+1}(x_c)$$

$$M(2,4) = x_z J_{n+1}(x_s), M(2,5) = x_z N_{n+1}(x_s)$$

$$M(2,6) = nJ_n(x_s), M(2,7) = nN_n(x_s)$$

$$M(2,8) = -\frac{\rho_2}{\rho_I} [nJ_n(x_I) - x_I J_{n+1}(x_I)]$$

#### <Normal stress at the inner radius $r = a$ >

$$c(3) = -\rho_2 c_0^2 x_0^2 J_n(x_F)$$

$$M(3,1) = \rho_2 c_0^2 x_0^2 H_n^{(1)}(x_F)$$

$$M(3,2) = -\lambda x_L^2 J_n(x_c) + 2\mu [(n^2 - x_c^2 - n)J_n(x_c) + x_c J_{n+1}(x_c)]$$

$$M(3,3) = -\lambda x_L^2 N_n(x_c) + 2\mu [(n^2 - x_c^2 - n)N_n(x_c) + x_c N_{n+1}(x_c)]$$

$$M(3,4) = 2\mu x_z [-(n+1)J_{n+1}(x_s) + x_s J_n(x_s)]$$

$$M(3,5) = 2\mu x_z [-(n+1)N_{n+1}(x_s) + x_s N_n(x_s)]$$

$$M(3,6) = 2\mu n [(n-1)J_n(x_s) - x_s J_{n+1}(x_s)]$$

$$M(3,7) = 2\mu n [(n-1)N_n(x_s) - x_s N_{n+1}(x_s)]$$

$$M(3,8) = 0$$

#### <Normal stress at the inner radius $r = b$ >

$$c(4) = 0$$

$$M(4,1) = 0$$

$$M(4,2) = -\lambda x_L^2 J_n(x_c) + 2\mu [(n^2 - x_c^2 - n)J_n(x_c) + x_c J_{n+1}(x_c)]$$

$$M(4,3) = -\lambda x_L^2 N_n(x_c) + 2\mu [(n^2 - x_c^2 - n)N_n(x_c) + x_c N_{n+1}(x_c)]$$

$$M(4,4) = 2\mu x_z [-(n+1)J_{n+1}(x_s) + x_s J_n(x_s)]$$

$$M(4,5) = 2\mu x_z [-(n+1)N_{n+1}(x_s) + x_s N_n(x_s)]$$

$$M(4,6) = 2\mu n [(n-1)J_n(x_s) - x_s J_{n+1}(x_s)]$$

$$M(4,7) = 2\mu n [(n-1)N_n(x_s) - x_s N_{n+1}(x_s)]$$

$$M(4,8) = \rho_2 c_n^2 x_n^2 J_n(x_I)$$

#### <Shear stress for $\theta$ direction at the outer radius $r = a$ >

$$c(5) = 0$$

$$M(5,1) = 0$$

$$M(5,2) = 2n[(1-n)J_n(x_c) + x_c J_{n+1}(x_c)],$$

$$M(5,3) = 2n[(1-n)N_n(x_c) + x_c N_{n+1}(x_c)]$$

$$M(5,4) = x_z[-2(n+1)J_{n+1}(x_s) + x_s J_n(x_s)]$$

$$M(5,5) = x_z[-2(n+1)N_{n+1}(x_s) + x_s N_n(x_s)]$$

$$M(5,6) = (-2n^2 + x_s^2 + 2n)J_n(x_s) - 2x_s J_{n+1}(x_s)$$

$$M(5,7) = (-2n^2 + x_s^2 + 2n)N_n(x_s) - 2x_s N_{n+1}(x_s)$$

$$M(5,8) = 0$$

#### <Shear stress for $\theta$ direction at the inner radius $r = b$ >

$$c(6) = 0$$

$$M(6,1) = 0$$

$$M(6,2) = 2n[(1-n)J_n(x_c) + x_c J_{n+1}(x_c)],$$

$$M(6,3) = 2n[(1-n)N_n(x_c) + x_c N_{n+1}(x_c)]$$

$$M(6,4) = x_z[-2(n+1)J_{n+1}(x_s) + x_s J_n(x_s)]$$

$$M(6,5) = x_z[-2(n+1)N_{n+1}(x_s) + x_s N_n(x_s)]$$

$$M(6,6) = (-2n^2 + x_s^2 + 2n)J_n(x_s) - 2x_s J_{n+1}(x_s)$$

$$M(6,7) = (-2n^2 + x_s^2 + 2n)N_n(x_s) - 2x_s N_{n+1}(x_s)$$

$$M(6,8) = 0$$

#### <Shear stress for $z$ direction at the outer radius $r = a$ >

$$c(7) = 0$$

$$M(7,1) = 0$$

$$M(7,2) = 2x_z[nJ_n(x_c) - x_c J_{n+1}(x_c)],$$

$$M(7,3) = 2x_z[nN_n(x_c) - x_c N_{n+1}(x_c)]$$

$$M(7,4) = (x_s^2 + x_z^2)J_{n+1}(x_s) - nx_s J_n(x_s)$$

$$M(7,5) = (x_s^2 + x_z^2)N_{n+1}(x_s) - nx_s N_n(x_s)$$

$$M(7,6) = x_z n J_n(x_s), M(7,7) = x_z n N_n(x_s), M(7,8) = 0$$

#### <Shear stress for $z$ direction at the inner radius $r = b$ >

$$c(8) = 0$$

$$M(8,1) = 0$$

$$M(8,2) = 2x_z[nJ_n(x_c) - x_c J_{n+1}(x_c)],$$

$$M(8,3) = 2x_z[nN_n(x_c) - x_c N_{n+1}(x_c)]$$

$$M(8,4) = (x_s^2 + x_z^2)J_{n+1}(x_s) - nx_s J_n(x_s)$$

$$M(8,5) = (x_s^2 + x_z^2)N_{n+1}(x_s) - nx_s N_n(x_s)$$

$$M(8,6) = x_z n J_n(x_s), M(8,7) = x_z n N_n(x_s), M(8,8) = 0$$

## References

1. J. W. Crispin, Jr. and K. M. Siegel, *Method of Radar Cross-section Analysis* (Academic Press, NY, 1968), pp. 281-293.
2. T. K. Stanton, "Sound scattering by cylinders of finite length. I. Fluid cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 55-63 (1988).
3. T. K. Stanton, "Sound scattering by cylinders of finite length. I. Elastic cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 64-67 (1988).
4. H. Mediwin and C. S. Clay, *Fundamentals of Acoustical Oceanography* (Academic Press, Boston, 1998), pp. 234-284.
5. J. J. Faran, Jr., "Sound scattering by solid cylinders and spheres," *J. Acoust. Soc. Am.* **23**, 405-418 (1951).
6. M. C. Junger, "Sound scattering by thin elastic shells," *J. Acoust. Soc. Am.* **24**, 366-373 (1952).
7. R. R. Goodman and R. Stern, "Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells," *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 338-344 (1962).
8. R. D. Doolittle and H. Überall, "Sound scattering by elastic cylindrical shells," *J. Acoust. Soc. Am.* **39**, 272-275 (1965).
9. R. D. Doolittle, H. Überall, and P. Uginčius, "Sound scattering by elastic cylinders," *J. Acoust. Soc. Am.* **43**, 1-14 (1967).
10. L. Flax, V. K. Varadan, and V. V. Varadan, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 1832-1835 (1980).
11. F. Léon, F. Lecroq, D. Décultot, and G. Maze, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite hollow cylindrical shell," *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 1388-1397 (1992).
12. M. T. Nhie and F. Ywanne, "Sound scattering by slender bodies of arbitrary shape," *J. Acoust. Soc. Am.* **95**, 1726-1733 (1994).
13. M. L. Rumerman, "Application of the Sommerfeld-Watson transformation to scattering of acoustic waves obliquely incident upon cylindrical shells," *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 2502-2509 (1992).
14. Z. Ye, "A novel approach to sound scattering by cylinders of finite length," *J. Acoust. Soc. Am.* **102**, 877-884 (1997).
15. H. S. Roh, D. H. Chang, S. H. Kim, and J. Y. Na, "Analysis of acoustic scattering patterns by elastic cylindrical shells" (in Korean), *J. Acoust. Soc. Kr. Suppl. 2(s)* **4**, 16-18 (1985).

16. J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solid* (North-Holland Publishing Company, NY, 1973), pp. 73-78.
17. R. Hickling, "Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water," *J. Acoust. Soc. Am.* **36**, 1124-1137 (1964).
18. P. L. Marston, "Approximate meridional leaky ray amplitudes for tilted cylinders: End-backscattering enhancements and comparisons with exact theory for infinite solid cylinders," *J. Acoust. Soc. Am.* **102**, 358-369 (1997).

### 저자 약력

▶ 이 근 화 (Keunhwa Lee)



2000년 2월: 서울대학교 조선해양공학과  
학사  
2006년 2월: 서울대학교 조선해양공학과  
박사  
2006년 ~ 2014년: 서울대학교 해양시스  
템 공항연구소 연구부교수  
2014년 ~ 현재: 세종대학교 국방시스템  
공학과 부교수

▶ 변 성 훈 (Sung-Hoon Byun)



1998년 2월: 서울대학교 조선해양공학과  
학사  
2000년 2월: 서울대학교 조선해양공학과  
석사  
2012년 8월: 서울대학교 조선해양공학과  
박사  
2000년 8월 ~ 현재: 한국해양과학기술원  
부설 선박해양플랜트연구소 책임연  
구원  
2014년 8월 ~ 2015년 8월: Georgia Institute  
of Technology 방문연구원

▶ 김 시 문 (Sea-Moon Kim)



1992년 2월: KAIST 기계공학과 학사  
1994년 8월: KAIST 기계공학과 석사  
2001년 2월: KAIST 기계공학과 박사  
2001년 3월 ~ 현재: 한국해양과학기술원  
부설 선박해양플랜트연구소 책임연  
구원  
2006년 2월 ~ 2007년 2월: Scripps Institution  
of Oceanography, UCSD 방문연구원  
(Visiting Scholar)