韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2019.33.3.395
제 33집 제 3호, 2019. 9. 395-423

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 33, No. 3, Sep. 2019. 395-423

추론 과제의 인지적 난이도 수준에 따른 추론 과정 구성요소 분석 -고등학교 수준 수열 단원을 중심으로-

오 영 석 (고려대학교 대학원 학생)

본 연구의 목적은 향후 수학교과서의 추론 과제 개발에 대한 시사점을 제공하기 위하여, 고등학교 수준 수학교과서 3종을 연구 대상으로 수열 단원에 제시된 추론 과제의 인지적 난이도 수준과 추론 과정 구성요소를 분석하는 것이다. 연구 결과, 3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제의 대부분이 인지적 난이도 수준이 낮은 것으로 나타났으며, 인지적 난이도 수준이 낮은 추론 과제는 하나의 추론 과정 구성요소만을 요구하는 것으로 나타났다. 반면에 추론 과제의 일부만이 인지적 난이도 수준이 높은 것으로 나타났으며, 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제는 다양한 추론 과정 구성요소를 요구하는 것으로 나타났다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 인지적 난이도 수준이 낮은 추론 과제보다는 학생들에게 다양한 추론 과정의 학습기회를 제공하고 추론의 본질을 심도있게 이해시킬 수 있는 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제 개발에 대한 필요성을 제시하였다.

Ⅰ. 서론

인간은 진리를 추구하기 위하여 끊임없이 노력하고 있다. 진리를 추구하는 과정에서 인간의 마음속에 내재된 불확실성이 완화되기 때문이다. 이러한 이유에서 많은 학자들은 오래전부터 마음속에 내재된 불확실성을 완화시키는 방법에 대하여 연구해왔다.

미국의 과학자이자 수학자, 혹은 기호학의 창시자로서 주목 할 수 있는 인물인 Peirce(1877)는 믿음[1]을 고정시킴으로써 인간의 마음속에 내재된 의심(또는 불확실성)을 완화시킬 수 있다고 하였다. 그는 믿음을 고정시키는 네 가지 방법을 제시하였는데 고집, 권위, 선험적, 과학적 탐구 방법이 그것이다. 그러나 모든 방법이 우리의 의심을 완화시킬 수 있는 것은 아니다. 고집, 권위, 선험적 방법은 인간적 또는 주관적이기 때문이다. 따라서 모종의 외부적 항구성에 의하여 결정되는 과학적 탐구 방법만이 우리의 의심을 완화시킬 수 있으며, 우리는 이를 추론[2]이라고 부른다. 결국 추론의 목적은 우리가 이미 알고 있는 믿음을 고찰하여 우리가 알지 못하는 새로운 믿음을 발견하는 일이다(de Waal, 2013; Peirce, 1877). 따라서 올바른 믿음을 고정하기 위해서는 타당한 추론과 타당하지 않은 추론을 구별하는 능력이 중요하다.

Peirce는 이러한 추론 능력이 문제를 해결하는 과정을 통하여 자연스럽게 성취될 수 있다고 보았는데(이윤희, 2017), 수학 교과는 이러한 추론 능력을 기를 수 있는 최상의 기회를 제공한다(Pólya, 1954). 학생들은 수학 과

* 접수일(2019년 08월 30일), 심사(수정)일(2019년 09월 11일), 게재확정일(2019년 09월 24일)
* ZDM분류 : U23
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 추론 과제, 인지적 난이도 수준, 추론 과정 구성요소

1) 믿음이란 우리가 인지하는 어떤 것으로 의심의 자극을 진정시키며, 우리의 본성 안에 행동규칙 또는 습관을 확립시키는 것이다(Peirce, 1878).

2) 추론에 대한 정의는 학자들마다 조금 씩 다르지만, 본 연구에서는 학자들이 제시한 추론의 정의를 종합하여(우정호, 2010; 이종희, 김선희, 김부미, 김기연, 2017; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2009; “Reasoning,” 1902), 추론을 이미 알고 있는 전제에 기초하여 새로운 결론을 도출하는 사고과정으로 정의하였다.

제[3]를 해결하면서 추측을 하고, 그 과정에서 패턴을 발견하고, 이를 일반화하며, 왜 그런지 조사하고, 논증을 개발하고, 그 논증이 타당한지를 평가함으로써 자신의 추론 과정을 점진적으로 개선해나가기 때문이다(교육부, 2015; Lannin, Ellis, & Elliott, 2011; NCTM, 2000). 하지만 수학교과서에 제시된 모든 과제가 학생들에게 위와 같은 추론 과정을 요구하는 것은 아니다.

이미연과 오영열(2007)은 학생들에게 인지적 난이도 수준[4]이 다른 4가지 유형[5]의 수학 과제를 제시하고, 각 과제마다 학생들이 정당화한 추론 과정이 어떻게 달라지는지를 분석하였다. 이미연과 오영열(2007)이 보고한 연구 결과에 따르면, 학생들에게 암기형 과제가 제시된 경우에는 교과서·교사·친구들의 권위에 의존하는 결과가 나타났으며, 연결성이 없는 절차 과제가 제시된 경우에는 과제를 해결하는 많은 부분에서 정당화 과정이 생략되는 결과가 나타났다. 반면에 학생들에게 인지적 난이도 수준이 높은 연결성이 있는 절차 과제 또는 탐구형 과제가 제시된 경우에는 인지적 난이도 수준이 낮은 과제에서와는 달리 학생들이 직관, 과거의 경험, 수학적 논리에 의하여 자신들의 추론 과정을 정당화하는 결과가 나타났다. 이는 인지적 난이도 수준이 높은 과제가 학생들에게 추론 과정의 학습기회를 제공하기에 적합한 과제임을 보여준다. 하지만 인지적 난이도 수준이 낮은 과제라고해서 추론 과정이 전혀 요구되지 않는 것은 아니었다.

정혜윤과 이경화(2016)는 중학교 수준의 우리나라 수학교과서와 미국에서 사용하고 있는 Geometry 교과서에 제시된 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 과제를 대상으로 과제의 구조, 증명과 추론 유형, 과제의 인지적 난이도 수준을 비교 분석하였다. 이 연구 결과에 의하면, 평행사변형 여부 결정 및 평행사변형임을 증명하는 과제는 본문의 조건 제시 여부에 따라 인지적 난이도 수준의 높낮이가 구분되는 것으로 나타났는데, 두 과제 모두 인지적 난이도 수준에 관계없이 각각 추측 조사하기와 논증 개발하기 유형의 추론 과정을 요구하는 것으로 나타났다. 따라서 정혜윤과 이경화(2016)의 연구로부터 인지적 난이도 수준이 낮은 과제 또한 추론 과정을 요구함을 알 수 있었다. 하지만 과제의 인지적 난이도 수준에 관계없이 동일한 유형의 추론 과정을 요구하는 연구 결과에 대해서는 이미연과 오영열(2007)의 연구 결과를 고려하여 보았을 때, 그 이유가 무엇인지 살펴볼 필요가 있었다. 이러한 이유에서 정혜윤과 이경화(2016)의 연구에서 사용된 분석틀을 살펴보았고, 그들이 사용한 분석틀에 제시된 증명과 추론 유형은 추론 과정에서 나타나는 대표적인 추론의 역할을 분석한 것이었기 때문에 위와 같은 연구 결과가 나타나게 되었음을 알 수 있었다. 따라서 위에서 살펴본 두 연구로부터 과제의 인지적 난이도 수준에 따라 과제가 요구하는 심층적인 추론 과정이 무엇인지 추가적인 연구가 필요하다고 할 수 있다. 하지만, 앞서 살펴본 이미연과 오영열(2007)의 연구에서 보았듯이 인지적 난이도 수준이 낮은 과제 중에서는 학생들에게 추론 과정을 요구하지 않는 경우도 있었다. 따라서 본 연구에서는 기본적으로 추론 과정을 요구하는 추론 과제[6]를 대상으로 연구를 진행하고자 하였다. 이를 위하여 수학교과서에 제시된 추론 과제를 분석하기에 적합한 단원을 탐색하였으며, 교육부(2015)에서 수학적 정당화를 통하여 추론 능력을 기를 수 있는 단원으로 명시하고 있는 수열 단원을 선정하였다.

이를 바탕으로 본 연구에서는 고등학교 수준 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제를 대상으로 인지적

---

[3] 수학적 아이디어의 발달에 도움을 주는 교실활동의 부분으로(Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000), 본 연구에서 수학과제라 함은 Stein과 Smith(1998)가 제시한 교육과정 및 수업자료 과제 단계, 교사가 설정한 과제 단계, 학생이 실행한 과제 단계 중 교육과정 및 수업자료 과제 단계에 해당하는 수학교과서에 제시된 과제를 지칭한다.

[4] 과제를 성공적으로 수행하고, 해결하기 위하여 학생들에게 요구되는 사고의 수준이다(Stein et al, 2000).

[5] Stein과 Smith(1998)는 인지적 난이도 수준이 낮은 과제의 유형으로 암기형 과제(Memorization tasks)와 연결성이 없는 절차 과제(Procedures without connections tasks)로 분류하고, 인지적 난이도 수준이 높은 과제의 유형으로 연결성이 있는 절차 과제(Procedures with connections tasks)와 탐구형 과제(Doing mathematics tasks)로 분류하였다.

[6] 본 연구에서는 추론 과제를 추론 방법에 따라 귀납적 추론, 연역적 추론, 가설적(Hypothesis) 추론, 그리고 유비추론이 사용된 과제로 정의하였다.

난이도 수준 간의 비율을 살펴보고, 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소가 무엇인지 살펴보고자 한다. 이와 더불어 학생들에게 다양한 추론 과정의 학습기회를 제공하고, 추론의 본질을 심도있게 이해시킬 수 있는 추론 과제가 무엇인지 밝힘으로써 향후 수학교과서의 추론 과제 개발에 대한 시사점을 제공하고자 한다. 이러한 연구의 목적을 위하여 다음과 같은 두 가지 연구문제를 설정하였다.

1) 고등학교 수준 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제의 인지적 난이도 수준 간의 비율은 어떠한가?
2) 고등학교 수준 수학교과서의 수열 단원에 제시된 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소는 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 추론 방법

추론 방법에 대한 정의는 학자들마다 다양하다. 이는 학자에 따라 추론 방법을 바라보는 관점이 다르기 때문이다. Peirce는 추론 방법에 대한 관점이 인간의 본능에 의하여 형성된 로지카 우텐스(Logica utens)와 로지카 우텐스의 체계적인 연구를 통하여 형성된 로지카 도센스(Logica docens)로 구분된다고 보았다(이윤희, 2017; de Waal, 2013). 로지카 우텐스는 우연적이며 본능적인 추론 방법으로, 초보적인 논리의 과학을 구성한다(이윤희, 2017; de Waal, 2013). 로지카 도센스는 타당한 추론과 그렇지 못한 추론을 구별하는 체계적인 논리로, 귀납적 추론, 연역적 추론, 가설적 추론[7]이 이에 해당한다(de Waal, 2013). Peirce는 각각의 방법을 다음과 같이 정의하였다. 귀납적 추론은 참이 되는 다수의 사례로부터 일반화를 도출하고, 그리하여 동일한 것이 전체 종류에서도 참일 것이라 추리하는 것이다(CP 2.624[8]). 연역적 추론은 진리를 수반할 결론이 없다면 어떻게 상상하든지 전제 안에 표현된 사실들만으로 참이 될 수 없다는 추론 방식으로, 전제와 결론 사이에 필연적 연관을 보여주는 것이다(CP 2.778). 그리고 가설적 추론은 우리가 매우 궁금해 하는 사건과 마주하였을 때, 그것이 어떤 일반적인 법칙의 사례였던 가정에 의하여 설명되어진다면 그 가정을 채택하는 것이다(CP 2.624). 본 연구에서는 추론 방법을 로지카 도센스의 관점에 따라 구분하고, 각 방법에 대하여 심층적으로 살펴보았다.

우정호(2010)는 귀납적 추론을 열거적 귀납 추론(또는 통계적 귀납 추론), 유비추론, 인과적 귀납 추론, 가설의 설정으로 분류하였는데, 이 중에서 인과적 귀납 추론과 가설의 설정은 주로 과학 분야에서 사용되는 귀납적 추론 유형으로 보았다. 하지만 인과적 귀납 추론의 한 유형인 공변 추론은 함수, 수열 단원에서 변화율, 공차, 공비 등의 개념과 관련이 있는 추론 방법으로 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 공변 추론을 수학에서 사용되는 귀납적 추론의 한 유형으로 분류하였다. 그리고 가설의 설정은 Peirce에 의하여 방법론적 체계인 가설적 추론으로 발전하게 되므로 본 연구에서는 가설의 설정을 귀납적 추론 유형에서 제외하였다. 또한 우정호(2010)는 유비추론을 귀납적 추론 유형으로 분류하였지만 김선희와 이종희(2002), 김선희와 김기연(2004)은 유비추론을 가설적 추론의 한 가지 유형으로 분류하였다. 이는 유비추론이 귀납적 추론과 가설적 추론의 특성을 모두 포함하고 있기 때문에 비롯된 것이다. 이에 Peirce는 유비추론을 로지카 도센스 관점에 따른 귀납적 추론과 가설적 추론이

---

[7] 가설적 추론은 Peirce가 창안한 초기 관점의 가추적 추론(Abduction)으로, 귀추적 추론(Retroduction)이라 부르기도 한다(CP 8.228).

[8] C. S. Peirce가 죽은 후, 그의 배우자인 J. Peirce는 그의 수고를 하버드 대학교 도서관에 매각하였다. 이 수고의 일부가 Collected Papers로 출판되었는데, (CP n.m)에서 CP는 Collected Papers of Charles Sanders Peirce의 약자를 일컬으며, n은 권수를, m은 단락 번호를 일컫는다.

결합된 또 다른 논리적 형식을 지닌 추론 방법으로 구분하였다(CP 1.65, 2.513). 따라서 본 연구에서는 Peirce의 관점에 따라 유비추론을 또 다른 형태의 추론 방법으로 구분하고, 추론 방법을 귀납적 추론, 연역적 추론, 가설적 추론 그리고 유비추론으로 구분하였다.

다시 귀납적 추론 유형으로 돌아와서, 본 연구에서는 앞서 서술한 내용을 종합하여 귀납적 추론 유형을 열거적 귀납 추론과 공변 추론으로 분류하고자한다. 열거적 귀납 추론과 공변 추론에 대한 정의와 과제의 예는 다음과 같다.

열거적 귀납 추론은 “어떤 집합의 구성요소의 일부를 관찰하여, 그것을 바탕으로 해서 그 집합의 구성요소 전체에 대해서 결론을 내리는 추론”(황운학, 2013, pp. 2-3)으로, [그림 Ⅱ-1]은 열거적 귀납 추론이 사용된 과제의 예이다. [그림 Ⅱ-1]의 열거적 귀납 추론 과제는 과제에 주어진 수열을 바탕으로 일반항 a_n을 구하는 과제의 예이다.

문제 3 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 추측하시오.

(1) 5, 5, 5, 5, ⋯ (2) −1, 2, −3, 4, ⋯

[그림 Ⅱ-1] 열거적 귀납 추론 과제(박교식 외, 2019, p. 106)

공변 추론은 A라는 양이 변화함에 따라 B라는 양도 변화할 때, A의 양과 B의 양 사이의 인과 관계를 판단하는 추론으로(황운학, 2013), 여기서 A의 양과 B의 양 사이의 관계를 조정하는 것이 공변이다(Confrey, & Smith, 1994). [그림 Ⅱ-2]는 공변 추론이 사용된 과제의 예이다. [그림 Ⅱ-2]의 공변 추론 과제는 항이 변화함에 따라 항의 값도 변화하고 있는 주어진 수열을 바탕으로 항과 항의 값 사이의 관계를 조정하는 공비를 구하는 과제의 예이다.

문제 1 다음 수열이 등비수열일 때, 그 공비를 구하시오.

(1) −2, 4, −8, 16, ⋯ (2) 192, 96, 48, 24, ⋯

[그림 Ⅱ-2] 공변 추론 과제(박교식 외, 2019, p. 115)

다음으로 연역적 추론 유형을 살펴보고자 한다. 우정호(2007)는 수학에서의 연역적 추론을 엄밀한 증명으로 보았는데, 조수진(2006)은 학교수학에서 사용되는 연역적 추론 유형으로 긍정식, 삼단논법, 부정식, 연역적 정리, 경우에 따른 증명, 수학적 귀납법, 대우, 반례, 간접증명의 유형으로 분류하였다. 각각의 연역적 추론 유형과 과제의 예는 다음과 같다.

긍정식은 학교수학에서 가장 자주 사용되는 연역적 추론 유형으로 “p가 참이고, $p \rightarrow q$이면, q는 참”(조수진, 2006, p. 7)임을 이끌어내는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-3]은 긍정식이 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

명제 ‘ 두 함수 $y=2x+4$ 와 $y=3x-1$의 그래프는 만난다.’가 참임을 증명해 보자.

[증명]

(p) : 두 함수 $y=2x+4$ 와 $y=3x-1$의 기울기는 각각 2와 3이므로 다르다.

(p → q) : 두 함수의 기울기가 다르면, 두 함수의 그래프는 서로 만난다.

(q) : 따라서, 이 두 함수의 그래프는 만난다.

[그림 Ⅱ-3] 긍정식 과제(조수진, 2006, p. 8)

삼단논법은 수학뿐만 아니라 타 교과에서도 많이 사용되는 연역적 추론 유형으로 “$p \rightarrow q$가 참이고, $q \rightarrow r$이 참이면, $p \rightarrow r$은 참”(조수진, 2006, p. 8)임을 이끌어내는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-4]는 삼단논법이 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

먼저 다음 두 정리가 이미 증명되었다고 하자.

정리 1 : 한 삼각형의 두 각이 다른 삼각형의 두 각과 서로 같으면 (p), 이 두 삼각형의 세 각 모두는 서로 같다 (q).

정리 2 : 두 삼각형의 세 각 모두가 서로 같으면 (q), 이 두 삼각형은 서로 닮음이다 (r).

정리 3 : 한 삼각형의 두 각이 다른 삼각형의 두 각과 서로 같으면 (p), 이 두 삼각형은 서로 닮음이다 (r).

[그림 Ⅱ-4] 삼단논법 과제(조수진, 2006, p. 9)

부정식은 긍정식이나, 삼단논법보다 다소 까다로운 연역적 추론 유형으로 “$p \rightarrow q$가 참이고, $\sim q$가 참이면, $\sim p$는 참”(조수진, 2006, p. 9)임을 이끌어내는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-5]는 부정식이 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

명제 ‘한 변의 길이가 3인 정사각형과 한 변의 길이가 5인 정사각형은 합동이 아니다’가 참임을 증명해 보자.

[증명]

(p → q) : 두 도형이 합동이면 두 도형의 넓이는 같다.

(~q) : 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이는 9이고 한 변의 길이가 5인 정사각형의 넓이는 25이므로 두 정사각형의 넓이는 다르다.

(~p) : 따라서 두 정사각형은 합동이 아니다.

[그림 Ⅱ-5] 부정식 과제(조수진, 2006, pp. 9-10)

연역적 정리는 평면기하에서 많이 사용되는 연역적 추론 유형으로 “만약 주어진 가정 p와 참인 진술문 $q_1, q_2, \cdots, q_n$으로부터 r을 연역할 수 있다면, $q_1, q_2, \cdots, q_n$으로부터 $p \rightarrow r$을 연역”(조수진, 2006, p. 10)해내는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-6]은 연역적 정리가 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

명제 ‘삼각형의 두 변의 길이가 같을 때, 끼인각이 60°라면 정삼각형이다’가 참임을 증명해 보자.

[증명]

(p) : 삼각형의 끼인각이 60°이다.

(q_1) : 삼각형에서 두 변의 길이가 같다.

((p, q_1) → r) : 삼각형에서 끼인각이 60°이고 두변의 길이가 같으므로 두 밑각은 각각 60°가 되므로 정삼각형이 된다.

(q_1 → (p → r)) : 따라서 삼각형의 두 변의 길이가 같을 때, 끼인각이 60°라면 정삼각형이다.

[그림 Ⅱ-6] 연역적 정리 과제(조수진, 2006, p. 11)

경우에 따른 증명은 상대적으로 직관적인 연역적 추론 유형으로 "$p_1 \to q, p_2 \to q, \cdots, p_n \to q$가 참이면, $(p_1 \text{or}\, p_2 \text{or} \ \ldots p_n) \to q$"(조수진, 2006, p. 12)임을 이끌어내는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-7]은 경우에 따른 증명이 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

예를 들어.

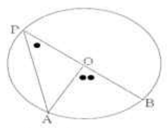
명제 ' 원O에서 호 AB에 대한 원주각 ∠APB의 크기는 점P의 위치에 관계없이 ∠APB = $\frac{1}{2}$∠AOB 이다' 가 참임을 증명해 보자.

원주각 ∠APB와 원의 중심O와의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라 다음 그림과 같이 중심O가 원주각 ∠APB의 한 변 위에 있는 경우 (즉, $\overline{PB}$위에 있는 경우), 원주각 ∠APB의 내부에 있는 경우, 원주각 ∠APB의 외부에 있는 경우와 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

(경우 1) : $p_1 \to$ q : O가 $\overline{PB}$위에 있다면

∠APB = $\frac{1}{2}$∠AOB 이다.

[증명]



△OPA에서 $\overline{OP}$, $\overline{OA}$는 반지름이므로 $\overline{OP}$ = $\overline{OA}$ 이다.

따라서 △OPA는 이등변 삼각형이다. 즉, ∠OPA = ∠OAP 이다.

삼각형의 한 외각 ∠AOB의 크기는 이웃하지 않는 두 내각 ∠OPA와 ∠OAP의 크기의 합과 같으므로 ∠AOB = ∠OPA + ∠OAP 이다.

따라서 ∠APB = ∠OPA = $\frac{1}{2}$∠AOB이다.

(경우 2) : $p_2 \to$ q : O가 원주각 ∠APB의 내부에 있다면

∠APB = $\frac{1}{2}$∠AOB 이다.

(경우 3) : $p_3 \to$ q : O가 원주각 ∠APB의 외부에 있다면

∠APB = $\frac{1}{2}$∠AOB 이다.

경우 2와 경우 3의 증명은 경우 1과 유사하므로 생략한다.

$(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$ → q : 원O에서 호AB에 대한 원주각 ∠AOB의 크기는 점P의 위치에 관계없이 ∠APB = $\frac{1}{2}$∠AOB 이다.

[그림 Ⅱ-7] 경우에 따른 증명 과제(조수진, 2006, pp. 12-14)

명제 ' 모든 자연수 n에 대하여 $1+2+\cdots+n= \frac{n\ (n+1)}{2}$'이 성립함을 보여라.

[증명]

P(1) : 1 = 1이므로 P(1)은 참이다.

P(k) : $1+2+\cdots+k= \frac{k(k+1)}{2}$가 참이라고 가정할 때

P(k+1) : $1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$

즉, P(k) → P(k+1) 가 참이다.

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $1+2+\cdots+n= \frac{n\ (n+1)}{2}$이 성립한다.

[그림 Ⅱ-8] 수학적 귀납법 과제(조수진, 2006, p. 15)

수학적 귀납법은 무한 번의 삼단논법을 단 하나의 형식으로 환원하는 연역적 추론 유형으로(Poincaré, 1952), "만약 임의의 집합에 있는 첫 번째 자연수가 성질 P를 만족하고 이 집합의 k번째 수가 성질 P를 만족한다고 할 때 각 k에 대해 $k+1$도 이 성질 P를 만족한다면, 이 집합의 모든 수 n은 이 성질 P를 만족한다고 결론"(조수진, 2006, p. 15)내리는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-8]은 수학적 귀납법이 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

대우는 대우 명제를 사용하여 증명하는 연역적 추론 유형으로 "$\sim q \rightarrow \sim p$가 참이면, $p \rightarrow q$는 참"(조수진, 2006, p. 16)임을 이끌어내는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-9]는 대우가 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

명제 '실수 x, y에 대하여, $x^2 + y^2 \neq 0$이면 $x \neq 0$ 이거나 $y \neq 0$이다.'가 참임을 증명해 보자.

[증명]

(~q → ~p) : $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이면 $x^2 + y^2 = 0$ 이다.

이 명제가 참이므로 대우 명제인 p → q는 참이다.

따라서 (p → q) : $x^2 + y^2 \neq 0$이면 $x \neq 0$ 이거나 $y \neq 0$이다.

[그림 Ⅱ-9] 대우 과제(조수진, 2006, p. 16)

반례는 명제의 참과 거짓을 밝힐 때 자주 쓰이는 연역적 추론 유형으로 "임의의 집합 S의 모든 원소들이 P라는 성질을 가진다는 명제를 제기하고, 집합 S에는 속하지만 P라는 성질을 가지지 않는 원소 x를 찾아서 이 명제가 거짓이라고 결론"(조수진, 2006, p 17)내리는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-10]은 반례가 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

예를 들어 명제 ' 집합 S= { x| x는 소수} 의 모든 원소는 홀수이다'가 참인지 거짓인지 알아보아라.

[증명] 거짓이다. 왜냐하면 $2 \in S$이지만 홀수가 아니다.

[그림 Ⅱ-10] 반례 과제(조수진, 2006, p. 17)

명제 ' 두 실수의 곱이 0이면, 이들 중 적어도 어느 한 실수는 0이어야 한다'가 참임을 증명해 보자.

[증명]

(p) : a, b가 임의의 두 실수라 하고, 주어진 명제의 가정에 의해 ab=0이라 하자.

(~q) : a $\neq 0$ 이고 b $\neq 0$ 이라 하자.

(r) : b $\neq 0$ 이다.

a의 곱셈에 대한 역원인 $\frac{1}{a}$이 존재한다. 그러면 곱셈의 결합법칙과 곱셈의 역원에 대한 정의로부터 ab=0 의 양변에 $\frac{1}{a}$을 곱하면 다음과 같다.

$(\frac{1}{a})(ab) = (\frac{1}{a})(0)$

$(\frac{1}{a}a)b = 0$

(~r) : b = 0

즉 r 과 ~r을 동시에 유도 하였다.

[그림 Ⅱ-11] 간접 증명법 과제(조수진, 2006, p. 19)

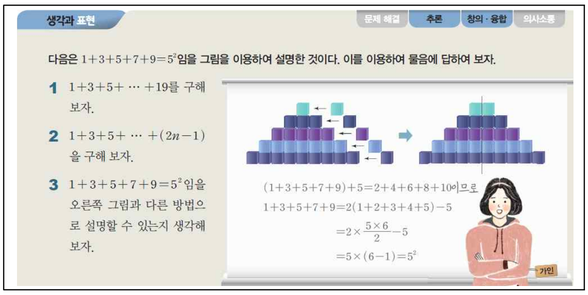
간접 증명법은 가정에서 결론으로 순서대로 유도하지 않고, 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 결론이 성립함을 보이는 연역적 추론 유형으로(우정호, 2007), "$p \rightarrow q$를 간접 증명하려면, 먼저 p와 $\sim q$를 참이라고 가

정하고, 이로부터 어떤 명제 r과 $\sim r$이 동시에 참이라는 모순을 유도”(조수진, 2006, p. 19)하는 증명 방법이다. [그림 Ⅱ-11]은 간접 증명법이 사용된 연역적 추론 과제의 예이다.

다음으로 가설적 추론을 살펴보고자 한다. 가설적 추론은 가설 또는 일반 명제를 공식화하는데 필수적인 추론으로 가설을 위한 증거를 제공하는 기능을 한다(Liszka, 1996). 하지만 가설적 추론은 가설을 시험하는 것이지 확증을 위한 것은 아니다(이윤희, 2017; Liszka, 1996). 따라서 가설적 추론은 귀납적 추론을 통한 검증과 확인이 필요하다(이윤희, 2017). [그림 Ⅱ-12]는 가설적 추론이 사용된 과제의 예이다. [그림 Ⅱ-12]는 가설적 추론 과제로 등차수열이면서 등비수열인 수열이 존재한다는 가설을 뒷받침할 수 있는 예가 무엇인지 찾는 과제이다.

[그림 Ⅱ-12] 가설적 추론 과제(박교식 외, 2019, p. 118)

마지막으로 또 다른 추론 방법으로 구분되는 유비추론을 살펴보고자 한다. 유비추론에 대한 정의는 학자들마다 다양하다. Peirce는 유비추론을 다양한 측면에서 일치하는 대상의 작은 집합이 또 하나의 측면에서도 일치할 가능성 높다는 것을 추리하는 것(CP 1.69)으로 정의하고 있다. Gentner(1983, 1989)는 유비추론을 토대라고 부르는 지식의 원천이 되는 영역을 목표라고 부르는 설명되어질 영역으로 구조도를 전이시키는 것으로 정의하고 있고, 황운학(2013)은 유비추론을 두 개의 대상의 속성이 동일하다는 사실을 근거로 그것들의 기타 속성도 동일하리라는 결론을 이끌어내는 추론 방법으로 정의하고 있다. 이를 종합하면, 유비추론은 토대가 되는 작은 집합의 대상이 다양한 측면에서 일치한다는 사실을 근거로 목표가 되는 또 하나의 측면에서도 일치하리라는 결론을 이끌어내는 추론 방법으로 정의할 수 있다. 수학 학습에서 유비추론의 예는 학생들이 토대가 되는 구체물이나 그림, 다이어그램에 의한 표현을 목표가 되는 수학적 개념으로 전이시키는 과정에서 발견된다(English, 1993, 1997, 1999). [그림 Ⅱ-13]은 유비추론이 사용된 과제의 예로 어떤 블록 형태의 표현이 홀수의 합에 대한 수학적 아이디어로 전이될 수 있는지를 생각해보는 과제이다.



[그림 Ⅱ-13] 유비추론 과제(박교식 외, 2019, p. 133)

2. 과제의 인지적 난이도 수준

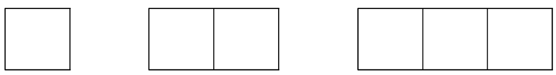
학생들에게 어떤 과제가 제공되는지에 따라 학생들이 경험할 수 있는 학습기회는 달라진다. 루틴에 따라 암기한 절차를 그대로 수행하도록 제시된 과제와 개념, 의미 또는 관계된 수학적 아이디어를 연결하는 과제가 학생들에게 제공하는 학습기회가 다르기 때문이다. 이러한 이유에서 Stein 외(2000)는 학습 목표에 따라 학생들에게 암기 또는 간단한 정형적인 절차에 초점을 둔 과제와 수학적 과정, 개념, 관계의 본질을 심도있게 이해할 수 있는 학습기회를 제공하는 과제가 무엇인지 조사하였다. 그들은 인지적 난이도 관점에서 과제가 지니고 있는 사고의 깊이와 복잡성을 판단하였으며, 판단 기준에 따라 과제의 인지적 난이도 수준을 낮은 수준과 높은 수준으로 분류하고, 각 수준마다 두 가지의 과제 유형을 제시하였다(Stein, & Smith, 1998; Stein 외, 2000). 그들은 인지적 난이도 수준이 낮은 과제의 유형으로 암기형 과제와 연결성이 없는 절차 과제를 제시하였으며, [그림 Ⅱ-14]는 암기형 과제의 예이며 [그림 Ⅱ-15]는 연결성이 없는 절차 과제의 예이다. [그림 Ⅱ-14]는 이전에 배웠던 정보를 상기하고, 이해를 필요로 하지 않는 과제이기 때문에 암기형 과제로 분류되었다(Stein 외, 2000). [그림 Ⅱ-15]는 둘레를 알아내는 절차를 제공하지만 의미와의 연결성을 제공하지 않기 때문에 연결성이 없는 절차 과제로 분류되었다(Stein 외, 2000).

주어진 소수를 분수와 백분율로 나타내시오.

0.20 = __ = __	0.25 = __ = __	0.33 = __ = __
0.50 = __ = __	0.66 = __ = __	0.75 = __ = __

[그림 Ⅱ-14] 암기형 과제(Stein 외, 2000, p. 19)

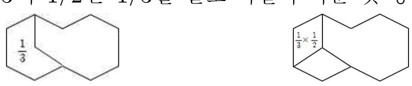
정사각형 패턴 타일의 한 변의 길이를 기본단위로 사용할 때, 아래의 패턴 블록 그림에 제시된 기차의 둘레의 길이를 구하시오.



기차 1 기차 2 기차 3

[그림 Ⅱ-15] 연결성이 없는 절차 과제(Stein 외, 2000, p. 19)

1/3의 1/2은 1/3을 둘로 똑같이 나눈 것 중 하나이다.

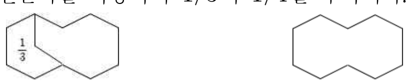


1/3 1/3의 1/2 또는 1/3×1/2=1/6

패턴블록을 사용하여 1/4의 1/3을 구하여라. 답을 그림에 나타내시오.

1/4 1/4의 1/3 또는 1/4×1/3=□

패턴블록을 사용하여 1/3의 1/4을 구하여라. 답을 그림에 나타내시오.



1/3 1/3의 1/4 또는 1/3×1/4=□

[그림 Ⅱ-16] 연결성이 있는 절차 과제(Stein 외, 2000, p. 19)

또한 그들은 인지적 난이도 수준이 높은 과제의 유형으로 연결성이 있는 절차 과제와 탐구형 과제를 제시하였으며, [그림 Ⅱ-16]은 연결성이 있는 절차 과제의 예이며 [그림 Ⅱ-17]은 탐구형 과제의 예이다. [그림 Ⅱ-16]은 분수의 분수를 구하는 절차가 제공되지만 절차와 의미가 연결되어있기 때문에 연결성이 있는 절차 과제로 분류되었다(Stein 외, 2000). [그림 Ⅱ-17]은 과제에 예상 가능한 해결 방법이 제시되지 않았고 복잡한 사고를 요구하기 때문에 탐구형 과제로 분류되었다(Stein 외, 2000).

학교 과학 동아리에서 자연 사진 관련 특별 프로젝트를 하기로 결정하였다. 다양한 날씨 상황에서 자연 사진을 300장 이상 찍은 후, 최종적으로 가장 잘 찍은 사진의 일부를 전시하고 자연 사진 대회에 출품하기로 하였다. 동아리에서는 35mm 카메라를 구입할 생각이었지만, 동아리의 누군가가 일회용 카메라를 사는 것이 더 나을 수도 있다고 제안하였다. 자동 초점과 자동 노출 기능이 있는 일반카메라의 가격은 약 40달러이며, 24컷 필름카메라의 가격은 3.98달러, 36컷 필름카메라의 가격은 5.95달러이다. 세 개씩 포장되어있는 일회용카메라의 가격은 20달러이며 두 개는 24컷, 한 개는 27컷 촬영을 할 수 있다. 일회용 카메라 낱개의 가격은 8.95달러이다. 동아리 임원들은 어떤 선택이 가장 나은 선택인지 결정하고 이를 동아리 고문에게 정당화해야 한다. 어떤 카메라를 구입해야 하는가? 자신의 추론을 명확하게 설명하고 이를 정당화하여라.

[그림 Ⅱ-17] 탐구형 과제(Stein 외, 2000, p. 19)

그들은 Stein과 Smith(1998)의 연구 결과를 바탕으로 과제의 인지적 난이도 수준을 분류하는 구체적인 지침을 <표 Ⅱ-1>과 같이 제시하였다. 다만 과제 분석 시, 제시된 과제의 인지적 난이도 수준을 분류함에 있어 계산기와 같은 테크놀로지 사용, 구체적 조작물 사용, 실세계 맥락 제공 등과 같이 과제의 표면적인 특징이 다양하다고 하여 과제의 인지적 난이도가 높아지는 것은 아니므로 과제 분석에 주의가 필요하다(Smith, Stein, Arbaugh, Brown, & Mossgrove, 2004; Stein 외, 2000).

<표 Ⅱ-1> 과제의 인지적 난이도 수준 분석 지침(Stein 외, 2000)

낮은 난이도 수준	높은 난이도 수준
<u>암기형 과제</u> · 이전에 학습하였던 사실, 규칙, 공식 또는 정의를 재현하거나 이를 기억하는 것과 관련된다. · 절차가 존재하지 않거나 과제를 수행하는데 사용 가능한 시간이 짧기 때문에 절차를 사용해서 문제를 해결할 수 없다. · 불분명하지 않다. 이전에 접했던 자료를 그대로 재현하는 과제이며 재현할 내용이 직접적으로 명확히 언급되어 있다. · 학습하거나 재현할 사실, 규칙, 공식, 정의에 기초가 되는 개념이나 의미와 관련이 없다. <u>연결성이 없는 절차 과제</u> · 알고리즘적이다. 구체적으로 요구되는 절차를 사용하거나 이전의 수업, 경험 또는 과제의 배치에 기초한 명확한 절차를 사용한다.	<u>연결성이 있는 절차 과제</u> · 수학적 개념과 아이디어를 깊은 수준까지 이해시킬 목적으로 학생들에게 절차 사용에 중점을 두게 한다. · 기반이 되는 개념이 불분명한 제한된 알고리즘이 아닌 개념적 아이디어와 밀접한 연결을 가지고 일반적이며 광범위한 절차를 (명시적으로나 암묵적으로) 따를 것을 제안한다. · 보통 다양한 표상(예. 시각적인 다이어그램, 구체물, 기호, 문제 상황)의 방식으로 나타낸다. 다양한 표상들 사이에서 연결을 만드는 것은 의미를 개발하는데 도움을 준다. · 어느 정도의 인지적인 노력을 요구한다. 일반적인 절차를 따를지라도 아무 생각 없이 따를 수는 없다. 학생들이 과제를 성공적으로 수행하고 이해하기 위해서 절차에 기반이 되는 개념적 아이디어를

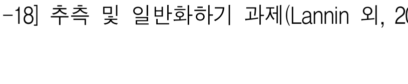
· 과제의 성공적인 수행에 필요한 제한적인 인지적 난이도를 요구한다. 무엇을 할 필요가 있고 어떻게 해야 하는지가 애매하지 않다. · 사용되는 절차에 기반이 되는 개념이나 의미와 관련이 없다. · 수학적으로 이해시키는 것보다는 정답을 구하는데 중점을 두고 있다. · 설명이 필요 없거나, 단지 사용된 절차를 기술하는 것에만 중점을 두고 있다.	사용해야 한다. <u>탐구형 과제</u> · 복잡하고 비알고리즘적인 사고를 요구한다(즉, 과제, 과제 지도, 잘 풀리는 예제를 통하여 명백하게 제시된 예상 가능하거나 미리 연습된 접근 또는 방법이 아니다). · 학생들이 수학적 개념, 절차, 관계의 특성을 탐구하고 이해할 것을 요구한다. · 자신의 인지 과정을 스스로 모니터링하고 조절해야 한다. · 학생들이 관련 지식과 경험을 접하고 과제를 수행하면서 이를 적절히 사용할 것을 요구한다. · 학생들이 과제를 분석하고, 해결전략 및 풀이를 제한하는 과제 제약을 능동적으로 조사할 것을 요구한다. · 상당한 인지적인 노력이 필요하며 예측 불가능한 해결 과정의 특성 때문에 학생들에게 어느 정도의 불안을 유발한다.

3. 추론 과정 구성요소

추론의 목적이 기존의 믿음에 의심이 발생하여 추론을 통하여 새로운 믿음을 발견할 수 있도록 하는 것이라면, 추론의 본질은 추론을 통하여 올바른 믿음에 고정될 수 있도록 타당한 추론과 타당하지 않은 추론을 구별하는 것이다. 따라서 Lannin 외(2011)가 언급하고 있듯이, 추론의 과정에는 새로운 진술에 대한 추측을 생성하고 규칙을 발견하거나 일반화하는 과정뿐만 아니라 일반화된 진술이 왜 옳은지 또는 왜 옳지 않은지 조사하는 과정과 이를 정당화하거나 반박하는 평가의 과정을 통하여 올바른 믿음에 고정될 수 있도록 하는 개선의 과정이 필요하다. 이러한 추론 과정을 고려하여 Lannin 외(2011)는 학교수학에서 학생들의 추론 과정 중에 나타나는 구성요소로 추측 및 일반화하기, 왜 그런지 조사하기, 정당화 및 반박하기를 추출하였다.

추측 및 일반화하기는 현재는 참인 것으로 판단할 수 없지만 잠정적으로 참이 될 것으로 보이는 진술을 생성하는 과정에서 사례 간의 공통점을 확인하거나 그 범위를 확장하는 추론 과정 구성요소이다(Lannin 외, 2011). [그림 Ⅱ-18]은 추측 및 일반화하기가 요구되는 추론 과제의 예이다.

한 극장의 첫 줄에 7개의 좌석이 있다. 윗 줄로 올라갈 때 마다 좌석의 수는 동일하게 증가한다. 4번째 줄, 5번째 줄, 10번째 줄, 그리고 138번 째 줄에는 좌석이 몇 개 있는가? 어떤 줄에 있는 좌석이 몇 개인지 구할 수 있는 규칙을 작성하시오. 아래는 극장에 첫 번째 줄부터 세 번째 줄까지의 그림이다.



[그림 Ⅱ-18] 추측 및 일반화하기 과제(Lannin 외, 2011, p. 25)

왜 그런지 조사하기는 어떤 일반화된 진술이 왜 참인지 또는 거짓인지 설명할 수 있는 여러 가능성을 조사하는 추론 과정 구성요소이다(Lannin 외, 2011). [그림 Ⅱ-19]는 왜 그런지 조시하기가 요구되는 추론 과제의 예이다.

메리는 각 상자마다 구슬이 4개 씩 들어가 있는 상자 5개를 가지고 있고, 사라는 각 상자마다 구슬이 5개 씩 들어가 있는 상자 4개를 가지고 있다. 누가 구슬을 더 많이 가지고 있는가?

[그림 Ⅱ-19] 왜 그런지 조사하기 과제(Lannin 외, 2011, p. 30)

정당화 및 반박하기는 이미 알려진 아이디어를 바탕으로 논리적인 주장을 함으로써 어떤 진술이 왜 참인지를 납득시키거나 특정 진술이 거짓임을 논증하는 추론 과정 구성요소이다(Lannin 외, 2011). [그림 Ⅱ-20]은 정당화 및 반박하기가 요구되는 추론 과제의 예이다.

두 분수 $\frac{3}{4}$과 $\frac{6}{8}$이 왜 동치인지 설명하시오.

[그림 Ⅱ-20] 정당화 및 반박하기 과제(Lannin 외, 2011, p. 36)

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 수열 단원이 포함된 고등학교 수준의 수학교과서 총 9종 중 현장 점유율이 높은 것으로 추정되는 3종(김원경 외, 2019; 류희찬 외, 2019; 황선욱 외, 2019)을 선정하였으며, 선정된 3종의 수학교과서는 편의상 임의대로 T1, T2, T3로 표기하였다.

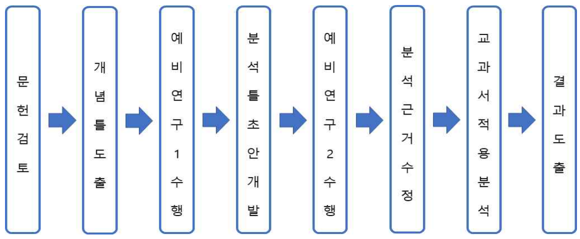
3종의 수학교과서는 출판사마다 중단원 및 소단원을 나누는 기준과 단원 내용 구성에서 약간 씩 차이를 보였다. 따라서 3종의 수학교과서를 종합하여 중단원명을 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법으로 일관되게 분류하고, 소단원명을 수열의 뜻, 등차수열, 등비수열, 여러 가지 수열의 합, 수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법으로 일관되게 분류하였다. 단원의 내용 구성 또한 단원 도입, 준비학습, 생각 및 탐구하기, 보기, 예제, 문제, 수학 교과 역량, 중단원 문제, 대단원 문제, 수학 읽기 자료로 일관되게 분류하였다. 하지만 본 연구의 목적에 따라 추론 과제가 제공되지 않는 단원 도입과 수학 읽기 자료, 답이나 풀이가 제시된 보기 및 예제와 같이 연구 목적에 적합하지 않은 내용은 연구 대상에서 제외하였다. 따라서 본 연구에서는 3종의 수학교과서에 포함된 준비학습, 문제, 수학 교과 역량, 중단원 문제, 대단원 문제 내용에 제시된 수학 과제로부터 추출한 추론 과제의 텍스트를 연구 대상으로 선정하였다. 또한, 하나의 추론 과제에 여러 소 과제가 포함된 경우에는 과제가 요구하는 추론 방법에 따라 하나의 과제 또는 그 이상으로 분류하였다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 추론 과제의 텍스트를 분석할 수 있는 분석틀을 개발하고자 하였으며, 추론 과제의 텍스트를 분석하기에 적합한 연구 방법론으로 질적 내용분석법[9]을 사용하였다. 질적 내용분석법은 접근 방법에 따라 전통

[9] 질적 내용분석법은 자료를 분석하고 자료의 의미를 해석하는 질적 연구방법 중의 하나이며(손행미, 2017, p. 57), 주어

적(conventional), 지시적(directed), 총괄적(summative) 내용분석 과정으로 분류되는데(Hsieh, Shannon, 2005), 본 연구에서는 지시적 내용분석[10] 과정에 따라 분석틀을 개발하고, [그림 Ⅲ-1]의 절차에 따라 연구를 진행하였다.



[그림 Ⅲ-1] 연구 절차

우선 국내외 문헌 검토를 바탕으로 추론 방법, 과제의 인지적 난이도 수준, 추론 과정 구성요소에 대한 범주를 도출하고, 각 범주를 조작적으로 정의하여 개념틀을 도출하였다. 예비 연구1에서는 개념틀을 사용하여 연구 대상에 포함되지 않은 1종의 고등학교 수준 수학교과서(박교식 외, 2019)의 수열 단원에 제시된 추론 과제의 텍스트를 분석하였다. 그리고 예비 연구1의 분석 결과를 바탕으로 추론 방법 개념틀에서 삼단논법, 부정식, 연역적 정리, 경우에 따른 증명, 대우, 간접 증명 범주를 정련하고 항등식을 이용한 증명 범주를 추가적으로 생성하였으며, 과제의 인지적 난이도 수준 개념틀에서 암기형 범주를 정련하여 분석틀 초안을 개발하였다. 예비 연구2에서는 연구 대상으로 선정된 3종의 고등학교 수준 수학교과서의 수열 단원에 포함된 중단원을 한 단원 씩 무작위로 뽑아 분석틀 초안을 사용하여 추론 과제의 텍스트를 분석하고, 예비 연구2의 분석 결과를 바탕으로 예비 연구1에서 정련되었던 암기형 범주를 다시 생성하여 최종 분석틀을 개발하였다. 이와 같이 본 연구에 앞서 수행한 두 번의 예비 연구를 통하여 연구의 신뢰도를 높일 수 있었으며, 예비 연구 결과에 대한 수학교육 전문가의 검토 및 피드백을 통하여 연구의 타당도를 높일 수 있었다.

3. 분석틀

예비 연구의 분석 결과를 바탕으로 개발한 최종 분석틀은 <표 Ⅲ-1>, <표 Ⅲ-2>, <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 고등학교 수준 수열 단원에 제시된 추론 과제의 추론 방법 분석틀

방법	유형	분석 근거
귀납적 추론 [I]	열거적 귀납 추론 [EI]	1. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료를 바탕으로 일반항을 구하는 과제 2. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료를 바탕으로 수열의 합을 구하는 과제 3. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료로부터 결론을 도출하고 이를 바탕으로 특정 값을 구하는 과제 4. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료를 바탕으로 이웃하는 항 사이의 관계식을 구하는 과제
	공변 추론 [CR]	1. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료를 바탕으로 공차 또는 공비를 확인하거나 구하는 과제

진 자료의 내용이 함축하고 있는 특징을 특정한 분석 준거나 관점에 근거하여 주관적으로 해석함으로써 내용의 주제나 패턴을 확인하는 방법이다(김영천, 1997; 손행미, 2017; 최성호, 정정훈, 정상원, 2016).

10) 지시적 내용분석은 기존 이론이나 선행 연구를 사용하여 내용분석을 하는 것으로, 기존 이론이나 개념틀을 개념적으로 확장하거나 타당성을 확인할 목적으로 사용하기에 적합한 연구 설계이다(손행미, 2017; Hsieh, Shannon, 2005).

연역적 추론 [D]	긍정식 [MP]	1. 과제에 주어진 텍스트를 긍정식의 방법으로 증명하는 과제
	수학적 귀납법 [MI]	1. 과제에 주어진 텍스트를 수학적 귀납법으로 증명하는 과제
	반례 [CE]	1. 과제에 주어진 텍스트가 왜 거짓인지 판단하는 과제
	항등식을 이용한 증명 [PI]	1. 과제에 주어진 텍스트를 주어진 항등식을 이용하여 증명하는 과제
가설적 추론 [H]		1. 과제에 주어진 가설 또는 일반 명제를 공식화할 수 있는 사례나 조건을 제시하는 과제
유비 추론 [A]		1. 과제에 주어진 구체물, 그림, 다이어그램 등의 표상을 설명하고자하는 수학적 개념으로 전이시켜 두 영역 사이의 관계적 대응을 발견하도록 하는 과제

<표 III-2> 고등학교 수준 수열 단원에 제시된 추론 과제의 인지적 난이도 수준 분석틀

수준	유형	분석 근거
낮은 수준 [LL]	암기형 [M]	1. 본문에 제시된 사실, 규칙, 공식 또는 정의를 확인하는 과제 2. 이전 학년에서 학습하였던 사실, 규칙, 공식 또는 정의를 확인하는 과제 3. 주어진 과제에 이미 구하고자 하는 답이 제시되어 있어 절차 없이 해결이 가능한 과제
	연결성이 없는 절차 [PNC]	1. 본문의 개념 설명 또는 보기, 예제에 과제를 해결하는 접근 방법이 제시되어 있어 해결 절차가 불분명하지 않은 과제 2. 수학적인 이해보다는 정답을 구하는데 중점을 두는 과제 3. 과제에서 요구하는 절차의 일부가 주어져있어 그 절차에 따라 해결하면 되는 과제
높은 수준 [HL]	연결성이 있는 절차 [PWC]	1. 수학적 개념이나 아이디어를 깊은 수준까지 이해시키기 위한 목적으로 과제에 주어진 표상(예. 시각적인 다이어그램, 구체물, 기호, 문제 상황)을 수학적 개념이나 아이디어와 연결하는 과제
	탐구형 [DM]	1. 과제에 주어진 텍스트가 참인지 또는 거짓인지 판단하기에 적합한 증명을 하거나 비알고리즘적인 형태의 반례를 제시하는 과제 2. 과제를 해결할 수 있는 다양한 방법을 요구하는 과제 3. 과제에 주어진 텍스트가 성립하도록 하는 조건이 무엇인지 조사하고 분석하는 과제

<표 III-3> 고등학교 수준 수열 단원에 제시된 추론 과제의 추론 과정 구성요소 분석틀

구성요소	분석 근거
추측 및 일반화하기 [CG]	1. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료를 바탕으로 사례 전체를 일반화하는 과제 2. 과제에 주어진 사례 또는 사례와 관련된 자료를 바탕으로 특정 값을 추측하는 과제 3. 본문의 개념 설명의 적용가능성을 고려하여 과제에 주어진 텍스트가 참인지 또는 거짓인지 추측하는 과제 4. 특정 패턴을 새로운 구조의 패턴으로 확장하는 과제
왜 그런지 조사하기 [IW]	1. 과제에 주어진 텍스트 또는 자신이 제시한 진술이 왜 참인지 또는 거짓인지 설명할 수 있는 여러 가지 가능성을 조사하는 과제
정당화 및 반박하기 [JR]	1. 과제에 주어진 텍스트가 왜 참인지 증명하거나 수학적 아이디어를 적용하여 정당화하는 과제 2. 과제에 주어진 텍스트가 왜 거짓인지 반박하는 과제

Ⅳ. 연구 결과

1. 추론 과제 추출

본 절에서는 연구 대상으로 선정된 3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 수학 과제를 대상으로 추론 방법 분석틀을 사용하여 추론 과제를 추출하였다.

3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 전체 과제 367개를 대상으로 추론 과제를 추출한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다. 추론 과제의 개수는 총 293개로 그 중에서 귀납적 추론[I] 과제가 84.6%(248개), 연역적 추론[D] 과제가 13.3%(39개), 가설적 추론[H] 과제가 0.7%(2개), 유비추론[A] 과제가 1.4%(4개)를 차지하는 것으로 나타났다.

3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제의 추출 결과를 좀 더 세부적으로 살펴보면 다음과 같다. I 과제의 경우 <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>과 같이 열거적 귀납 추론[EI], 공변 추론[CR] 분석 근거에 의하여 EI 과제, CR 과제로 분류되었으며, 분석 결과 EI 과제는 79.5%(233개), CR 과제는 5.1%(15개)로 EI 과제가 I 과제에서 상대적으로 높은 비율을 차지하고 있었다. D 과제의 경우 <표 Ⅳ-4>, <표 Ⅳ-5>, <표 Ⅳ-6>, <표 Ⅳ-7>과 같이 긍정식[MP], 수학적 귀납법[MI], 반례[CE], 항등식을 이용한 증명[PI] 분석 근거에 의하여 MP 과제, MI 과제, CE 과제, PI 과제로 분류되었으며, 분석 결과 MP 과제는 3.1%(9개), MI 과제는 9.2%(27개), CE 과제는 0.7%(2개), PI 과제는 0.3%(1개)로 MI 과제가 D 과제에서 상대적으로 높은 비율을 차지하고 있었다. 또한 CE 과제의 경우 T1, T3 교과서에는 제시되었지만 T2 교과서에는 제시되지 않았다. 반면에 PI 과제는 T2 교과서에는 제시되었지만 T1, T3 교과서에는 제시되지 않았다. H 과제의 경우 <표 Ⅳ-8>과 같이 H 분석 근거에 의하여 분류되었으며, 분석 결과 0.7%(2개)로 3종의 수학교과서 중 T1 교과서에서만 제시되어 있었다. 마지막으로 A 과제의 경우 <표 Ⅳ-9>와 같이 A 분석 근거에 의하여 분류되었으며, 분석 결과 1.4%(4개)로 각 교과서마다 1개 또는 2개의 과제가 제시되었다. 분석 결과에 의하면 EI 과제가 다른 추론 과제에 비하여 상대적으로 높은 비율을 차지하고 있음을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-1> 교과서별 추론 과제의 추론 방법 및 유형

교과서명 / 추론 과제		T1 교과서	T2 교과서	T3 교과서	총합
		%(개)	%(개)	%(개)	%(개)
I	EI	81.7%(94)	78.5%(84)	77.5%(55)	79.5%(233)
	CR	7%(8)	3.8%(4)	4.2%(3)	5.1%(15)
D	MP	1.8%(2)	5.6%(6)	1.4%(1)	3.1%(9)
	MI	6.1%(7)	10.3%(11)	12.7%(9)	9.2%(27)
	CE	0.8%(1)		1.4%(1)	0.7%(2)
	PI		0.9%(1)		0.3%(1)
H		1.8%(2)			0.7%(2)
A		0.8%(1)	0.9%(1)	2.8%(2)	1.4%(4)
총합		100%(115)	100%(107)	100%(71)	100%(293)

<표 Ⅳ-2> EI 과제의 분류 예시

중단원 문제 다음 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하시오.
(1) $12,\ 5,\ -2,\ -9,\ -16,\ \cdots$ (2) $-7,\ -3,\ 1,\ 5,\ 9,\ \cdots$

(T1 교과서, 2019, p. 134)

분석 근거	분석 근거 내용
I-EI-2	과제에 주어진 수열을 바탕으로 수열의 합을 구하는 과제이다.

<표 Ⅳ-3> CR 과제의 분류 예시

문제 다음 등비수열의 공비를 구하시오. (1) $1,\ -3,\ 9,\ 0,\ -27,\ 81,\ \cdots$ (2) $\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \cdots$

(T1 교과서, 2019, p. 127)

분석 근거	분석 근거 내용
I-CR-1	과제에 주어진 수열을 바탕으로 수열의 공비를 구하는 과제이다.

<표 Ⅳ-4> MP 과제의 분류 예시

문제 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 $pn+q$인 수열은 등차수열임을 보이시오. (p, q는 상수이다.)

(T2 교과서, 2019, p. 126)

분석 근거	분석 근거 내용
D-MP-1	(p): $a_n = pn+q$이고, $a_{n+1} = p(n+1)+q = pn+p+q$이므로, $a_{n+1}-a_n = p$이다. ($p \rightarrow q$): $a_{n+1}-a_n = p$이면, a_n은 공차가 p인 등차수열이다. (q): 따라서 주어진 수열은 공차가 p인 등차수열이다. 따라서 과제에 주어진 명제를 긍정식으로 증명하는 과제이다.

<표 Ⅳ-5> MI 과제의 분류 예시

문제 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

(T3 교과서, 2019, p. 155)

분석 근거	분석 근거 내용
D-MI-1	과제에 주어진 부등식을 수학적 귀납법으로 증명하는 과제이다.

<표 Ⅳ-6> CE 과제의 분류 예시

수학 교과 역량 다음은 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 정민이와 수현이가 합의 기호 $\sum$의 성질을 추측한 것이다. 두 학생의 추측이 옳은지 확인하여 보자. 정민: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ 수현: $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} a_i$

(T3 교과서, 2019, p. 142)

분석 근거	분석 근거 내용
D-CE-1	과제에 주어진 정민 학생의 추측이 옳지 않음을 반례를 들어 확인하는 과제이다.

<표 Ⅳ-7> PI 과제의 분류 예시

문제 다음은 1부터 n까지의 자연수의 세제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k^3$을 항등식 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$을 이용하여 구하는 과정의 일부이다. 물음에 답하시오.

$$\begin{aligned} &k=1\text{일 때,} && 2^4 - 1^4 = 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1 \\ &k=2\text{일 때,} && 3^4 - 2^4 = 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1 \\ &k=3\text{일 때,} && 4^4 - 3^4 = 4\times 3^3 + 6\times 3^2 + 4\times 3 + 1 \\ &\quad\vdots && \qquad\qquad\vdots \\ &k=n\text{일 때,} && (n+1)^4 - n^4 = 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1 \end{aligned}$$

(1) 위의 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립함을 보이시오.

(T2 교과서, 2019, p. 147)

분석 근거	분석 근거 내용
D-PI-1	과제에 주어진 세제곱의 합 등식을 항등식을 이용한 증명법으로 증명하는 과제이다.

<표 Ⅳ-8> H 과제의 분류 예시

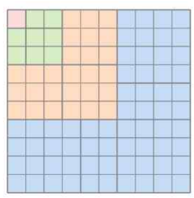
중단원 문제 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$과 명제 $P(n+1)$ 중 어느 하나가 참이면 명제 $P(n+2)$가 참이라고 한다. 모든 자연수 n에 대하여 명제 $P(n)$이 참이 되기 위한 필요충분조건을 구하시오.

(T1 교과서, 2019, p. 153)

분석 근거	분석 근거 내용
H-1	과제에 주어진 명제가 참이 되도록 하는 사례나 조건을 제시하는 과제이다.

<표 Ⅳ-9> A 과제의 분류 예시

수학 교과 역량 오른쪽 그림에서 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 1일 때, 이것을 이용하여 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$이 성립함을 설명하여 보자.



(T3 교과서, 2019, p. 147)

분석 근거	분석 근거 내용
A-1	수열의 합 블록에서 나타나는 성질이 주어진 등식에서도 성립함을 설명하는 과제이다.

2. 추론 과제의 인지적 난이도 수준 분석

본 절에서는 3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제를 대상으로 인지적 난이도 수준 분석틀을 사용하여 추론 과제의 인지적 난이도 수준을 분석하였다.

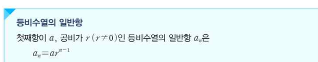
3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제를 대상으로 인지적 난이도 수준을 분석한 결과는 <표 Ⅳ-10>과 같다. <표 Ⅳ-10>의 결과를 살펴보면 인지적 난이도 수준이 낮은[LL] 추론 과제는 95.5%(280개)를 차지하는 것으로 나타났으며. 인지적 난이도 수준이 높은[HL] 추론 과제는 4.5%(13개)를 차지하는 것으로 나타났다.

3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제의 인지적 난이도 수준 분석 결과를 좀 더 세부적으로 살펴보면 다음과 같다. LL 추론 과제의 경우 <표 Ⅳ-11>, <표 Ⅳ-12>와 같이 암기형[M] 과제 또는 연결성이 없는 절차[PNC] 과제로 분류되었으며, 분석 결과 M 과제는 각각 5.1%(15개), PNC 과제는 90.4%(265개)로 PNC 과제가 LL 추론 과제에서 상대적으로 높은 비율을 차지하고 있었다. HL 추론 과제의 경우 <표 Ⅳ-13>, <표 Ⅳ-14>와 같이 연결성이 있는 절차[PWC] 과제 또는 탐구형[DM] 과제로 분류되었으며, 분석 결과 PWC 과제는 2.1%(6개), DM 과제는 2.4%(7개)로 두 과제 모두 HL 추론 과제에서 비슷한 비율을 차지하고 있었다. 분석 결과에 의하면 LL-PNC(인지적 난이도 수준이 낮은 연결성이 없는 절차) 추론 과제가 다른 인지적 난이도 수준 유형의 추론 과제에 비하여 상대적으로 높은 비율을 차지하고 있음을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-10> 3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 추론 과제의 인지적 난이도 수준

인지적 난이도 수준 / 추론 과제		LL		HL		총합
		M %(개)	PNC %(개)	PWC %(개)	DM %(개)	
I	EI	4.4%(13)	74.4%(218)	0.7%(2)		79.5%(233)
	CR	0.7%(2)	4.4%(13)			5.1%(15)
D	MP		2.1%(6)		1%(3)	3.1%(9)
	MI		9.2%(27)			9.2%(27)
	CE				0.7%(2)	0.7%(2)
	PI		0.3%(1)			0.3%(1)
H					0.7%(2)	0.7%(2)
A				1.4%(4)		1.4%(4)
총합		5.1%(15)	90.4%(265)	2.1%(6)	2.4%(7)	100%(293)
		95.5%(280)		4.5%(13)		

<표 Ⅳ-11> LL-M 추론 과제의 분류 예시

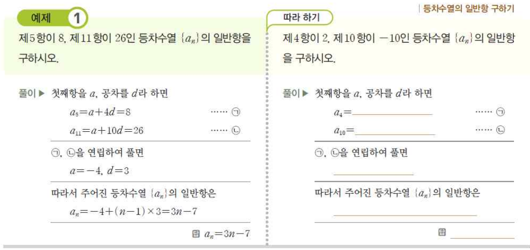
문제 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n = \square \times 3^{n-1}$ (T1 교과서, 2019, p. 128)	
분석 근거	분석 근거 내용
LL-M-1	본문에 제시된 정의를 확인하는 과제이다.  등비수열의 일반항 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$ (T1 교과서, 2019, p. 128)

<표 Ⅳ-12> LL-PNC 추론 과제의 분류 예시

문제 다음을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(1) 제3항이 12, 제7항이 -8 (2) $a_2=5$, $a_8=17$

(T3 교과서, 2019, p. 126)

<table>
<tr><th>분석 근거</th><th>분석 근거 내용</th></tr>
<tr><td>LL-PNC-1</td><td>보기, 예제에 과제를 해결하는 접근 방법이 제시되어 있어 해결 절차가 불분명하지 않은 과제이다.

| 등차수열의 일반항 구하기
예제 1
제5항이 8, 제11항이 26인 등차수열 {a_n}의 일반항을 구하시오.
풀이 ▶ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=a+4d=8$ …… ㉠
$a_{11}=a+10d=26$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-4$, $d=3$
따라서 주어진 등차수열 {a_n}의 일반항은
$a_n=-4+(n-1)\times3=3n-7$
답 $a_n=3n-7$
따라 하기
제4항이 2, 제10항이 -10인 등차수열 {a_n}의 일반항을 구하시오.
풀이 ▶ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4=$______ …… ㉠
$a_{10}=$______ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
______
따라서 주어진 등차수열 {a_n}의 일반항은
______
답 ______
(T3 교과서, 2019, p. 126)</td></tr>
</table>

<표 Ⅳ-13> HL-PWC 추론 과제의 분류 예시

수학 교과 역량 10원짜리 동전에서 을 앞면, 을 뒷면이라고 할 때, 똑같은 동전 n개를 뒷면이 이웃하지 않도록 한 줄로 배열하려고 한다. 예를 들어 동전 4개를 배열할 때 은 가능하지만 은 가능하지 않다.

1. 다음 표를 완성해 보자.

동전의 개수	배열하는 방법	방법의 수
1	·	2
2	··	3
3		
4		

2. 동전 n개를 배열하는 수를 a_n이라고 할 때, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립하는 이유를 설명해 보자.

(T1 교과서, 2019, p. 154)

분석 근거	분석 근거 내용
HL-PWC-1	동전 n개를 배열하는 상황을 수열의 귀납적 정의의 개념과 연결하는 과제이다.

<표 Ⅳ-14> HL-DM 추론 과제의 분류 예시

수학 교과 역량 다음 두 학생의 대화에서 여학생의 마지막 질문에 답하고, 그 이유를 설명해 보자.

(T1 교과서, 2019, p. 122)

분석 근거	분석 근거 내용
HL-DM-1	과제에 주어진 여학생의 마지막 질문이 참이 될 수 있는지 없는지 판단하고, 이에 따라 정당화 또는 반박을 통하여 그 이유를 설명하는 과제이다.

3. 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제의 추론 과정 구성요소 분석

본 절에서는 3종의 수학교과서의 수열 단원에 제시된 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제를 대상으로 추론 과정 구성요소 분석틀을 사용하여 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소가 무엇인지 분석하였다.

<표 Ⅳ-10>의 결과를 살펴보면 LL-M으로 분류된 추론 과제는 EI 과제, CR 과제로 각 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소 예시는 <표 Ⅳ-15>, <표 Ⅳ-16>과 같다. LL-PNC로 분류된 추론 과제는 EI 과제, CR 과제, MP 과제, MI 과제, PI 과제로 각 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소 예시는 <표 Ⅳ-17>, <표 Ⅳ-18>, <표 Ⅳ-19>, <표 Ⅳ-20>, <표 Ⅳ-21>과 같다. HL-PWC로 분류된 추론 과제는 EI 과제, A 과제로 각 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소 예시는 <표 Ⅳ-22>, <표 Ⅳ-23>과 같다. HL-DM으로 분류된 추론 과제는 MP 과제, CE 과제, H 과제로 각 추론 과제가 요구하는 추론 과정 구성요소 예시는 <표 Ⅳ-24>, <표 Ⅳ-25>, <표 Ⅳ-26>과 같다. 분석 결과에 의하면 LL 추론 과제의 경우 EI 과제, CR 과제는 <표 Ⅳ-15>, <표 Ⅳ-16>, <표 Ⅳ-17>, <표 Ⅳ-18>과 같이 CG 구성요소만을 요구하는 것을 알 수 있으며, MP 과제, MI 과제, PI 과제는 <표 Ⅳ-19>, <표 Ⅳ-20>, <표 Ⅳ-21>과 같이 JR 구성요소만을 요구하는 것을 알 수 있다. HL 추론 과제의 경우 <표 Ⅳ-22>, <표 Ⅳ-23>, <표 Ⅳ-24>, <표 Ⅳ-25>, <표 Ⅳ-26>과 같이 다양한 추론 과정 구성요소를 요구하는 것을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-15> LL-M으로 분류된 EI 과제 예시

문제 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n = 2+(n-1)\times\boxed{} = 3n-1$

(T1 교과서, 2019, p. 120)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1	과제에 주어진 수열과 관련된 자료를 바탕으로 수열 전체를 일반화할 수 있는 항을 구하는 과제이다.

<표 IV-16> LL-M으로 분류된 CR 과제 예시

중단원 문제 등비수열 $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$의 공비는 $\frac{1}{2}$이다.

(T1 교과서, 2019, p. 134)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1	과제에 주어진 수열을 바탕으로 수열 전체의 공통적인 속성을 포함하는 공비가 과제에 주어진 것과 일치하는지 확인하는 과제이다.

<표 IV-17> LL-PNC으로 분류된 EI 과제 예시

중단원 문제 다음 수열의 제7항을 추측해 보시오. (1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots$ (2) $1, -2, 3, -4, \cdots$

(T2 교과서, 2019, p. 138)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-2	과제에 주어진 수열을 바탕으로 주어지지 않은 항을 추측하는 과제이다.

<표 IV-18> LL-PNC으로 분류된 CR 과제 예시

대단원 문제 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_3+a_5+a_7=0$, $a_{10}=24$일 때, 공차를 구하시오.

(T1 교과서, 2019, p. 172)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1	과제에 주어진 수열의 합과 항을 바탕으로 수열 전체의 공통적인 속성을 포함하는 공차를 구하는 과제이다.

<표 IV-19> LL-PNC으로 분류된 MP 과제 예시

문제 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 $pn+q$인 수열은 등차수열임을 보이시오. (단, p, q는 상수이다.)

(T2 교과서, 2019, p. 126)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
JR-1	과제에 주어진 명제를 긍정식 방법을 통하여 정당화하는 과제이다.

<표 IV-20> LL-PNC으로 분류된 MI 과제 예시

문제 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$

(T1 교과서, 2019, p. 150)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
JR-1	과제에 주어진 명제를 수학적 귀납법을 통하여 정당화하는 과제이다.

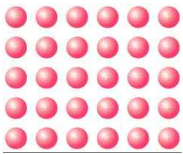
<표 Ⅳ-21> LL-PNC으로 분류된 PI 과제 예시

문제 다음은 1부터 n까지의 자연수의 세제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k^3$을 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 구하는 과정의 일부이다. 물음에 답하시오. $k=1$일 때, $2^4-1^4=4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$ $k=2$일 때, $3^4-2^4=4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1$ $k=3$일 때, $4^4-3^4=4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$ $\vdots$ $\vdots$ $k=n$일 때, $(n+1)^4-n^4=4\times n^3+6\times n^2+4\times n+1$ (1) 위의 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하시오. (2) (1)의 결과를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립함을 보이시오.

(T2 교과서, 2019, p. 147)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
JR-1	과제에 주어진 명제를 항등식을 이용한 증명 방법을 통하여 정당화하는 과제이다.

<표 Ⅳ-22> HL-PWC으로 분류된 EI 과제 예시

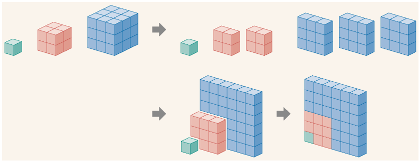
수학 교과 역량 구슬 30개를 이용하여 두 사람이 다음과 같은 규칙으로 놀이를 한다. [규칙 1] 두 사람이 교대로 한 번에 1개 또는 2개 또는 3개의 구슬을 가져간다. [규칙 2] 마지막 구슬을 가져가는 사람이 이긴다.  1. 이 놀이에서 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이기는 방법을 수열을 이용하여 설명해 보자. 2. 구슬의 전체 개수를 바꾸어 친구와 놀이를 해 보고, 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이기는 방법을 찾아보자.

(T1 교과서, 2019, p. 137)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1, 4	먼저 구슬을 가져가는 사람이 몇 번째 구슬을 가져갈 때 항상 이길 수 있는지 수열을 사용하여 일반화된 패턴을 찾는 과제이다. 기존의 조건에서 구슬의 전체 개수를 확장하여 새로운 조건에서 해결하는 과제이다.
IW-1	과제에 주어진 조건을 바탕으로 이 놀이에서 항상 이길 수 있는 방법이 무엇인지 조사하는 과제이다.
JR-1	이 놀이에서 항상 이길 수 있는 방법을 수열의 아이디어를 통하여 정당화하는 과제이다.

<표 IV-23> HL-PWC으로 분류된 A 과제 예시

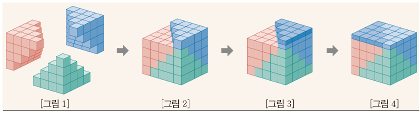
수학 교과 역량 그림을 이용하면 자연수의 거듭제곱의 합을 쉽고 재밌게 이해할 수 있다. 다음 그림은 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$ 이 성립함을 보이고 있다.



이와 같은 원리를 이용하면 자연수 n에 대하여

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ 이 성립함을 그림을 이용하여 확인할 수 있다.

1 다음 그림은 $3(1^2+2^2+3^2+4^2)=4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)$ 이 성립함을 보이고 있다. 이 등식이 성립하는 원리를 설명해 보자.



2 1의 원리를 이용하여 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이 성립함을 설명해 보자.

(T2 교과서, 2019, p. 150)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1, 4	수열의 합 블록에서 나타나는 성질이 $3(1^2+2^2+3^2+4^2)=4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)$에서 성립하는 원리를 바탕으로 일반적인 자연수의 제곱의 합의 개념이 성립하는 원리를 밝히는 과제이다. 수열의 합 블록에서 나타나는 성질로부터 자연수의 세제곱의 합의 개념이 어떻게 성립하는지 보여주고 이를 응용하여 자연수의 제곱의 합의 개념으로 확장하는 과제이다.
IW-1	제곱수의 합의 개념이 어떻게 성립하는지 설명하기 위하여 수열의 합 블록을 사용하여 조사하는 과제이다.
JR-1	과제에 주어진 명제가 어떻게 참이 될 수 있는지 수열의 합 블록을 통하여 정당화하는 과제이다.

<표 IV-24> HL-DM으로 분류된 MP 과제 예시

수학 교과 역량 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$을 이용하여 두 학생이 만든 다음 수열은 각각 등비수열인지 판단하고, 그 이유를 설명해 보자.

아영: $a_1,\ a_3,\ a_5,\ \cdots$ 정현: $a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ \cdots$

(T1 교과서, 2019, p. 130)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1	두 학생이 제시한 수열을 바탕으로 제시되지 않은 항을 포함한 수열 전체가 등비수열이 되는지 판단하는 과제이다.
IW-1	두 학생이 제시한 수열이 등비수열이 될 수 있는지 조사하는 과제이다.
JR-1	두 학생이 제시한 수열이 등비수열임을 긍정식 방법을 통하여 정당화하는 과제이다.

<표 IV-25> HL-DM으로 분류된 CE 과제 예시

문제 다음 승수의 말이 옳은지 그른지 판단하고, 그 이유를 설명하시오.
승수: 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n = n^2 + 1$일 때, 일반항은 $a_n = 2n - 1$이야.

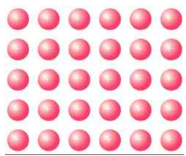
(T1 교과서, 2019, p. 126)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1	승수의 말에 주어진 수열의 합을 바탕으로 수열 전체를 일반화할 수 있는 항과 과제에 주어진 것이 일치하는지 확인하는 과제이다.
IW-1	승수의 말이 거짓인 이유가 무엇인지 조사하는 과제이다.
JR-2	승수의 말에 반례를 제시하여 반박하는 과제이다.

<표 IV-26> HL-DM으로 분류된 H 과제 예시

수학 교과 역량 구슬 30개를 이용하여 두 사람이 다음과 같은 규칙으로 놀이를 한다.

[규칙 1] 두 사람이 교대로 한 번에 1개 또는 2개 또는 3개의 구슬을 가져간다.
[규칙 2] 마지막 구슬을 가져가는 사람이 이긴다.



3. 구슬의 전체 개수를 바꿀 때, 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이기는 방법이 존재하도록 하는 구슬의 전체 개수의 조건을 설명해 보자.

(T1 교과서, 2019, p. 137)

추론과정의 구성요소-분석 근거	분석 근거 내용
CG-1, 4	이 놀이에서 항상 이길 수 있는 구슬 전체 개수의 일반화된 조건을 구하는 과제이다. 기존의 조건에서 구슬의 전체 개수를 확장하여 새로운 조건에서 해결하는 과제이다.
IW-1	이 놀이에서 항상 이길 수 있는 구슬 전체 개수의 조건이 무엇인지 조사하는 과제이다.
JR-1	이 놀이에서 항상 이길 수 있는 구슬 전체 개수의 조건을 수학적 아이디어를 통하여 정당화하는 과제이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 고등학교 수준 수학교과서의 수열 단원에 제시된 수학 과제를 대상으로 지시적 내용 분석 과정에 따라 도출한 분석틀을 사용하여 추론 과제를 추출하고, 추론 과제의 인지적 난이도 수준과 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제의 추론 과정 구성요소를 분석하였다. 그 결과, 첫째, 추출된 추론 과제와 관련하여 추론 과제의 대부분이 귀납적 추론 과제라는 것을 확인하였다. 둘째, 추론 과제의 인지적 난이도 수준과 관련하여 추론 과제의 대부분이 인지적 난이도 수준이 낮은 추론 과제이고, 일부만이 인지적 난이도 수준이 높은 추

론 과제라는 것을 확인하였다. 셋째, 인지적 난이도 수준에 따라 분류된 추론 과제의 추론 과정 구성요소와 관련하여 인지적 난이도 수준이 낮은 추론 과제는 하나의 추론 과정 구성요소만을 요구하는 반면, 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제는 다양한 추론 과정 구성요소를 요구한다는 것을 확인하였다. 이를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자한다.

첫째, 추출된 추론 과제와 관련하여, 연역적 추론, 가설적 추론, 유비추론 과제의 비율을 높일 필요가 있다. 수열 단원의 내용 특성상 추론 과제의 대부분이 귀납적 추론 과제로 제시될 수밖에 없다. 하지만 현행 교육과정의 교수·학습 방법에서 귀납적 추론 외에도 유비추론과 같은 개연적 추론을 강조하고 있으며, 수열 단원의 학습을 통하여 연역적 추론 능력 또한 기를 수 있을 것으로 기대하고 있으므로(교육부, 2015) 연역적 추론, 가설적 추론, 유비추론 과제의 제공 비율을 높일 필요가 있어 보인다.

둘째, 추론 과제의 인지적 난이도 수준과 관련하여, 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제의 비율을 높일 필요가 있다. 인지적 난이도 수준이 낮은 추론 과제는 학생들의 성취도를 향상시키거나 복잡한 과제를 상례화하여, 학생들이 과제를 해결하는 과정에서 시간과 노력을 더욱 효율적으로 사용할 수 있도록 도울 수 있다(Stein 외, 2000). 하지만 Stein 외(2000)가 지적하였듯이 이러한 과제는 수학이 무엇이고, 수학을 어떻게 하는 것인지를 이해하는데 한계가 있다. 따라서 학생들에게 추론의 본질을 심도있게 이해시킬 수 있는 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제의 제공 비율을 높일 필요가 있어 보인다.

셋째, 추론 과제의 추론 과정 구성요소와 관련하여, 다양한 추론 과정 구성요소를 요구하는 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제의 비율을 높일 필요가 있다. Lannin 외(2011)가 지적하였듯이, 추론은 단편적인 것이 아니고 추측하고, 이를 일반화하며, 왜 그렇게 되는지 조사하고, 논증을 개발하고 평가하여 점진적으로 개선해나가는 과정이다. 인지적 난이도 수준이 낮은 추론 과제는 하나의 추론 과정 구성요소만을 요구하지만, 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제는 두 가지 이상의 추론 과정 구성요소를 요구하기 때문에 다양한 추론 과정 구성요소를 연속적으로 경험할 수 있는 기회를 제공한다. 따라서 학생들에게 다양한 추론 과정의 학습기회를 제공하는 추론 과제의 제공 비율을 높일 필요가 있어 보인다.

따라서 교과서 개발자들은 학생들에게 다양한 추론 방법과 추론 과정의 학습기회를 제공하고, 추론의 본질을 심도있게 이해시킬 수 있는 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제를 개발할 필요가 있다. 본 연구에서 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제는 토대 영역과 목표 영역을 통합하도록 요구하는 유비추론 과제의 형태 또는 과제에서 요구하는 조건을 탐구하도록 하는 가설적 추론 과제의 형태 또는 본문의 개념 설명, 보기, 예제, 과제 자체에 과제를 해결하는 접근방법이 제시되지 않은 개방형 과제[11]의 형태였으며, 이러한 형태의 추론 과제는 다양한 추론 과정의 학습기회를 제공하고, 추론의 본질을 심도있게 이해시키는 것으로 나타났다. 한편, 개방형 과제의 형태 중 하나인 수학적 모델링 과제(도종훈, 2007; Blum, & Ferri, 2016; Cirillo, Pelesko, Felton-Koestler, & Rubel, 2016)는 본 연구에서 제시한 모든 추론 방법을 연속적으로 경험할 수 있는 기회를 제공하는 것으로 나타났다(김선희, 김기연, 2004; 백도현, 이경화, 2018). 이는 교과서 개발자들에게 인지적 난이도 수준이 높은 추론 과제와 더불어 수학적 모델링 과제의 연구와 개발이 필요함을 시사한다.

[11] Pehkonen(1997)은 출발 상황이나 목표 상황이 열려있는 과제를 개방형 과제로 정의하였는데, 여기서 출발 상황은 주어진 자료와 조건을 의미하며, 목표상황은 구하고자 하는 것을 의미한다(도종훈, 2007).

참 고 문 헌

교육부 (2015). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2015-74호 별책 8), 세종: 교육부.

The Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*, Se Jong: The Ministry of Education.

김선희・김기연 (2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. 학교수학, 6(3), 283-299.

Kim, S. & Kim, K. (2004). Analysis on types and roles of reasoning used in the mathematical modeling process. *School Mathematics, 6*(3), 283-299.

김선희・이종희 (2002). 수학적 추론으로서 가추법. 수학교육학연구, 12(2), 275-290.

Kim, S. & Lee, C. (2002). Abduction as a mathematical reasoning. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 12*(2), 275-290.

김영천 (1997). 학교 교육현상 탐구를 위한 질적연구의 방법과 과정. 교육학연구, 35(5), 135-170.

Kim, Y. (1997). The method and process of qualitative research for inquiry of educational phenomena in schools. *The Journal of Educational Research, 35*(5), 135-170.

김원경 외 (2019). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: ㈜비상교육.

Kim, W., et al. (2019). *High school mathematics Ⅰ*. Seoul: Visang.

도종훈 (2007). 개방형 문제를 어떻게 만들 것인가?: 두 개의 개방형 문제 제작 사례를 중심으로. 한국학교수학회논문집, 10(2), 221-235.

Do, J. (2007). How to pose an open problem?: Two cases of posing na open-ended problem by reorganizing given closed problems. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 10*(2), 221-235.

류희찬 외 (2019). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: ㈜천재교육.

Ryu, H. et al. (2019). *High school mathematics Ⅰ*. Seoul: Chunjae.

박교식 외 (2019). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: 동아출판㈜.

Park, K. et al. (2019). *High school mathematics I*. Seoul: Dong-A.

백도현・이경화 (2018). 수학적 모델링에서 가추적 사고의 역할과 의의. 수학교육학연구, 28(2), 221-240.

Baek, D. & Lee, K. (2018). Role and significance of abductive reasoning in mathematical modeling. *Journal of Educational Research in Mathematics, 28*(2), 221-240.

손행미 (2017). 질적내용분석의 이해와 적용. 대한질적연구학회지, 2(2), 56-63.

Son, H. (2017). Understanding and application of qualitative content analysis. *Korean Association for Qualitative Research, 2*(2), 56-63.

우정호 (2007). 학교 수학의 교육적 기초. 제2증보판. 서울: 서울대학교출판문화원.

Woo, J. (2007). *The educational foundation of school mathematics* (2rd enl. ed.). Seoul: Snupress.

우정호 (2010). 수학 학습-지도 원리와 방법. 제2개정판. 서울: 서울대학교출판문화원.

Woo, J. (2010). *Principles and methods of mathematical learning-teaching* (2rd. rev. ed.). Seoul: Snupress.

이미연・오영열 (2007). 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향. 수학교육학연구, 17(4), 395-418.

Lee, M. & Oh. Y. (2007). The influence of mathematical tasks on mathematical communication. *Journal of Educational Research in Mathematics, 17*(4), 395-418.

이윤희 (2017). 찰스 샌더스 퍼스. 서울: 커뮤니케이션북스.

Lee, Y. (2017). *Charles Sanders Peirce*. Seoul: Communicationbooks.

이종희・김선희・김부미・김기연 (2017). 수학적 추론. 서울: ㈜교우.

Lee, C., Kim, S., Kim, B. & Kim, K. (2017). *Math reasoning*. Seoul: Kyowoo.

정혜윤・이경화 (2016). 우리나라와 미국 수학 교과서의 과제 비교: 평행사변형 조건을 중심으로. 학교수학, 18(4), 749-771.

Jung, H. & Lee, K. (2016). A comparative study of the mathematics textbooks' tasks of korea and the usa: Focused on conditions for parallelograms. *School Mathematics, 18*(4). 749-771.

조수진 (2006). 증명의 본질과 증명지도에 관한 연구: 중학교 기하증명을 중심으로, 중앙대학교 교육대학원 석사 학위논문.

Cho, S. (2006). *The nature of proof and a study on the teaching method of proofs: focused on the middle school geometry(Master Thesis)*, Department of Mathematics Education, Graduate School of Education Chung-Ang University.

최성호・정정훈・정상원 (2016). 질적 내용분석의 개념과 절차. 질적탐구, 2(1), 127-155.

Choi, S., Jung, J. & Jung, S. (2016). Concept and procedures of qualitative content analysis. *Journal of Qualitative Inquiry. 2*(1). 127-155.

황선욱 외 (2019). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: ㈜미래엔.

Hwang, S. et al. (2019). *High school mathematics Ⅰ*. Seoul: Mirae-N.

황운학 (2013). Elliptical trainer의 실험 분석을 통한 공학교육에 적용되는 귀납법적 추론 분석. 한국실천공학교육학회논문지, 5(1), 1-13.

Hwang, U. (2013). Analysis of the deductive inference in engineering education through the experiment of elliptical trainers. *Korean Institute for Practical Engineering Education, 5*(1), 1-13.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2016). Advancing the teaching of mathematical modeling: Research-based concepts and examples. In C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 65-76). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cirillo, M., Pelesko, J. A., Felton-Koestler, M. D., & Rubel, L. (2016). Perspectives on modeling in school mathematics. In C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 3-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 135-164.

de Waal, C. (2013). *Peirce: A guide for the perplexed*. London·New Deli·New York·Sydney: Bloomsbury.

English, L. D. (1993). *Reasoning by analogy in constructing mathematical ideas*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED370 766).

English, L. D. (1997). Analogies, Metaphors, and Images: Vehicles for Mathematical Reasoning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors, and Images* (pp. 3-18). New York: Routledge.

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 22-36). Reston, VA: NCTM.

Gentner, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science, 7*, 155-170.

Gentner, D. (1989). The Mechanisms of analogical learning. In S, Vosniadou & A Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199-241). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research, 15*(9), 1277-1288.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Liszka, J. J. (1996). *A general introduction to the semeiotic of Charles Sanders Peirce*. Bloomington: Indiana

University Press.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: Author.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problems". In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp.7-11). Helsinki University.

Peirce, C. S. (1877). The fixation of belief. *Popular Science Monthly, 12*(November), 1-15.

Peirce, C. S. (1878). How to make our ideas clear. *Popular Science Monthly, 12*(January), 286-302.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, Vols. 1-6(C. Hartshorne & P. Weiss Eds.), Vols. 7-8(A. W. Burks, Ed.). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Poincaré, H. (1952). *Science and Hypothesis*. New York: Dover Publications.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). New Jersey: Princeton University Press.

Reasoning. (1902). In J. M. Baldwin (Ed.), *Dictionary of Philosophy and Psychology* (Vol. 2). New York: Macmillan.

Smith, M. S. Stein, M. K., Arbaugh, F., Brown C. A., & Mossgrove, J. (2004). Characterizing the cognitive demands of mathematical tasks: A sorting activity. *Professional Development Guidebook for Perspectives on the Teaching of Mathematics* (Companion to 2004 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics) (pp. 45-72). Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematical instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

An Analysis of Components of Reasoning Process according to the Levels of Cognitive Demands of the Reasoning Tasks -Focused on the Highschool level Mathematical Sequence-

Oh, Young-Seok
Dept. of Mathematics Education, Korea University
145 Anam-ro, Seongbuk-gu, Seoul, 136-701 Korea
E-mail : mathematicseducation@nate.com

The purpose of the study is to analyze the levels of cognitive demands and components of the reasoning process presented in the mathematical sequence section of three high school mathematics textbooks in order to provide implications for the development of reasoning tasks in the future mathematics textbooks. The results of the study have revealed that most of the reasoning tasks presented in the mathematical sequence section of the three high school mathematics textbooks seemed to require low-level cognitive demands and that low-level cognitive demands reasoning tasks required only a component of one reasoning process. On the other hand, only a portion of the reasoning tasks appeared to require high-level of cognitive demands, and high-level cognitive demands reasoning tasks required various components of reasoning process. Considering the results of the study, it seems to suggest that we need more high-level cognitive demands reasoning tasks to develop high-level cognitive reasoning that would provide students with learning opportunities for various processes of reasoning, and that would provide a deeper understanding of the nature of reasoning.

* ZDM Classification : U23
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : Reasoning tasks, Levels of cognitive demand, Components of reasoning process