韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2019.33.3.335
제 33집 제 3호, 2019. 9. 335-354

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 33, No. 3, Sep. 2019. 335-354

직관을 강조한 미분 지도의 대안적 방안 탐색 : 싱가포르 교과서를 중심으로

김 선 희 (강원대학교 교수)
김 태 석 (유봉여자고등학교 교사)
조 진 우 (경인교육대학교 강사)†

본 연구는 직관을 강조하는 방식으로 우리나라 미분 지도의 대안적 방안을 탐색하는 것을 목표로 한다. 우리나라 교육과정과 교과서의 미분 지도에 관한 내용을 싱가포르를 포함한 국외 사례와 비교하여 분석하였다. 우리나라에 비해 비교적 이른 시기에 미분계수와 미분을 학습하게 되는 싱가포르의 경우, 순간변화율이 아닌 접선의 기울기로 미분 개념을 도입하며, 공학적 도구와 귀납적 외삽법을 이용해 형식적이기보다는 직관적으로 전개하는 것을 확인하였다. 또한, 다른 국외 사례들을 살펴본 결과 영국과 호주 또한 직관을 강조하는 방식으로 미분을 지도하고 있음을 확인하였다. 이상을 바탕으로, 직관을 강조하는 방식으로 미분을 도입하고 지도하는 것의 의의를 말하고, 우리나라 미분 지도에 대한 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 서론

4차 교육과정부터 이어진 우리나라 수학과 교육과정 개정의 방향에는 학습량 적정화가 있다. 이는 주로 내용 감축으로 구현되었으나 학생들의 이해를 쉽게 하는 방향에서도 실시되었다. 2015 개정 수학과 교육과정 개발 당시 박경미 외(2015)는 일본, 핀란드, 영국 등의 외국의 수학과 교육과정과 교과서 및 미적분 교육과정의 개혁을 위한 문헌들을 분석하여 수열의 극한과 급수를 다루지 않으면서 함수의 극한 및 다항함수의 미분과 적분을 다룰 수 있음을 확인하였고, 이에 따라 급수의 합을 이용하지 않고 정적분을 도입하도록 하였다. 이러한 접근은 학생들의 학습 부담 경감을 위한 조치로 볼 수 있다.

이러한 기조로 볼 때 고등학교 수학 내용 중 학생들이 어려움을 겪는 미분에 대한 정의 및 도입도 학생들의 직관적 이해를 도모할 수 있다면 수학에 대한 어려움이 상당히 감소할 수 있을 것이다. 수학 학습을 포기하거나 의지를 갖지 않는 학생들이 고등학교 때 다수 발생하는 것은 수학 내용과 지도 방식이 원인일 수 있으므로 우리나라 고등학교 수학교육 개선을 위해 다른 나라에서는 수학을 어떻게 다루고 있는지 살펴볼 필요가 있다.

해석적으로는 함수, 기하적으로는 접선과 관련되는 미분은 2015 개정 수학과 교육과정에서 <수학Ⅱ>와 <미적분>에서 다뤄지며, 함수의 순간적인 변화를 설명하는 도구로서 이해될 것이 제안되고 있다(교육부, 2015, p.75). 교육과정과 교과서에서의 미분 지도를 살펴보면, 해석적 측면에서 평균변화율의 극한인 순간변화율로서 미분계수를 정의하고, 그것의 기하학적 의미로 접선의 기울기를 다룬다. 이와 같은 지도 순서는 미분을 해석적 측면에서 먼저 도입한 후 기하적 대상인 접선과 연결시키는 것으로, 수학사에서 확인할 수 있는 발달 과정과는

* 접수일(2019년 8월 22일), 심사(수정)일(2019년 9월 3일), 게재확정일(2019년 9월 3일)
* ZDM분류 : I44, U24
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 미분계수, 미분, 직관, 싱가포르, 국제 비교, 교과서
† 교신저자 : jinwoo1987@hanmail.net

차이가 있다(정연준, 2010).

한편 미분과 관련하여 학생들이 겪는 어려움이 여럿 보고되고 있다. 학생들은 미분의 해석적 정의와 접선의 기울기를 연결하지 못하고(Amit & Vinner, 1990), 미분 계수를 해석하는 데 어려움을 겪는다(Bezuidenhout, 1998). 김주현(2017)은 학생들이 극한의 정의를 이용하여 미분 계수를 올바르게 서술하지 못한다는 것을 보고했다. 정은선(2010)은 극한 개념의 이해 단계가 높을수록 미분 개념의 획득 과정이 빠른 것은 아니라는 연구 결과를 제시했다. 이지현(2018)의 연구에서는 대학생들도 평균변화율로 접선의 기울기의 근삿값을 구하는 수치적 미분 및 접선의 기울기를 언어적으로 해석하는 언어적 미분의 성취 수준이 저조함을 보고하였다. 여러 학년 수준에서 나타나는 다양한 어려움들은 극한 개념과 관련되며, 미분계수의 해석적 측면과 기하적 측면을 연결하는 것에서도 발생하고 있음을 확인할 수 있다. 따라서 미분 개념을 이해하는데 어려움을 겪는 학생들을 위해 미분 개념을 직관적으로 도입하고 전개할 수 있는 대안적인 방안을 모색해볼 필요가 있다.

이와 같은 배경을 바탕으로, 우선적으로 해석적으로 도입하고 기하적인 의미를 부여하는 것과 다르게 미분을 지도하는 사례들을 탐색하고 그 의미를 찾고자 하였다. 예비적 조사를 통해 싱가포르가 우리나라와 다른 접근 방식으로 미분을 도입하고 있음을 확인하였고, 우리나라와 어떻게 다른지를 기술하고 이 차이가 갖는 수학교육적 의미를 분석하고자 하였다.

싱가포르는 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Studies) 2015와 PISA(Programme for International Student Assessment) 2015에서 전체 참여국 중 1위를 기록하였고(구자옥 외, 2016), 성취도 뿐 아니라 자신감, 가치, 즐거움 등의 정의적 특성 설문에서도 높은 지수를 나타내 학생들이 수학에 대한 긍정적인 인식을 가지고 있음을 확인할 수 있다(송미영 외, 2013). 싱가포르는 대학입시제도, 국민들의 교육열 등에서 우리나라와 유사한 측면을 갖고 있기 때문에, 교육과정이나 수학 교과서의 비교 연구에 대한 관심과 필요성이 지속적으로 인정받고 있다. 싱가포르와 우리나라의 비교 연구가 상당수 이루어져 왔으나(송은경, 2008; 이현정, 2010; 이예지, 2016), 고등학교 수학 내용에 대한 연구는 잘 이루어지지 않았다. 싱가포르 수학교육이 비교적 성공적이라는 사실과 우리나라와 유사한 측면이 있다는 점을 고려하여 싱가포르를 주요 분석 국가로 선정하였다.

본 연구는 우리나라 미분 지도에 대한 대안을 모색하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 싱가포르의 수학 교과서의 미분 개념의 도입과 전개 과정을 분석하고, 우리나라의 사례와 비교하여 그 차이를 확인하였다. 다음으로, 미분 도입과 관련하여 나타난 차이를 보다 분명하게 하기 위해 싱가포르와 유사한 접근을 택하는 영국과 호주의 사례를 추가로 분석하였다. 이상의 분석을 종합하여, 직관을 강조한 미분 지도의 대안적 방안을 제안하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 미분 개념의 역사

미분계수와 미분은 해석적으로는 함수의 변화율, 기하적으로는 접선의 기울기와 연결된다. Euclid의 원론에서 접선은 다음과 같이 정의된다: “원에 접하는 직선은 원을 자르지 않고 만나는 직선이다.” Euclid의 원론은 수학적 대상들을 정적인 것으로 다루었는데, 위의 정의에서도 이를 확인할 수 있다. Euclid의 원론에서의 접선은 한 지점에서 운동 방향을 기술하기 위한 것이 아니었다. 또한, 한 정점과 다른 한 동점의 움직임에 의해 만들어지는 동적인 과정의 결과로 얻어지거나 할선의 극한으로 얻어지는 것으로 다루지 않았다(Boyer, 1959, p.57).

기원전 3세기 아르키메데스(Archimedes: BC287~212)는 나선형을 연구하던 중 곡선에 접선을 그어 동적인 측면에서의 접선 개념에 대해 생각했다(Boyer & Merzbach, 2000). 그는 ≪방법≫에서 무한소 양에서 전체의 양

을 구하는 방법을 언급하고 있는데 이는 현재의 미분과 적분의 관계에 대응하는 것으로 평가받는다. 그러나 어떤 곡선에 대한 접선을 찾는 것과 같이 미분에 관한 직접적인 방법을 제시하지는 않았으며 적분과 미분의 역연산 관계를 드러내 보인 것이 아니라는 점에서 한계가 있다(박선용, 2010, p.49).

현재의 미분법과 직접적인 관련성을 가진 최초의 발상은 17세기 페르마의 극값에 대한 아이디어로부터 시작되었다. 페르마는 극댓값이나 극솟값을 갖는 점 x에서 $f(x)=f(x+h)$라 두고, 두 점 사이의 간격 h가 작아질수록 등식은 참이 된다고 생각하였다. 양변을 h로 나누고 $h=0$으로 하여 극댓값 또는 극솟값의 좌표 x를 구하였다(Boyer & Merzbach, 2000). 이는 현재의 미분계수 개념과 매우 흡사하다. 다만 페르마는 이 방법이 극댓값 또는 극솟값을 구하기 위한 필요조건에 한정됨을 언급하지 않았으며 극댓값과 극솟값을 구별할 수 없다는 한계를 가지고 있었다. 또한 h대신 0으로 두어 계산하는 것을 현재의 극한 개념과 동일하게 생각하기는 어렵다(정연준, 2010, p.246).

접선을 작도하고 기울기를 구하는 연구를 체계화하고 학문적 틀을 마련한 사람은 뉴턴(Newton, I.,: 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G, W., 1646~1716)이다. 뉴턴은 ≪유율법≫에서 곡선을 점의 운동에 대한 자취로 해석하고 그 좌표의 변화율을 '유율'이라고 함으로써 미분을 정의하였다. 또 이를 좌표평면에 나타낼 때 $\dot{x}, \dot{y}$를 사용하였는데, 현재의 미분 표기법에 의하면 시간 t에 대해 각각 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$에 해당된다. 라이프니츠는 곡선의 접선을 결정하기 위해서는 가로, 세로 좌표의 비가 무한히 작아져야 함을 알았다. 이 과정에서 무한소를 사용하였으며 현재의 미분 기호로 사용되는 dx, dy를 고안하였다. 이후 여러 수학자들에 의해 극한의 개념이 명확해지고 바이어슈트라스(Weierstrass: 1815~1897)가 $\epsilon-\delta$ 논법을 도입함으로써 엄밀한 미분의 정의가 가능해졌다.

미분 개념의 역사를 볼 때 2015 개정 수학과 교육과정처럼 함수의 극한에 의해 미분계수를 정의하는 것은 비교적 최신의 결과이며, 미분의 아이디어는 접선에서 시작하여 접선의 기울기를 구하기 위한 것으로 그리고 변화율을 구하기 위한 것으로 발전하였다. 이러한 역사발생적 접근이 학생들의 미분 개념에 대한 이해를 돕는다면 미분 개념을 도입하는 데 적극 활용해볼 수 있을 것이다.

2. 미분계수와 미분

학교수학에서 미분계수와 미분에 대한 학습은 할선과 접선의 관계 그리고 평균변화율과 순간변화율의 관계에 기초하여 이루어진다(정연준, 2010). 또한, 우리나라 교육과정에서 미분은 함수의 변화를 기술하기 위한 것으로 도입된다. 미분계수는 미분 지도의 첫 순서로, 고등학교에서 함수의 평균변화율의 극한으로 정의되어 다루어지고, 그것의 기하학적 의미가 접선의 기울기임을 밝히는 순서로 전개된다.

미분계수와 도함수는 우리나라에서는 다르게 표현되지만, 영어권에서는 같은 단어를 사용한다. $\mathrm{P}(x,y)$위에서 접선 l의 기울기를 $f'(x)$로 나타내며, 이것을 x에서의 순간변화율 또는 미분계수(derivative)라고 하는데, (x,y)는 임의의 점이므로 $f'(x)$를 함수로 볼 수 있다. 이를 $f(x)$의 도함수(derivative)라고 한다. 그리고 미분계수와 도함수를 구하는 과정을 미분(differentiation)이라고 하는데, 이 용어는 미분계수와 도함수를 구하기 위한 식인 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$에서 분자와 분모를 각각 차분(difference)라고 하는 데에서 비롯되었다(정상권, 2014, p.225).

순간변화율의 극한으로 미분계수를 정의한 후 접선을 할선의 극한으로 본다. 이와 같이 미분계수의 기하학적 의미로 접선의 기울기를 다루는 방식은 접선을 구성하는 것을 포함한다. 이는 주어진 접선에 대해 그것의 기울기를 구하기 위해서 미분계수를 구하는 것과 미묘하게 다르다. 이 미묘한 차이는 접선을 Euclid와 같이 정적으로 정의하는 것과 Euclid와 다르게 동적으로 정의하는 것의 차이에서 발생한다. 전자는 접선의 존재를 전제하고 있으나 후자는 접선을 할선의 극한 과정을 통해 구성되는 것으로, 후자의 정의 방식에서는 접선의 존재성이 접

선의 구성가능성으로 대치된다. 기하적 측면에서 접선의 존재를 전제하고 접선을 탐구하기 위한 방법으로 미분계수와 미분을 도입하는 것과 해석적 측면에서 순간변화율과 할선의 극한으로 미분계수와 미분 그리고 접선을 도입하는 것은 이 차이를 포함하고 있다. 이 두 접근의 차이는 선행연구에서 보고된 학생들이 미분계수와 미분 학습에서 겪는 어려움들(Amit & Vinner, 1990; Bezuidenhout, 1998; 이지현, 2018)의 원인이 될 수 있다.

3. 직관

일반적으로 직관은 분석과 추론과 같이 다른 인식작용 없이 순간적으로 성립하는 인식능력이나 작용을 의미한다. Kant 철학에서 직관은 개념과 대립되는 것으로, 이성에 의해 파악되는 일종의 내용이라 할 수 있다. 직관은 대상과 직접적으로 관계하지만, 특정한 대상에 한정된다. 그리고 이는 많은 대상에 간접적으로 관계하지만 보편적 대상에 관한 것인 개념과 구분된다(Sakabe et al., 2009). Kant는 우리의 지식이 정신의 두 가지 근본적인 자원(표상으로 받아들이는 능력과 표상을 통해 대상에 대해 생각하는 힘)들에 기초한다고 설명하면서, 직관과 개념을 구분하고, 지식에 대한 직관과 개념의 상보적인 관계를 강조했다.

> “첫 번째(표상으로 받아들이는 능력)를 통해 대상들은 우리에게 주어지고, 두 번째(표상을 통해 대상에 대해 생각하는 힘)를 통해 대상은 그 [주어진] 표상과 관련하여 사유될 수 있다. 그래서 직관(주어진 것)과 개념(사유된 것)은 모든 우리의 지식 요소들을 구성하고, 직관이 없는 어떤 개념도 그리고 개념이 없는 어떤 직관도 지식을 만들 수 없다.” (Kant, 1956, A50-51/B74-75)

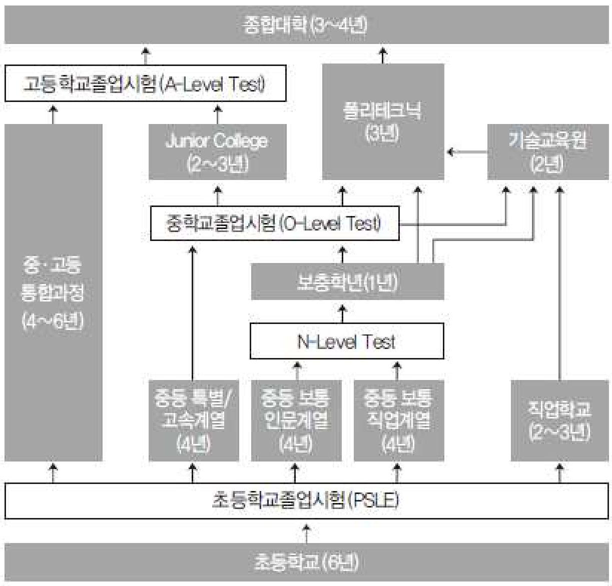
비록 직관은 일반적인 인식이 아니라 특수한 인식이고, 그 자체로만으로는 지식을 만들 수 없는 것이지만, 직관은 수학적 인식에 중요한 역할을 한다. Otte(2003)는 직관이 그 자체로는 일반성을 갖지 않는 특수한 것이고, 규칙적이지 않음과 차이에 본질적으로 의존하는 것이지만, 바로 그 차이를 반복적으로 마주치는 것을 통해 일반화하게 된다고 주장했다. 또한, Otte(2003)에 따르면, 직관은 수학적 또는 과학적 발견에서의 놀라움의 원천으로 우리의 지식을 확장하기 위한 발견을 제공하며, 연속성 또는 일반성을 전제하고 있기에 사실의 발견과 지식 구성에 필수적이다.

직관은 수학적 대상과 표현 사이의 관계와도 관련된다. 잘 알려지고 받아들여지고 있는 바와 같이, 수학적 대상은 경험적이지 않고 구체적이지 않은 추상적인 것이다(Piaget & Garcia, 1989; Sfard, 2008). 또한, 우리는 수학적 대상에 직접적으로 접근할 수 없으며, 오직 표현을 통해서만 수학적 대상에 접근할 수 있다(Duval, 2000). Peirce의 관점에서 대상과 표현의 관계는 도상적(iconic), 지표적(indexical), 상징적(symbolic)인 것으로 구분되는데, 이 중 도상적 관계는 대상에 대한 예상하지 못한 진리를 밝혀낼 수 있도록 하는 가능성을 제공한다(Otte, 2003).

곡선과 곡선의 접선을 기하적 대상과 그 관계로 보는 것은 수학적 대상과 표현 사이의 도상적 관계에 기초한다. 그리고 도상적 관계에 있는 수학적 표현으로서 시각적 표현들을 보고 파악하는 과정은 주로 직관에 의해 대상과 대상의 표현을 지각하는 것을 통해 이루어진다. 이와 같은 의미에서 미분계수와 미분을 평균변화율의 극한인 순간변화율로 접근하지 않고, 접선에 기초하여 접선의 기울기로 접근하는 것은 미분계수와 미분을 도입하는 데 있어서 직관을 강조하는 것이라 할 수 있다.

Ⅲ. 싱가포르의 학제와 수학과 교육과정

싱가포르의 학제는 [그림 Ⅲ-1]과 같이 초등학교(Primary School) 6년, 중등학교(Secondary School) 4(5)년, 후기 중등학교(Post-Secondary School) 2년, 대학교(University) 3년의 형태를 이루고 있다. 초등학교 5학년부터 수준별로 과정이 나뉘며 6학년 때 중등학교로 진학하기 위해 초등학교 졸업 시험(Primary School Leaving Examination: PSLE)에 응시하여 이 시험의 성적에 따라 지원할 수 있는 중등학교의 수준이 결정된다. 중등학교는 특별 과정(Special Course), 고속 과정(Express Course), 보통 과정(Normal Academic/Technical Course)으로 나뉘며 과정마다 교육 내용이 다르다. 특별 과정은 PSLE 시험 성적 상위 10% 정도의 학생들이 선택하고, 그 외에 성적이 우수한 학생은 고속 과정을 선택하며 이 두 과정은 4년제이다. 그 외 학생들은 보통 과정에서 5년간 공부하며 4학년을 마친 후 GCE N-level(표준 수준 시험)을 치른다. 이 시험에서 일정 점수 이상을 성취하면 전문대학이나 기술교육학교에 진학할 수 있고 또는 5학년에 진급하여 공부한 뒤 특별, 고속 과정 학생들과 동일한 GCE O-level(보통 수준 시험)을 치러 후기 중등학교로 진학할 수 있다. 학생들의 성취수준에 따라 학교와 학제가 구분되어 있지만 학생들은 자신의 학습 결과 및 시험 성적, 교사의 승인에 의해 다른 과정으로의 이동이 가능하다. GCE O-level에 따라 상위 30% 정도의 학생들은 대학 진학을 위한 준비 교육기관(Pre-University)인 Junior College 또는 Centralized Institute(3년제)로 진학하거나 기술교육과 직업교육을 하는 폴리테크닉 등으로 진학한다. 일반적으로 Pre-University를 졸업한 학생들에게 GCE A-level(고등학교 졸업시험) 응시자격이 주어지고 그 결과에 따라 대학 진학의 기회가 주어진다. 싱가포르의 대학은 7개의 국립대학교와 작은 규모의 사립대학교가 있는데, Pre-University에서 공부한 대부분의 학생들은 국립대학교로 진학하며 사립대학교는 외국인 유학생들의 비율이 높다(Ministry of Education, Singapore, 2017).

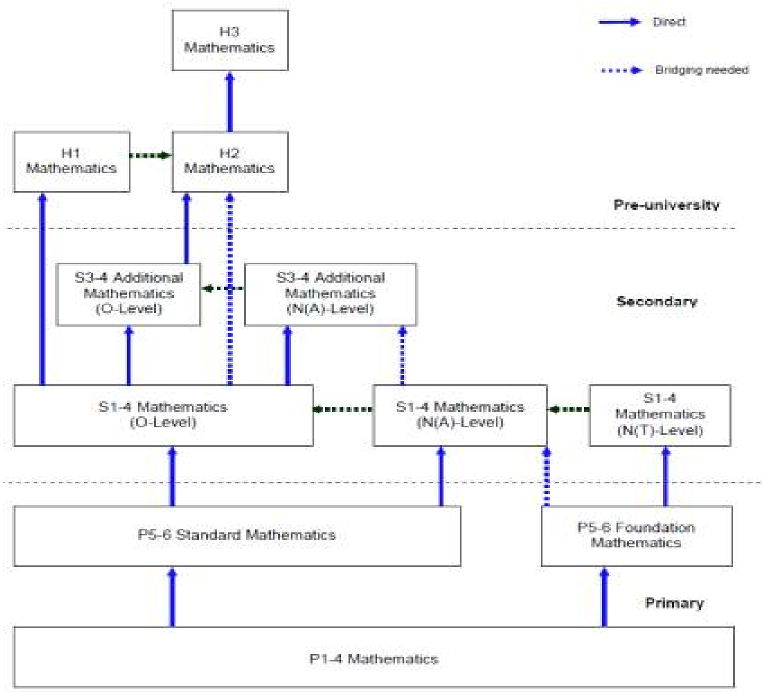


[그림 Ⅲ-1] 싱가포르 학교 제도 (한국교육개발원, http://edzine.kedi.re.kr)

Pre-University로 진학하는 학생들의 경우 자신의 진로에 따라 중등학교에서 이수하는 과목이 다르다. 모국어

를 포함한 의무과목을 필수로 하고, 이공계 진학을 희망할 경우 물리, 생물, 화학, 물리과학, 수학, Additional Mathematics(추가수학), 경제, 컴퓨터 과학을 선택하여 이수해야 한다. 문학 및 예술계 진학을 희망할 경우 경제, 역사, 지리, 수학, 모국어 및 외국어 중 선택하고, 상업계 진학을 희망할 경우 회계원리, 경영, 수학 등이 선택과목에 포함된다.

싱가포르의 수학 과목 이수 계열([그림 II-2])은 학생이 선택한 진로와 교육과정에 따라 달라진다. 싱가포르 교육 체계의 큰 특징은 초등학교 단계부터 일찍 여러 과정으로 분화되어 학습한다는 것인데, 지나치게 어린 학생들에게 시험의 부담을 주는 단점이 있지만 각 과정 사이에 시험 또는 1년 정도의 추가적인 학습 기회를 통해 이동이 가능하도록 장치가 마련되어 있다. 중등학교 진학 후 가장 많은 학생들이 고속 과정을 학습하게 되는데 학년별로 구성된 교과서를 공부한다.



[그림 II-2] 싱가포르 수학 과목 이수 계열 (Ministry of Education Singapore, 2012)

이공 계열 진학을 희망할 경우, 중등학교 3~4학년 학생들은 Additional Mathematics를 선택하여 이수해야 한다. 그 후 후기 중등학교로 진학하여 H2 Mathematics라는 심화된 수학을 학습하게 된다. 인문, 상경, 예술 계열로 진학을 희망하는 경우, 중등학교에서 Additional Mathematics를 이수하지 않아도 되며 후기 중등학교 진학 후 H1 Mathematics라는 과목을 학습한다. 만일 중등학교에서 Additional Mathematics를 이수하지 않은 학생이 이공 계열로 진학을 희망할 경우, 후기 중등학교에서 H1 Mathematics를 이수한 후 H2 Mathematics를 학습해야 한다. 수학 전공을 희망하거나 심도 있는 수학 공부를 필요로 하는 학생들은 H2 Mathematics를 이수한 후 H3 Mathematics를 선택하여 수준 높은 수학 학습을 할 수 있다.

싱가포르는 2015년 이전까지 별도의 고등학교 교육과정 없이 GCE A-level의 출제 범위에 맞춰 필요한 내용

을 가르치다가 고등학교 교육과정(Curriculum Planning and Development Division, 2015)이 만들어지면서 2016년부터 공식적인 교육과정에 따라 수업이 이루어지고 있다[1](Ministry of Education, Singapore, 2017).

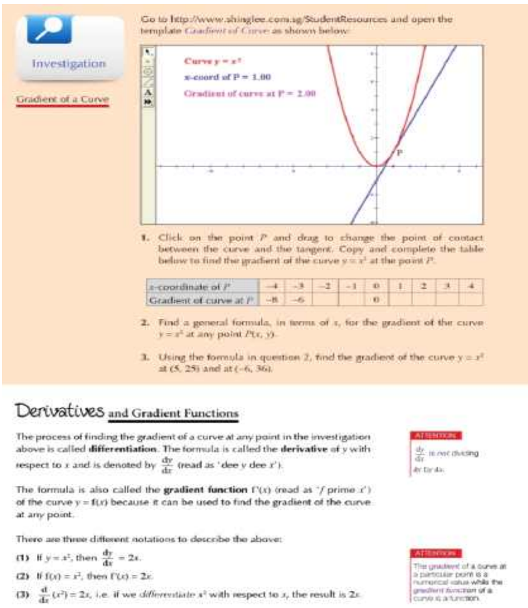
싱가포르와 우리나라에서 미분법을 처음으로 배우게 되는 시기를 살펴보면 우리나라는 고등학교 2학년이 주로 배우는 <수학Ⅱ> 과목이고, 싱가포르는 중등학교 3~4학년 O-level 또는 N(A)-level 과정에 있는 학생들이 Additional Mathematics 과목을 선택할 때이다. 즉 우리나라 학생들은 대체로 17세, 싱가포르 학생들은 15~17세에 미분을 처음 접하게 된다. 싱가포르가 우리나라에 비해 어린 나이에 미분계수와 미분을 처음 배우기 시작한다는 점을 고려하면, 싱가포르는 우리나라와 다른 방식으로 미분계수를 도입하고 미분을 지도할 가능성이 있다.

Ⅳ. 우리나라와 비교한 싱가포르 교과서 미분 도입의 특징

본 연구는 미분이 처음 도입되는 시기에 직관적인 접근과 전개가 어떻게 이루어질 수 있는지 살펴보기 위해 싱가포르의 O-level에 해당하는 교과서 중 New Syllabus Additional Mathematics 9th Edition(Yeo et al, 2013; 이하 NSAM)와 우리나라의 <수학Ⅱ>(김원경 외, 2018) 교과서를 비교하였다. 한국과 싱가포르의 두 교과서에서 미분의 도입과 학습 개념을 설명하는 방법을 비교하고 싱가포르 교과서의 내용 구성의 특징을 제시하였다. 또한 각 소단원 학습 후 제시되는 예제의 형태와 난이도를 비교하였다.

1. 기울기 함수로서의 도함수

싱가포르에서 미분 계수는 함수의 극한을 이용하지 않고 곡선의 기울기로서 그 의미를 다루고 있다.



[그림 Ⅳ-1] NSAM 교과서의 미분 개념 도입

1) H3 Mathematics의 경우 2017년부터 적용되었다.

NSAM은 [그림 Ⅳ-1]에서 ‘$y=x^2$의 함수 위에 주어진 한 점에서의 곡선의 기울기를 찾는 방법’을 미분으로 정의하고 있다. 탐구활동인 Investigation에서 그래프 작도 프로그램을 이용하여 각 점에서 곡선의 기울기를 찾아 표로 나타낸 다음 관계식을 구하는 학습 경험을 하도록 되어 있다. 이 때, 관계식 $y=2x$를 ‘x에 대한 y의 미분’이라 정의한다. NSAM은 공학적 도구를 활용하여 몇 개의 규칙성을 발견한 후 귀납적 추론을 통해 미분을 도입하고 있다. 엄밀한 정의를 통해 미분을 지도하는 대신 도함수가 갖는 의미를 명확히 알 수 있도록 하고 미분을 통해 도함수를 구했을 때 얻을 수 있는 정보가 곡선의 기울기임을 직관적으로 쉽게 이해하는 데 주안점을 두고 있다. 하지만 그래프 작도 프로그램을 이용하여 한 점에서 곡선의 기울기를 관찰하고 관계식으로서 미분계수를 설명하기 때문에 예제를 제시하기 어렵다는 한계가 있다.

우리나라 <수학Ⅱ>의 경우 그래프 위의 두 점 사이에서 평균변화율을 정의하고 x축, y축 증분을 각각 Δx, Δy로 정한 뒤, $\Delta x \to 0$ 일 때 평균변화율의 극한으로 순간변화율(미분계수)을 지도하고 있다. 이때 극한값이 존재하면 미분가능하다고 정의하며 미분을 도입하고 있다(김원경 외, 2018). 따라서 도함수는 함수의 극한을 이용하여 직접 계산할 수 있다. 우리나라 미분의 도입은 싱가포르의 방식에 비해 수학적으로 엄밀성을 보장하고, 공학적 도구나 귀납적 추측에 의존하지 않고 인수분해 정도의 기능을 이용하여 다항함수의 도함수를 구할 수 있는 장점을 가진다. 그러나 도함수와 미분의 필요성과 의미에 대해 이해하기 위해서는 도함수의 활용 단계까지 학습이 필요하다.

두 나라에서 미분 도입 방식의 차이는 극한의 활용 여부라 할 수 있다. 우리나라의 경우 미분을 지도하기 위해 반드시 함수의 극한에 대한 이해가 선행되어야 하므로 <수학Ⅱ> 교과서의 1단원에서 함수의 극한을 배우고 2단원에서 미분법을 다룬다. 이는 2015 개정 교육과정 이전의 교과서에서도 동일하다. 반면 싱가포르의 경우 극한의 아이디어를 이용하지 않고 직관에 의해 미분을 도입하고 있으므로 함수의 극한에 대한 선행 학습이 필요하지 않다. 실제로 싱가포르 교육과정(Curriculum Planning and Development Division, 2015) Additional Mathematics와 H1 Mathematics에서는 극한의 기호를 학습 내용으로 제시하고 있지 않다.

평균변화율과 순간변화율이 등장하지만 주어진 상황에 맞추어 해석하게 하고 극한으로는 설명하지 않는다. 순간변화율 문제는 미분하여 풀게 한다.

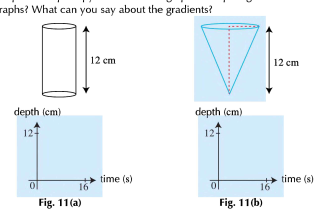

Consider the 2 cups shown below. Each cup has a height of 12 cm and a volume of 240 cm³. It takes 16 seconds to fill up each cup. Copy and sketch the graphs of depth against time. What do you observe about the two graphs? What can you say about the gradients?

Fig. 11(a) **Fig. 11(b)**

(a) Discuss with your classmates the shape of the graphs in Fig. 11(a) and Fig. 11(b).

Since it takes 16 seconds to fill up a conical cup of volume 240 cm³, we say that the **average rate of change** in the volume is 15 cm³ per second. The height of the conical cup is 12 cm, so the depth of water in the cup increases from 0 cm to 12 cm in 16 seconds.

(b) What is the average rate of change in the depth of the water in the cup? Is the depth of water in the conical cup rising at a constant rate when it is being filled? Can we say that the rate of increase in the depth of water in the conical cup changes as water is dispensed?

Assuming that the flow of water from the big container is constant, the water is said to be dispensed at a **constant rate** of 15 cm³ per second. The **instantaneous rate of change** of the depth of water at a particular time, t, is the gradient of the curve, which can be found by drawing a tangent to the curve at t or by using differentiation to find the gradient of the tangent at t.

[그림 Ⅳ-2] 미분계수의 활용으로서 순간변화율

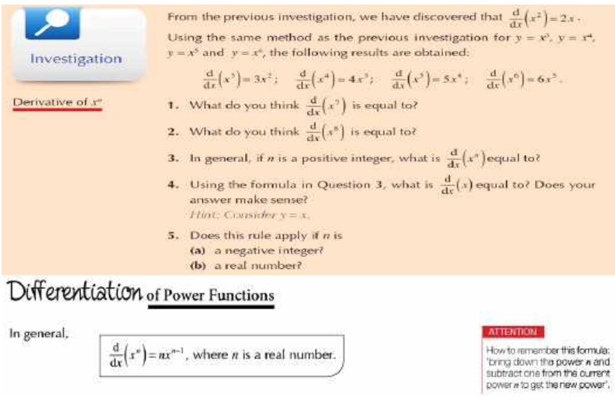
[그림 Ⅳ-2]와 같이 높이와 부피가 같은 원기둥 컵과 원뿔 컵에 물을 채울 때, 시간에 따른 높이의 변화를 이용하여 평균변화율과 순간변화율을 정의하고 미분을 이용하여 순간변화율을 구한다. 즉, 도함수의 활용으로 순간변화율을 지도한다. 우리나라의 <수학Ⅱ>에서는 '지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.'(교육부, 2015, p.76)라는 평가 방법 및 유의 사항에 따라 변화율을 계산하는 문제를 속도와 가속도에 대한 문제로 한정하여 다룬다.

2. 귀납적 외삽법을 이용한 $y=x^n$의 도함수

싱가포르 NSAM은 공학적 도구를 활용하여 곡선 위의 모든 점에서 곡선의 기울기를 구할 수 있고 이 대응관계를 실수 전체로 확장하여 Gradient Functions(기울기 함수)라 한다고 설명하고 있다. $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$와 같은 기호 사용과 함께 'x에 대한 y의 미분'이라는 표현도 제시하고 있다.

우리나라는 NSAM과 동일하게 $y=x^2$에서 x가 정수인 점에서의 미분계수를 구해 표를 만드는 활동을 제시한다. 미분계수의 정의를 이용하여 대응표를 완성하고, $y=f(x)$에서 미분가능한 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시킨 함수로 도함수를 정의한다. 미분계수를 정의할 때와 같이 x의 증분 Δx가 0에 수렴하는 극한으로써 $f'(x)$를 나타낸다.

도함수 지도에서 두 나라의 차이점은 $y=x^n$ 형태의 함수의 도함수에서 지수 n의 범위이다. 우리나라는 n을 양의 정수와 0인 경우로 한정하고 도함수의 정의를 이용하여 연역적인 증명으로 도함수를 구한다. 이 과정에서 a^n-b^n을 인수분해한 식이 보충 개념으로 활용된다. 반면 싱가포르 NSAM에서는 $y=x^2$의 Gradient Functions(기울기 함수)를 찾았던 방식과 동일하게 $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$의 기울기 함수를 구해보도록 하고, 몇 번의 반복을 통해 귀납적 외삽법으로 n이 양의 정수인 경우, n이 음의 정수인 경우, n이 실수인 경우로 확장하여 기울기 함수를 예측하도록 구성되어 있다. 싱가포르 NSAM의 $y=x^n$의 기울기 함수 내용은 [그림 Ⅳ-3]과 같다.


Investigation

Derivative of x^n

From the previous investigation, we have discovered that $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$.
Using the same method as the previous investigation for $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$ and $y=x^6$, the following results are obtained:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2;\quad \frac{d}{dx}\left(x^4\right)=4x^3;\quad \frac{d}{dx}\left(x^5\right)=5x^4;\quad \frac{d}{dx}\left(x^6\right)=6x^5.$$

1. What do you think $\frac{d}{dx}\left(x^7\right)$ is equal to?
2. What do you think $\frac{d}{dx}\left(x^8\right)$ is equal to?
3. In general, if n is a positive integer, what is $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)$ equal to?
4. Using the formula in Question 3, what is $\frac{d}{dx}(x)$ equal to? Does your answer make sense?
   Hint: Consider $y=x$.
5. Does this rule apply if n is
   (a) a negative integer?
   (b) a real number?

Differentiation of Power Functions

In general, $\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}\text{, where } n \text{ is a real number.}}$

ATTENTION
How to remember this formula: 'bring down the power n and subtract one from the current power n to get the new power'.

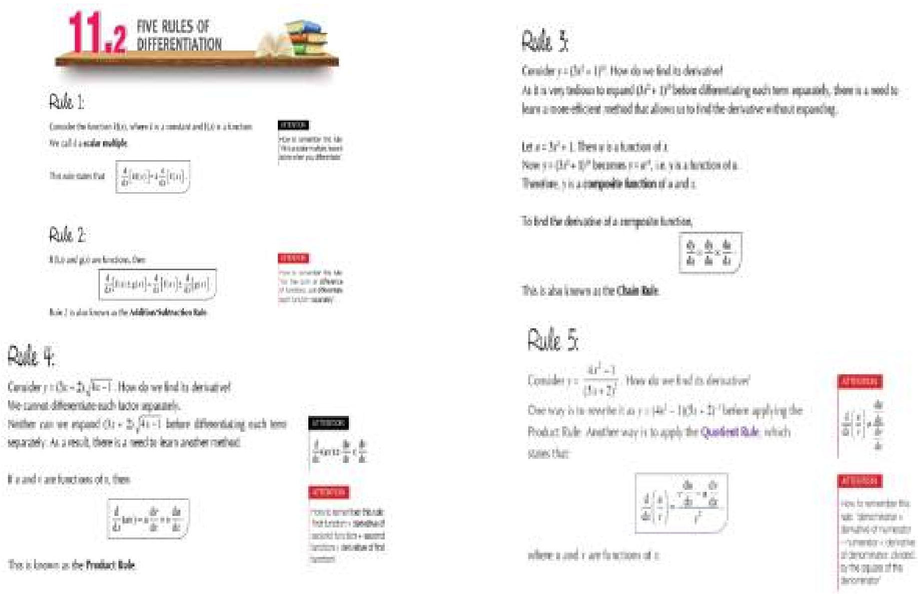
[그림 Ⅳ-3] 귀납적 외삽법을 이용한 다항함수 $y=x^n$의 도함수

3. 증명 없이 제시되는 미분의 성질

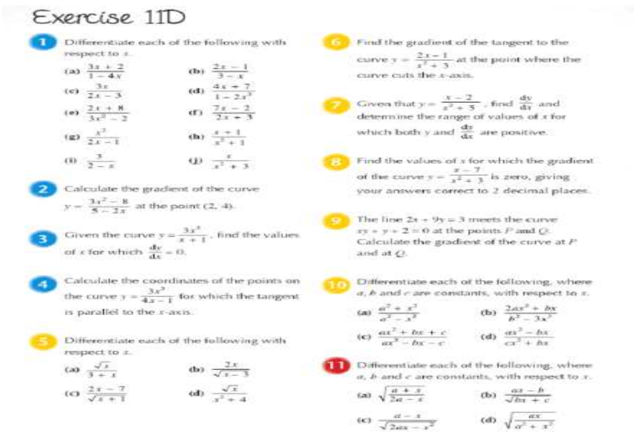
도함수를 구하기 위한 미분법은 우리나라에서 함수의 실수배의 미분, 함수의 합과 차의 미분, 함수의 곱의 미분, 연쇄법칙, 함수의 몫의 미분의 다섯 가지로 다루어진다. <수학Ⅱ>에서는 함수의 실수배의 미분, 함수의 합과 차의 미분, 함수의 곱의 미분을 배우고 연쇄법칙과 함수의 몫의 미분은 <미적분> 과목에서 다룬다. <수학Ⅱ>의

세 가지 미분법은 증명으로 제시하거나 학생들이 증명 과정을 스스로 해결하여 법칙을 발견하도록 구성되어 있고, 학생들은 증명을 통한 정리를 익힌 후 예제를 통해 계산 연습을 하는 순서로 학습한다. <미적분>에서 연쇄법칙과 함수의 몫의 미분을 설명할 때도 유사한 형태이다.

싱가포르 NSAM에서도 [그림 Ⅳ-4]처럼 다섯 가지 미분법을 모두 제시하고 있는데 증명과정이나 설명 없이 소단원 제목 'Five Rules of Differentiation'(다섯 가지 미분 법칙)처럼 미분 방법을 나열하고 예제를 통해 계산 연습을 하도록 되어 있다. 원리보다 계산 기법에 초점을 두고 '각각 따로 계산한다', '전개할 필요 없다', '바깥쪽을 계산한 후 안쪽을 계산한다'와 같이 직관에 영향을 주는 부연 설명을 달아 놓았다.



[그림 Ⅳ-4] 싱가포르 교과서의 미분법



[그림 Ⅳ-5] 싱가포르 교과서의 미분 문제 예시

싱가포르는 <수학Ⅱ>에 비해 많은 예제, 문제, 연습문제가 5가지 미분법 내용에 연결되어 있다. 이미 모든 실수 n에 대해 $y=x^n$의 도함수를 다루었기 때문에 미분의 대상이 되는 함수의 영역이 유리함수, 무리함수까지 확장되어 있다. 그래서 다항함수만을 미분의 대상으로 하는 <수학Ⅱ>에 비해 복잡하고 다양한 미분 문제가 포함되어 있다([그림 Ⅳ-5]).

4. 컴퓨터 프로그램을 이용한 초월함수의 미분

싱가포르 NSAM 교과서에서는 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 미분과 도함수의 활용이 제시되어 있는데 이는 싱가포르 학생들 중 O-level 과정에 해당하는 학생들만 해당하고 N(A)-level 학생들의 Additional Mathematics에는 포함되지 않는다. 우리나라에서 이 내용들은 <미적분>과목에서 학습하게 된다.

내용 구성의 차이는 $y=x^n$의 도함수를 구할 때와 마찬가지로 우리나라의 경우 도함수의 정의를 활용한 연역적 증명을 기본으로 하고 있으며 싱가포르의 경우 삼각함수, 지수함수, 로그함수 모두 교과서에서 소프트웨어를 통해 곧바로 도함수를 보여주고 그 함수를 추론하는 형태로 지도한다.

1. Use a suitable graphing software to plot the graph of $y = \sin x$, where x is in radians. From the menu, select the option to display the graph of the derivative of $y = \sin x$.
(i) What is the equation of the graph that you obtain?
(ii) What can you say about the derivative of $\sin x$?

2. On a new page, plot the graph of $y = \cos x$, where x is in radians. From the menu, select the option to display the graph of the derivative of $y = \cos x$.
(i) What is the equation of the graph that you obtain?
(ii) What can you say about the derivative of $\cos x$?

From the investigation, we can conclude that

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$, where x is in radians,
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$, where x is in radians.

[그림 Ⅳ-6] 싱가포르 교과서의 초월함수 미분

위의 네 가지 교과서 비교 내용을 통해 싱가포르 교과서의 구성이 우리나라에 비해 기능 중심으로 이루어져 있음을 알 수 있다. 우리나라 교과서와 같은 연역적 증명을 통한 용어의 정의를 하지 않고, 그래프나 계산식의 관찰을 통한 귀납적 방법으로 도함수를 지도하는 차이를 보인다. 이러한 개념 도입의 차이로 인해 같은 학습 내용을 설명하면서도 학습 경험의 형태와 순서가 다르게 나타난다.

싱가포르 교과서에서 도함수의 정의를 다루는 시기는 NSAM을 이수한 후 배울 수 있는 H2 Mathematic 과정이다. 그러나 싱가포르 교육과정에서 극한 개념은 정의나 기호를 사용하지 않는 직관에 의존하고 있기 때문에 도함수의 정의 역시 그래프를 통한 이해로 제한되어 있다. 대신 도함수의 활용을 강조하여 여러 가지 함수의 극값이나 변곡점, 법선의 기울기 등의 계산 응용을 다루고 있다.

우리나라 교과서의 미분법은 정의와 증명을 통해 개념을 학습하고 원리를 이해한 후에 활용 단계로 들어가게 된다. 인과 관계를 이해하고 체계적인 학습이 가능하지만 충분한 개념 이해가 되지 않았을 경우 미분법의 가치와 효용성을 이해하지 못해 교육과정의 성취 기준을 달성하는데 어려움이 생긴다.

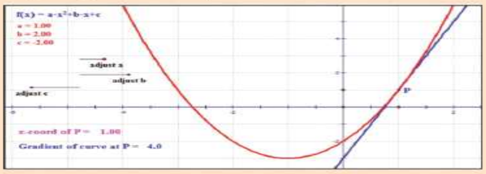
싱가포르의 직관적인 미분법 도입과 기능을 강조한 도함수 지도는 개념을 처음 학습하는 학생들이 수월감을

느끼도록 하여 정의적 측면에서 긍정적이다. 또한 최적화 모델링과 같은 문제 해결을 강조함으로써 도함수의 필요성을 자연스럽게 느낄 수 있다는 장점이 있다. 반면, 개념 습득을 위해 직관에 의존하는 경우가 많아 충분한 수학적 사고가 일어나지 않을 수 있다는 단점이 있다. 이는 문제 해결을 강조하는 싱가포르 수학과 교육과정 체계와 관련지을 수 있다.

5. 공학적 도구의 활용

미분의 개념을 기울기 함수로 도입하는 싱가포르의 경우 공학적 도구의 활용을 적극적으로 하고 있다. [그림 Ⅳ-7]과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 주어진 이차함수 위의 한 점에서 곡선의 기울기를 구하고 점을 최대, 최소 근처로 옮겨가면서 어떻게 변하는가를 관찰하여 기울기의 변화를 살펴본다. 이 곡선의 기울기가 최대, 최소인 점 부근에 가까워질 때 부호가 어떻게 변하는가에 따라 극대, 극소, 변곡점으로 나누어 학습 내용을 제시한다.

Go to http://www.shinglee.com.sg/StudentResources/ and open the computer algebra software template *Stationary Points*.



The template shows the graph of $y = ax^2 + bx + c$ (red curve) and the tangent (blue line) to the curve at the point of contact $P(x_1, y_1)$.

Part A: Minimum Point

1. Drag and move the point P to change the value of its x-coordinate of P to those in the table below. Record the gradient of the curve at P. Copy and complete the table.

x-coordinate of P	−2	−1	0	1	2	3	4
Gradient of curve at P							

[그림 Ⅳ-7] 공학적 도구를 활용한 이차함수의 미분 탐구

1. Use a suitable graphing software to plot the graph of $y = \sin x$, where x is in radians. From the menu, select the option to display the graph of the derivative of $y = \sin x$.
   (i) What is the equation of the graph that you obtain?
   (ii) What can you say about the derivative of $\sin x$?

2. On a new page, plot the graph of $y = \cos x$, where x is in radians. From the menu, select the option to display the graph of the derivative of $y = \cos x$.
   (i) What is the equation of the graph that you obtain?
   (ii) What can you say about the derivative of $\cos x$?

Use a suitable graphing software to plot the graph of $y = \ln x$. From the menu, select the option to display the graph of the derivative of $y = \ln x$.
(i) What is the equation of the graph that you obtain?
(ii) What can you say about the derivative of $\ln x$?

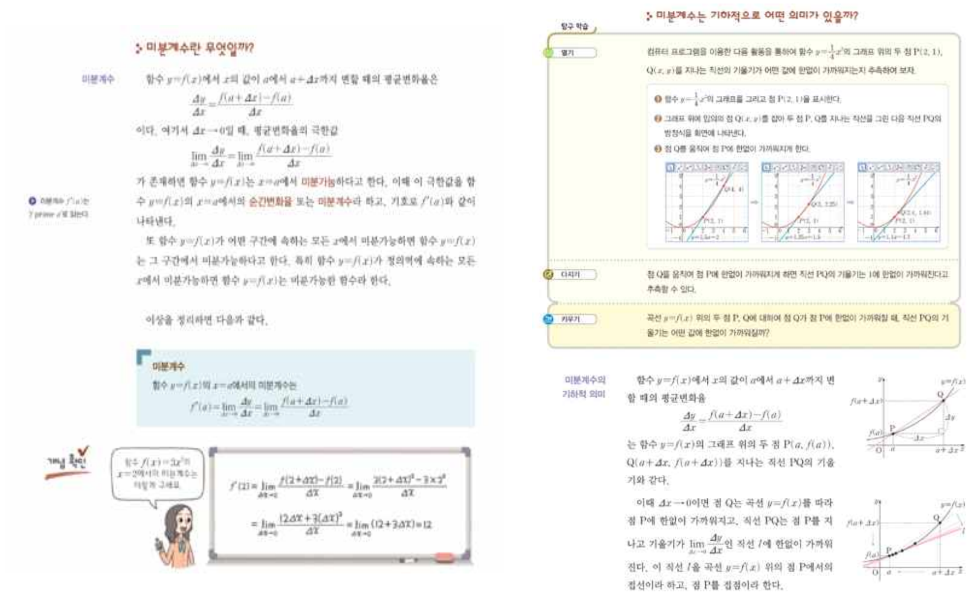
Use a suitable graphing software to plot the graph of $y = e^x$. From the menu, select the option to display the graph of the derivative of $y = e^x$.
(i) What is the equation of the graph that you obtain?
(ii) What can you say about the derivative of e^x?

[그림 Ⅳ-8] 싱가포르 교과서에서 공학적 도구를 활용한 초월함수의 도함수 구하기

공학적 도구를 활용하면 [그림 Ⅳ-8]과 같이 도함수의 그래프 그리기 기능을 이용하여 도함수를 구하고 원래 함수와의 관계를 파악할 수 있다. 싱가포르는 공학적 도구를 활용하여 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 미분도 구하게 하고 있다. <미적분>처럼 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 도함수를 증명하지 않으므로 공학적 도구의 도움을 받아 도함수를 구하고 그대로 문제를 해결하는데 적용한다.

Ⅴ. 직관을 강조하여 미분을 도입하는 대안적 방안 탐색

학교수학에서 미분계수의 정의와 미분의 도입은 순간변화율과 접선 중 무엇으로 미분계수와 미분을 도입하는지, 미분계수에서 도함수를 전개함에 있어서 극한 과정을 시각적 표현과 식 표현 중 어떤 것을 이용하는지, 도함수를 구하는 과정에서 귀납적 추론의 기회를 제공하는지의 여부 등 다양한 측면에서 다를 수 있다. 이하에서는, 4장 1절에서 다룬 미분계수와 도함수의 도입에 관한 교과서 비교를 확장한다. 싱가포르와 우리나라 이외의 국가 사례를 검토한 결과를 바탕으로 몇 가지 구분되는 방식의 미분계수와 미분 도입 방식에 대해서 다룬다. 이하에서는 우리나라의 사례를 먼저 제시한 후, 직관을 강조하는 정도를 고려하여 호주와 영국의 순서로 각 국가의 사례에서 미분계수와 미분을 도입하는 방식을 제시한다.

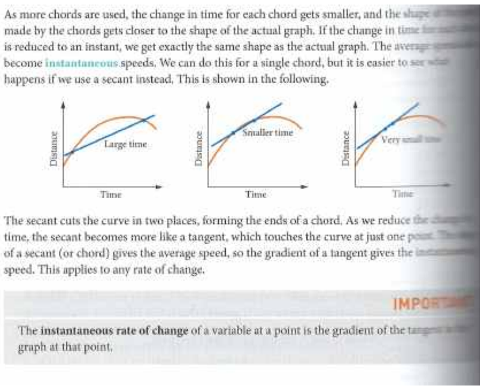


[그림 Ⅴ-1] 우리나라 교과서의 미분계수 도입(류희찬 외, 2018, pp.54-55)

2009 개정 교육과정과 마찬가지로, 우리나라의 2015 개정 교육과정과 이에 따른 수학 교과서는 순간변화율로 미분계수를 도입하고, 함수의 극한을 이용해 표현된 식을 실제로 계산하는 것을 통해 미분계수의 값을 구한다([그림 Ⅴ-1]). 그리고 접선과 접점을 극한을 이용해 정의한 뒤, 미분계수의 기하학적 의미를 다룬다([그림 Ⅴ-2]). 이어, 미분계수를 구하는 과정이 특정한 x값이나 상수 a가 아닌 변수 a에 대해 적용될 수 있고, $x=a$에서의 미분계수를 실제로 계산하여 $f'(a)$의 값을 식으로 구한 후, 구한 식이 함수에 대한 식 표현임을 알게 하는 방식으로 도함수를 지도한다. 우리나라의 미분계수 도입과 미분 지도 방식은 Ⅳ장 1절에서 살펴본 바와 같이, 순

간변화율로 미분계수를 도입한다는 점, 함수의 극한을 이용해 표현된 식을 실제로 계산하는 과정을 통해 미분계수의 값을 구한다는 점, 접선의 기울기를 미분계수의 기하학적 의미로 다룬다는 점에서 싱가포르의 경우와 차이가 있다. 이 세 가지 차이점들은 호주와 영국의 사례와의 비교에서도 나타난다.

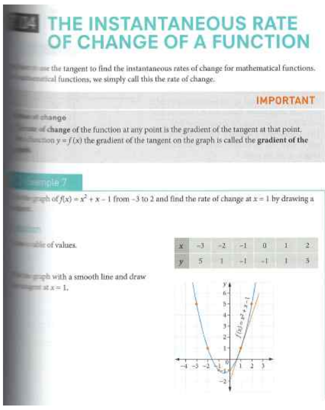
호주는 미분계수를 함수의 순간변화율로 도입하고 접선과 접선의 기울기를 순간변화율의 기하학적 의미로 다룬다는 점에서는 우리나라와 동일하지만, 함수의 극한을 이용해 표현된 식을 실제로 계산하지 않고 공학적 도구를 이용해 접선의 기울기를 구하는 것으로 대신한다는 점에서 우리나라와 차이가 있다. 또한, 미분계수를 함수의 순간변화율로 도입하는 것에서도 우리나라와 약간의 차이가 있다([그림 Ⅴ-2]). 호주는 미분계수를 도입하기 전에 순간변화율과 접선의 기울기를 먼저 관련짓고 함수의 순간변화율이자 접선의 기울기로서 미분계수를 도입한다.


As more chords are used, the change in time for each chord gets smaller, and the shape made by the chords gets closer to the shape of the actual graph. If the change in time is reduced to an instant, we get exactly the same shape as the actual graph. The average become instantaneous speeds. We can do this for a single chord, but it is easier to see what happens if we use a secant instead. This is shown in the following.

The secant cuts the curve in two places, forming the ends of a chord. As we reduce the time, the secant becomes more like a tangent, which touches the curve at just one point. of a secant (or chord) gives the average speed, so the gradient of a tangent gives the speed. This applies to any rate of change.

IMPORTANT

The **instantaneous rate of change** of a variable at a point is the gradient of the tangent graph at that point.


THE INSTANTANEOUS RATE OF CHANGE OF A FUNCTION

the tangent to find the instantaneous rates of change for mathematical functions. functions, we simply call this the rate of change.

IMPORTANT

change

change of the function at any point is the gradient of the tangent at that point. $y = f(x)$ the gradient of the tangent on the graph is called the **gradient of the**

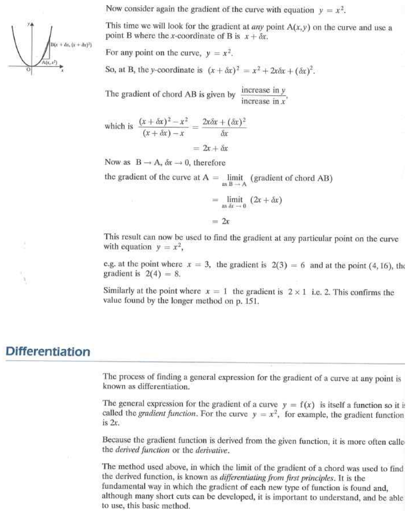
of $f(x) = x^2 + x - 1$ from -3 to 2 and find the rate of change at $x = 1$ by drawing a

of values.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	5	1	-1	-1	1	5

graph with a smooth line and draw at $x = 1$.

[그림 Ⅴ-2] 호주 교과서의 미분계수 도입 (Swift et al., 2014, pp. 352, 359)


Now consider again the gradient of the curve with equation $y = x^2$.

This time we will look for the gradient at *any* point $A(x,y)$ on the curve and use a point B where the x-coordinate of B is $x + \delta x$.

For any point on the curve, $y = x^2$.

So, at B, the y-coordinate is $(x+\delta x)^2 = x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2$.

The gradient of chord AB is given by $\frac{\text{increase in } y}{\text{increase in } x}$,

which is $\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{(x+\delta x) - x} = \frac{2x\delta x + (\delta x)^2}{\delta x}$

$= 2x + \delta x$

Now as $B \to A$, $\delta x \to 0$, therefore

the gradient of the curve at A $= \lim_{\text{as } B \to A}$ (gradient of chord AB)

$= \lim_{\text{as } \delta x \to 0} (2x + \delta x)$

$= 2x$

This result can now be used to find the gradient at any particular point on the curve with equation $y = x^2$,

e.g. at the point where $x = 3$, the gradient is $2(3) = 6$ and at the point $(4, 16)$, the gradient is $2(4) = 8$.

Similarly at the point where $x = 1$ the gradient is 2×1 i.e. 2. This confirms the value found by the longer method on p. 151.

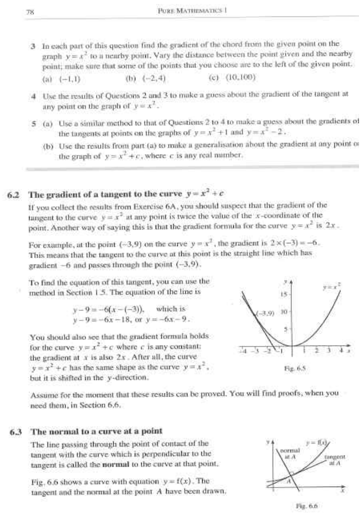
Differentiation

The process of finding a general expression for the gradient of a curve at any point is known as differentiation.

The general expression for the gradient of a curve $y = f(x)$ is itself a function so it is called the *gradient function*. For the curve $y = x^2$, for example, the gradient function is $2x$.

Because the gradient function is derived from the given function, it is more often called the *derived function* or the *derivative*.

The method used above, in which the limit of the gradient of a chord was used to find the derived function, is known as *differentiating from first principles*. It is the fundamental way in which the gradient of each new type of function is found and, although many short cuts can be developed, it is important to understand, and be able to use, this basic method.


78 PURE MATHEMATICS 1

3 In each part of this question find the gradient of the chord from the given point on the graph $y = x^2$ to a nearby point. Vary the distance between the point given and the nearby point; make sure that some of the points that you choose are to the left of the given point.
(a) $(-1,1)$ (b) $(-2,4)$ (c) $(10,100)$

4 Use the results of Questions 2 and 3 to make a guess about the gradient of the tangent at any point on the graph of $y = x^2$.

5 (a) Use a similar method to that of Questions 2 to 4 to make a guess about the gradients of the tangents at points on the graphs of $y = x^2 + 1$ and $y = x^2 - 2$.
(b) Use the results from part (a) to make a generalisation about the gradient at any point on the graph of $y = x^2 + c$, where c is any real number.

6.2 The gradient of a tangent to the curve $y = x^2 + c$

If you collect the results from Exercise 6A, you should suspect that the gradient of the tangent to the curve $y = x^2$ at any point is twice the value of the x-coordinate of the point. Another way of saying this is that the gradient formula for the curve $y = x^2$ is $2x$.

For example, at the point $(-3,9)$ on the curve $y = x^2$, the gradient is $2 \times (-3) = -6$. This means that the tangent to the curve at this point is the straight line which has gradient -6 and passes through the point $(-3,9)$.

To find the equation of this tangent, you can use the method in Section 1.5. The equation of the line is

$y - 9 = -6(x - (-3))$, which is
$y - 9 = -6x - 18$, or $y = -6x - 9$.

You should also see that the gradient formula holds for the curve $y = x^2 + c$ where c is any constant: the gradient at x is also $2x$. After all, the curve $y = x^2 + c$ has the same shape as the curve $y = x^2$, but it is shifted in the y-direction.

Fig. 6.5

Assume for the moment that these results can be proved. You will find proofs, when you need them, in Section 6.6.

6.3 The normal to a curve at a point

The line passing through the point of contact of the tangent with the curve which is perpendicular to the tangent is called the **normal** to the curve at that point.

Fig. 6.6 shows a curve with equation $y = f(x)$. The tangent and the normal at the point A have been drawn.

Fig. 6.6

[그림 Ⅴ-3] 영국 두 교재의 미분계수 도입(좌측 그림 Bostock & Chandler, 2014, p.152; 우측 그림 Neill & Quadling, 2002, p. 78)

영국의 미분계수 도입과 미분 지도를 살펴보기 위해, 수학교과서로 사용되는 Cambridge(Neill & Quadling, 2002)와 Oxford(Bostock & Chandler, 2014)에서 출판되는 두 교재를 살펴보았다. 두 교재 모두 순간변화율이 아닌 접선의 기울기로 미분계수를 도입한다는 점에서 우리나라와 차이가 있다([그림 Ⅴ-3]).

비록 Oxford 출판사의 교재(Bostock & Chandler, 2014)는 미분계수와 도함수(derivatives)를 구하기 위해 극한으로 표현된 식의 값을 실제로 계산한다는 점에서 우리나라와 유사하지만, 이 계산값은 순간변화율이 아닌 접선의 기울기(또는 곡선의 기울기)를 구한 것으로 명시되어 있다는 점에서 우리나라의 미분 도입과 다르다([그림 Ⅴ-3]). 또한 [그림 Ⅴ-4]를 보면 Cambridge 출판사의 교재(Neill & Quadling, 2002)는 접선의 기울기로서 미분계수의 값을 찾아가는 과정을 설명하는 데 극한을 이용하지만, 함수의 극한으로 표현된 식의 값을 실제로 계산하지는 않는다는 점에서 우리나라의 미분 도입과 다르다는 것을 확인할 수 있다.

Working in a similar way to Example 6.1.1,

$$\delta x = 0.41 - 0.4 = 0.01 \quad \text{and} \quad \delta y = 0.1681 - 0.16 = 0.0081,$$

so that the gradient of the chord is

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0081}{0.01} = 0.81.$$

Fig. 6.4 is not very useful as an illustration, because the two points are so close together. There is a small triangle there, like the triangle in Fig. 6.3, but you could be excused for missing it.

In Fig. 6.4 it has become difficult to distinguish between the chord joining two points close together and the tangent at the point with x-coordinate 0.4. This shows the way to find the gradient of the tangent at the point on the curve with $x = 0.4$.

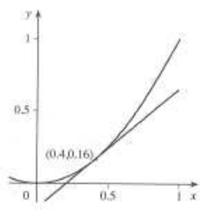


Fig. 6.4

In Example 6.1.3, the two points have become even closer together.

Example 6.1.3
Find the gradient of the chord joining the points on the curve $y = x^2$ with x-coordinates 0.4 and 0.400 01.

The coordinates of the two points are $(0.4, 0.4^2)$ and $(0.400\,01, 0.400\,01^2)$;

$$\delta x = 0.400\,01 - 0.4 = 0.000\,01 \quad \text{and} \quad \delta y = 0.400\,01^2 - 0.4^2 = 0.000\,008\,000\,1,$$

so that the gradient of the chord is

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.000\,008\,000\,1}{0.000\,01} = 0.800\,01.$$

This result, being so close to 0.8, seems to indicate that the gradient of the tangent to the curve $y = x^2$ at $x = 0.4$ is 0.8. But it does not prove it, because you are still finding the equation of the chord joining two points, no matter how close those points are.

[그림 Ⅴ-4] 영국 Cambridge 출판사 교재의 미분계수 도입 (Neill & Quadling, 2002, p. 77)

Ⅳ장과 이번 장에서 살펴본 바와 같이 싱가포르, 호주, 영국의 미분계수의 도입과 미분 지도의 사례들은 우리나라의 경우와 몇몇 측면에서 구분된다. 학제와 교육과정 상 우리나라보다 이른 시기에 미분계수와 미분을 배우기 시작하는 싱가포르의 경우, 미분계수와 미분의 도입뿐만 아니라, 기본 다항함수의 도함수를 구하고, 미분법을 학습하고, 초월함수의 도함수를 구하는 것에서 우리나라와 차이가 있었다. 특히, 미분계수와 미분의 도입에 있어서 미분계수를 접선의 기울기로, 도함수를 기울기 함수로 도입한다는 점이 우리나라와 크게 달랐다. 호주, 영국의 사례를 포함하여 비교한 결과를 토대로 알 수 있는 바와 같이, 미분 도입의 차이는 보다 세분화될 수 있다.

미분계수를 순간변화율로 도입하는가 아니면 접선의 기울기로 도입하는가의 차이는 미분계수를 해석적으로 접근하는가 또는 기하적으로 접근하는가의 구분과 연결된다. 함수의 순간변화율과 접선은 모두 수학적 대상으로

서 이상화를 요구하는 구체적이지 않은 추상적인 대상이지만, 종이에 그려진(아니면 공학적 환경에서 구현된) 수학적 대상으로서 접선은 기하적 대상으로서 우리 정신에 직관될 수 있다. 이 차이는 순간변화율 개념을 받아들이는데 있어서 학생들이 그 존재를 인식하는 것에 관한 문제가 발생하는 것과 달리, 접선의 기울기가 존재하는지에 대한 의문은 잘 제기되지 않는다는 것과 연결된다. 학생들은 접선을 직관적으로 받아들일 수 있기에, 기하적으로 접근할 때 학생들은 미분계수의 존재성에 대한 의문을 빗겨갈 수 있다. 또한, 기하적으로 접근하는 것은 곡선 위의 각 점에서의 접선의 기울기가 곡선의 식과 관계가 된다는 사실을 학생들이 발견해낼 수 있도록 하는 기회 또한 제공할 수 있다. 이는 함수의 극한을 이용해 표현된 식을 실제로 계산하여 얻어진 결과를 재해석함으로써 도함수를 도출하고 그와 동시에 정당화를 시도하는 해석적인 접근과 차이가 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

우리나라 교육과정은 수차례 개정을 거치면서 내용의 축소가 많이 이루어졌으나 학생들이 체감하는 수학의 어려움은 감소되지 않고 있다. 또한 내용의 축소가 아니라 내용의 깊이나 방법의 변화를 모색하는 방향에서 학습 부담 경감을 논하는 것도 필요하다. 본 연구는 미분을 도입하고 지도하는 것과 관련하여 이 문제를 논의하였다. 싱가포르의 고등학교 수학 교과서를 중심으로 분석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 우리나라와 싱가포르 교과서 미분법 단원의 핵심 개념과 내용 요소를 비교하면, 우리나라는 함수의 극한을 먼저 공부한 뒤 평균변화율의 극한을 도함수의 정의로 두어 연역적인 증명 과정을 통해 미분법을 학습하도록 구성되어 있는 반면, 싱가포르의 경우 곡선의 한 점에서의 기울기를 수학 소프트웨어를 이용하여 구하고 귀납적으로 추론하여 도함수를 학습하도록 되어 있다. 우리나라가 <수학Ⅱ>에서 다항함수만을 다루는 것에 비해 싱가포르는 유리함수, 무리함수를 포함하는 여러 함수의 미분을 포함하고 있다. 또한 우리나라는 실수배의 미분, 함수의 합과 차의 미분, 함수의 곱의 미분까지 공부하는 데 비해 싱가포르는 연쇄법칙과 몫의 미분법까지를 포함하여 5 Rules이라는 이름을 붙여 한꺼번에 공부하고 있다.

둘째, 교과서의 학습 내용 전개 방식의 차이를 비교하면, 우리나라의 경우 도함수의 정의로 시작되어 모든 정리와 규칙을 증명 과정을 통해 설명하는 전개 방식을 보이는 반면 싱가포르의 경우 엄밀함을 배제하고 공학적 도구의 활용이나 직관, 유추 등의 방법으로 개념을 설명하고 있다. 우리나라의 경우 <수학Ⅱ>에서 미분을 공부한 후 다시 <미적분>을 선택하여 공부할 수 있는데 두 과목 사이에는 다루는 함수의 대상에서 차이가 생길 뿐 간단한 미분 방법을 제외하면 유사한 학습 경험을 하게 된다.

셋째, 교과서 내에서 공학적 도구의 사용은 싱가포르의 경우가 좀 더 활발한데, 우리나라가 학습 동기 유발이나 학습 내용을 정리하는 정도로 활용한다면 싱가포르는 개념을 도입하고 설명하는 핵심 학습 도구로 사용하고 있다. 그래프 작도 프로그램이나 공학용 계산기 등을 이용하여 직관적 이해를 돕고 변화율을 계산하여 실생활에서의 의미를 찾는 것에 막힘없이 도전할 수 있도록 하고 있다.

넷째, 싱가포르, 영국, 호주 교과서를 모두 살펴본 결과로, 미분 도입은 해석적인 접근과 기하적인 접근 중 무엇을 더 강조하는가에 따라 다양할 수 있음을 확인하였다. 미분계수를 순간변화율로 도입하는 것과 접선의 기울기로 도입하는 것은 선택의 문제일 수 있고, 이는 직관과 논리 중 무엇을 더 강조하는가에 따라 다르게 선택될 수 있다. 학생들이 미분계수와 도함수를 배우는 데 겪는 어려움들을 고려하면, 직관을 강조하는 방식의 미분 도입이 갖는 장점을 활용하는 대안들을 선택하는 것도 고려할 필요가 있다.

이상의 내용을 바탕으로 아래와 같은 결론과 제언을 도출하였다. 내용을 축소하지 않고 방법을 달리하여 학생들의 부담을 줄여주는 방안을 모색한다면, 싱가포르와 영국 그리고 호주의 사례는 참고할 수 있는 좋은 예가 된다. 직관을 강조하는 것은 논리적 엄밀성의 파손을 동반하지만, 내용을 축소하거나 내용의 깊이를 크게 달리하

지 않으면서도 발견과 수학적 탐구를 가능하게 하는 방안이 될 수 있다.

우리나라 교육과정은 함수의 극한은 함수의 연속과 미분을 이해하는 데 필요한 정도로 간단히 다룰 것을 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 제안하고 있다(교육부, 2015, p.75). 함수의 극한은 해석적으로 함수를 보는데 중요한 개념이며 미적분의 기초 개념으로 중요하지만, 이를 지나치게 강조하여 가르침으로써 미분계수의 정의와 의미를 이해하지 못하는 것은 <수학Ⅱ>과 <미적분>에서 배울 다른 학습 내용에 대한 큰 문제를 야기할 수 있다. 대부분의 고등학생들이 학습하는 현재 <수학Ⅱ> 교과에서는 직관을 강조하고, 이후 <미적분> 교과에서는 논리를 강조한다면 학생들이 미분 영역에서의 학습에서 느끼는 생소함과 어려움을 줄이고 수학적 사고의 기회를 부여 할 수 있을 것이다.

본 연구는 실제 수업 장면이나 평가 방법에 대한 객관적인 정보 없이 교과서만을 비교하였기 때문에 교과서가 사용되는 현장에서의 실제 미분 지도 사례와 차이가 존재한다는 한계가 있다. 따라서 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서를 사용하는 미분 교수·학습이 실제 교실에서 어떻게 이루어지고 있는지 그리고 대안적인 접근을 사용할 때 발생할 수 있는 문제점은 무엇일지를 알아보는 실제적인 후속 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

구자옥・김성숙・이혜원・조성민・박혜영 (2016). OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2015 결과 보고서. RRE 2016-2-2 서울: 한국교육과정평가원.

Ku, J., Kim, S., Lee, H-W., Cho, S. & Park, H-Y (2016). *OECD Programme for International Students Assessment: An analysis of PISA 2015 Results*. Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 서울: 교육부.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Seoul: Ministry of Education.

김원경・조민식・방금성・윤종국・신재홍・김기탁・박희정・심주석・오혜정・이동근・임석훈・김동화・강순자・이성재・정재훈 (2018). 수학Ⅱ. 서울: 비상교육.

Kim, W., Cho, M., Bang, K., Yun, J., Shin, J., Kim, K., Park, H., Shim, J., Oh, H., Lee, D., Lim, S., Kang, S., Lee, S. & Jung, J. (2018). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Visang

김주현 (2017). 고등학교 학생들의 미분 단원에서 나타난 미분개념이해유형과 미분개념이해단계 분석. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

Kim, J. (2017). *Highschool student's differential concept learning understanding concepts and step understanding the notion of differentiation Analysis*. (Unpublished master's thesis). Ewha Womans University, Seoul, Korea.

류희찬・선우하식・신보미・조정묵・이병만・김용식・임미선・한명주・남선주・김명수・정성윤 (2018). 수학Ⅱ. 서울: 천재교육.

Lew, H., Sunwoo, H., Shin, B., Cho, J., Lee, B., Kim, Y., Lim, M., Han, M., Nam, S., Kim, M. & Jeong, S. (2018). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Chunjae.

박경미・이환철・박선화・강은주・김선희・임해미・김성여・장혜원・강태석・권점례・김민정・방정숙・이화영・임미인・이만근・김화경・윤상혁・이광상・이경은・조혜정・권영기・권오남・신동관・강현영・김재영・도종훈・박정숙・서보억・안현정・오택근・이경진・이광연・이문호・이승훈・이은정・이지윤・전인태・최지선・한준철・황선미・박문환・김완일・강성권 (2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ. 서울: 한국과학창의재단.

Park, K., Lee, H., Park, S., Kang, E., Kim, S., Lim, H., Kim, S., Chang, H., Kang, T., Kwon, J., Kim, M., Pang, J., Lee, H., Lim, M., Lee, M., Kim, H., Yun, S., Lee, K., Lee, K., Jo, H., Kwon, Y., Kwon, O., Shin, D., Kang, H., Kim, J., Do, J., Park, J., Seo, B., An, H., Oh, T., Lee, K., Lee, K., Lee, M., Lee, S., Lee, E., Lee, J., Jeon, T., Choi, J., Hwang, S., Park, M., Kim, H., Kang, S., & Yeo, M.(2015). *A development of a draft for 2015 revised mathematics curriculum.* Seoul: Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity.

박선용 (2010). 아르키메데스 '방법'에 대한 새로운 해석. 한국수학사학회지, 23(4), 47-58.

Park, S. (2010). The New Interpretation of Archimedes' 'method'. *The Korean journal for history of mathematics,* 23(4), 47-58.

송미영 · 임해미 · 최혁준 · 박혜영 · 손수경 (2013). OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2012 결과 보고서. 연구보고 RRE 2013-6-1 서울: 한국교육과정평가원.

Song, M-Y., Rim, H., Choi, H., Park, H. Y. & Son, S. (2013). OECE Programme for International Students Assessment: Analyzing PISA 2012 Results. Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

송은경 (2008). 한국과 싱가포르 고등학교 수학교과서의 방정식 단원 비교. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

Song, E. (2008). *A Comparative study on the Mathematics textbooks of the Koran and the Singaporean highschools focused on the Equation units.* (Unpublished master's thesis). Ewha Womans University, Seoul, Korea.

이예지 (2016). 한국과 싱가포르의 중학교 수학교과서 비교 연구. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

Lee, Y. (2016). *A Comparative Study on Middle School Mathematics Textbooks of Korea and Singapore - Focusing on functions.* (Unpublished master's thesis). Kyung Hee University, Seoul, Korea.

이지현 (2018). 대학생들의 미분 개념에 대한 표현 유창성 분석. 수학교육학연구, 28(4), 573-598.

Lee, J. (2018). An Analysis of University Students' Representational Fluency About the Derivative Concept. *The journal of educational research in mathematics,* 28(4), 573-598.

이현정 (2010). 우리나라와 싱가포르의 수학 교과서 비교 · 분석. 경북대학교 교육대학원 석사논문.

Lee, H. (2010). *Both comparison and analysis about a mathematics textbook between Korea and Singapore.* (Unpublished master's thesis). Kyungpook National University, Daegu, Korea.

정상권 (2014). 학교수학을 위한 수학. 서울: 교우사.

Chung, S. (2014). *Mathematics for School Mathematics.* Seoul: Kyowoo.

정연준 (2010). 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. 학교수학, 12(2), 239-267.

Jeong, Y. (2010). An Investigation on the Historical Development of the Derivative Concept. *School Mathematics,* 12(2), 239-257.

정은선 (2010). 극한 개념의 이해와 미분 개념 획득 과정의 연결에 관한 사례 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

Jeong, E. (2010). *A case study on The Connection between The Understanding of Limit Concept and The Acquisition Process of Differential Concept.* (Unpublished master's thesis). Ewha Womans University, Seoul, Korea.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development: (The concepts of the calculus).* Courier Corporation.

Boyer, C. B., & Merzbach, U, C. (2000). 수학의 역사, (양영오, 조윤동 역). 서울: 경문사.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus: Anecdotes or the tip of an iceberg? In G. Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th international conference for the psychology of mathematics education,* 1(pp.3-10). Oaxtepec, Mexico: CINVESTAV.

Bezuidenhout, J. (1998). First year university students' understanding of rate of change. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 29(3), 389-399.

Bostock, L., Chandler, F. S. (2015). *Core maths for Advanced Level 3rd Edition.* Oxford University Press.

Duval, R.: 2000, 'Basic issues for research in mathematics education', in T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Japan, Nishiki Print Co., Ltd. I, pp. 55 - 69.

Kant, I. (1956). Critique of Pure Reason. Translated by N. K. Smith. New York: St. Martin's Press.

Neill, H., Quadling, D. (2002). *Advanced level mathematics Pure Mathematics 1 (International).* Cambridge University Press.

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense?. *Synthese,* 134(1), 181-216.

Piaget, J., & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science,* (H. Feider, trans.), New York: Columbia University Press.

Sakabe, M., Arihuku, K., Kurosaki, M., Nakasima, Y., & Makino, A. (2009). 칸트 사전. (이신철 역), 서울: 도서출판 b.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Ministry of Education, Singapore. (2017). *Education Statistics Digest 2017.* Available online at: https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/publications/education-statistics-digest/esd_2017.pdf

Swift, S., Green, J., Kouris, T., Brodie, R., Grove, M., McMahon, A. (2014). *Nelson Senior Maths Methods 11 for the Australian Curriculum.* Toronto: Nelson.

Yeo, J. et al. (2013). *New Syllabus Additional Mathematics 9th Edition.* Shinglee.

Exploring Alternative Ways of Teaching derivatives

Kim, Sun Hee
Kangwon National University
E-mail : mathsun@kangwon.ac.kr

Kim, Tae Seok
Yubong Girls' High School
E-mail : scan1865@nate.com

Cho, Jin Woo†
Gyeongin National University of Education
E-mail : jinwoo1987@hanmail.net

The purpose of this study is to explore alternative ways of teaching derivatives in a way that emphasizes intuition. For this purpose, the contents related to derivatives in Korean curriculum and textbooks were analyzed by comparing with contents in Singapore Curriculum and textbooks. Singapore, where the curriculum deals with derivatives relatively earlier than Korea, introduces the concept of derivatives and differentiation as the slope of tangent instead of the rate of instantaneous change in textbook. Also, Singapore use technology and inductive extrapolation to emphasize intuition rather than form and logic. Further, from the results of the exploration of other foreign cases, we confirm that the UK and Australia also emphasized intuition in teaching derivatives and differentiation. Based on the results, we discuss the meaning and implication of introducing derivatives and teaching differentiation in a way that emphasizes intuition. Finally, we propose the implications for the alternative way of teaching differentiation.

* ZDM Classification : I44, U24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : Derivatives, Differentiation, Intuition, Singapore, International comparison, Textbook
† corresponding author