JKIICE Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering

한국정보통신학회논문지 Vol. 23, No. 9: 1146~1151, Sep. 2019

주어진 회전 수열에 대한 최소 히스토그램

김재훈*

Minimum Histogram for Given Turn Sequences

Jae-hoon Kim*

*Professor, Division of Computer Software, Busan University of Foreign Studies, Busan, 46234 Korea

요 약

히스토그램 H는 가장 왼쪽 수직 에지와 가장 오른쪽 수직 에지를 연결하는 기저라고 불리는 하나의 수평 에지를 가진 x-단조 직교 다각형이다. 여기서 직교 다각형은 수평과 수직 에지들만을 가진 다각형이고, x-단조 다각형 P는 x-축에 수직인 모든 직선이 P와 많아야 두 번 교차하는 성질을 만족하는 다각형이다. 히스토그램 H의 테두리 선을 따라 반시계방향으로 움직이면, 꼭짓점에서 왼쪽 회전과 오른쪽 회전의 수열을 얻는다. 역으로, 꼭짓점에서의 회전들로 이루어진 수열이 히스토그램에 의해서 구현될 수 있다. 이 논문에서 우리는 주어진 회전 수열을 구현하는 히스토그램을 찾는 문제를 다룬다. 특별히 면적을 최소화하는 히스토그램과 구속 상자를 최소화하는 히스토그램을 찾을 것이다. 두 문제 모두 선형 시간 알고리즘들에 의해 풀리는 것을 보일 것이다.

ABSTRACT

Histogram H is an x-monotone rectilinear polygon with a horizontal edge, called by a base, connecting the leftmost vertical edge and the rightmost vertical edge. Here the rectilinear polygon is a polygon with only horizontal and vertical edges and the x- monotone polygon P is a polygon in which every line orthogonal to the x-axis intersects P at most twice. Walking counterclockwise on the boundary of a histogram H yields a sequence of left turns and right turns at its vertices. Conversely, a given sequence of the turns at the vertices can be realized by a histogram. In this paper, we consider the problem of finding a histogram to realize a given turn sequence. Particularly, we will find the histograms to minimize its area and its bounding box. It will be shown that both of the problems can be solved by linear time algorithms.

키워드 : 히스토그램, 직교 다각형, x-단조, 회전 수열, 선형 시간

Key word : histogram, rectilinear polygon, x-monotone, turn sequence, linear time

Received 27 May 2019, **Revised** 28 May 2019, **Accepted** 12 July 2019

*** Corresponding Author** Jae-Hoon Kim(E-mail: jhoon@bufs.ac.kr, Tel:+82-51-509-6226)
Professor, Division of Computer Software, Busan University of Foreign Studies, Busan, 46234 Korea

Open Access http://doi.org/10.6109/jkiice.2019.23.9.1146 print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

Ⅰ. 서 론

(직교) 회전 수열 (rectilinear turn sequence) S는 각각 왼쪽과 오른쪽을 나타내는 문자 L과 R로 이루어진 수열이다. 다시 말해서, $S=s_1s_2\cdots s_n\in\{L,R\}^n$, 여기서, n은 수열 S의 길이이다.

수평, 수직 에지만을 가진 직교 다각형 P에 대해서, P의 에지들을 따라서 반시계방향으로 움직이면서 꼭짓점에서의 회전들을 나열했을 때, 회전 수열 S와 일치하면, 다각형 P가 회전 수열 S을 구현한다 라고 말한다. 다각형 P의 꼭짓점 v의 내각이 90도이면 v에서의 회전은 왼쪽(L)이고, v의 내각이 270도이면 v에서의 회전은 오른쪽(R)이다.

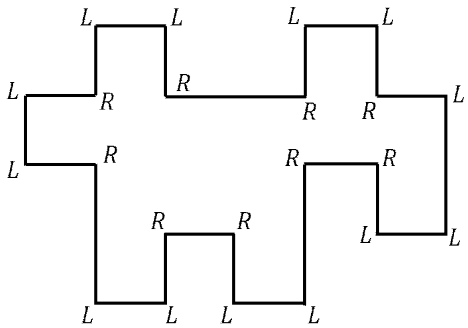

Fig. 1 Polygon realizing a turn sequence

위의 그림 1에서 다각형 P의 제일 왼쪽 변의 위쪽 끝점에서 시작해서 반시계 방향으로 이동하면서 꼭짓점에서의 회전들을 나열하면 수열 S = LLRLLRRLLRR LLLRLLRRLLR을 얻을 수 있고 따라서 다각형 P는 수열 S를 구현한다.

다각형 P가 주어지면 위와 같이 유일한 회전 수열 S를 얻을 수 있다. 하지만 역으로 회전 수열 S가 주어지면, S를 구현하는 다각형은 무수히 많을 수 있다. 또한 다각형 P의 회전 수열 S의 길이가 n이면, $n=2r+4$임을 알 수 있다. 여기서, r은 오른쪽 회전들의 수이다. 이 식은 다각형에서 오른쪽 회전들의 수는 정확히 왼쪽 회전들의 수보다 4만큼 작다는 것을 말한다.

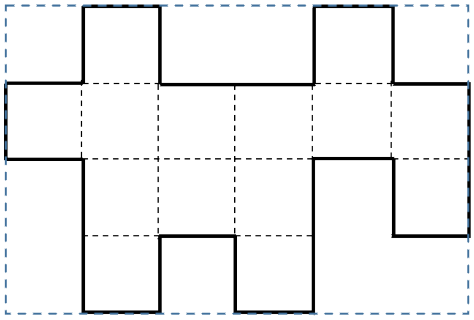

Fig. 2 Area of a polygon

다각형 P의 각 에지의 길이를 정수로 가정하면, 각 에지의 길이가 1인 정사각형을 생각해서 다각형 P안에 놓일 수 있는 이 정사각형들의 개수를 P의 면적(area)으로 정의한다. 예를 들어, 그림 2의 다각형의 면적은 14이다. 또한 P의 구속 상자(bounding box)란 P를 포함하는 가장 작은 수직과 수평 에지를 가진 사각형을 말한다(그림 2).

직교 다각형 P에 대해서, 임의의 수직선 L이 P의 수평 에지와 많아야 2번 교차하면, P는 x-단조(x-monotone)라고 한다. 위 그림 2의 다각형은 x-단조이다. 본 논문에서 직교 다각형 중에서 특별히 히스토그램에 대해서 다룰 것이다. 히스토그램 H는 가장 왼쪽 수직 에지와 가장 오른쪽 수직 에지가 단지 하나의 수평 에지(기저(base))로 연결되는 x-단조 직교 다각형이다(그림 3).

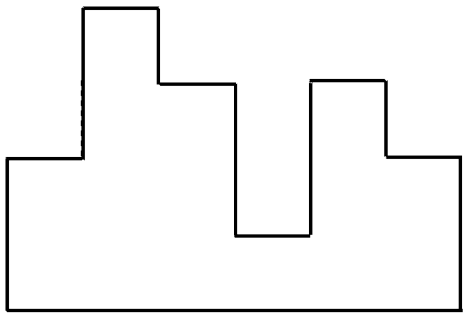

Fig. 3 Histogram

Ⅱ. 관련 연구

본 연구와 관련된 주제로 그래프 드로잉(graph drawing)이 있다. 이 분야에서는 추상적인 그래프를 다양한 최적화 기

준에 따라서 평면상에 나타내는 문제들을 연구한다[1-4].

[5]에서는 그래프의 직교 드로잉(orthogonal drawging)에 대해서 연구하였다. 여기서 드로잉의 과정은 3단계로 구분된다. 첫 번째 단계는 주어진 그래프를 평면상에 간선의 교차를 최소화하면서 그리는 단계이다. 두 번째 단계는 각 간선이 수직, 수평 선분이 되도록 그리는 단계이다. 마지막 세 번째 단계는 위의 결과로 나온 그래프를 구속 상자가 최소화하도록 압축(compaction)하는 단계이다. [5]에서 저자는 마지막 압축 단계의 구속 상자의 크기를 최소화하는 등의 문제가 NP-hard 임을 증명했다. 본 연구는 주어진 그래프가 사이클(cycle)만으로 이루어진 특별한 그래프에 대해서 위의 세 번째 단계를 푸는 경우에 해당하고 이 경우는 다항시간 알고리즘이 존재함을 보일 것이다.

[6]에서는 직교 다각형을 구현하는 회전 수열에 대하여 다룬다. 특별히 직교 다각형의 면적이 최소 또는 최대가 되는 회전 수열을 구하는 문제를 연구한다. 구체적으로 n이 주어질 때, 길이 n인 회전 수열을 구현하는 직교 다각형의 최소 면적을 $\delta(n)$, 최대 면적을 $\Delta(n)$이라고 하자. [6]의 저자는 $n \equiv 4 \mod 8$ 이면, $\delta(n) = n/2 - 1$이고 그 외의 경우에 $\delta(n) = n/2$임을 보였다. 또한 $n \geq 4$이면, $\Delta(n) = (n-2)(n+4)/8$임을 보였다. 따라서 임의의 길이 n인 회전 수열은 많아야 $(n-2)(n+4)/8$의 면적을 가진 직교 다각형에 의해서 구현될 수 있음을 알 수 있다.

부분적인 기하 정보들로부터 단순 다각형을 재구축(reconstruction)하는 연구들이 있었다. [7]에서는 각 꼭짓점에서 보이는(visible) 꼭짓점에서 측정된 각도들로부터 단순 다각형을 $O(n^2)$ 시간에 재구축하는 연구를 수행했다. [8]에서는 레이저 측정 장치들로부터의 정보를 이용해서 다각형을 재구축하는 연구를 수행했다.

[9]에서는 주어진 회전 수열을 구현하는 x-단조와 xy-단조 직교 다각형에 대해서 연구하였다. 저자들은 xy-단조 직교 다각형에 대해서 최소 면적, 최소 구속 상자, 최소 지름에 대한 $O(n)$ 시간 알고리즘을 제안하였다. 또한 x-단조 직교 다각형에 대해서, 최소 면적과 최소 구속 상자에 대한 각각 $O(n^4)$과 $O(n^3)$ 시간 알고리즘을 제안하였다.

Ⅲ. 최소 히스토그램

각각 왼쪽과 오른쪽을 나타내는 문자 L과 R로 이루어진 직교 회전 수열 S가 주어진다. 그러면 우리는 S를 구현하는 히스토그램을 찾고 싶다. 특별히 면적과 구속 상자의 크기가 최소가 되는 히스토그램을 찾을 것이다.

주어지는 회전 수열 S에 대해서, 항상 S를 구현하는 적어도 하나의 히스토그램이 존재한다고 가정한다. 우리는 우선 그러한 히스토그램 중에서 면적이 최소인 히스토그램을 찾는 문제를 생각한다. 주어지는 길이 n의 회전 수열 $S = s_1 s_2 \cdots s_n$에 대해서, S를 구현하는 히스토그램을 H라고 할 때, 각 s_i가 H의 꼭짓점 v_i에서의 회전을 나타낸다고 하자. S에서 첫 번째 문자 s_1은 항상 히스토그램의 가장 왼쪽 에지의 위쪽 꼭짓점에서의 회전을 나타낸다고 가정한다. 따라서 s_1은 항상 L임을 알 수 있다. 또한 회전 수열 S는 히스토그램 H를 반시계 방향으로 움직이면서 얻은 회전들로 이루어진다고 가정한다.

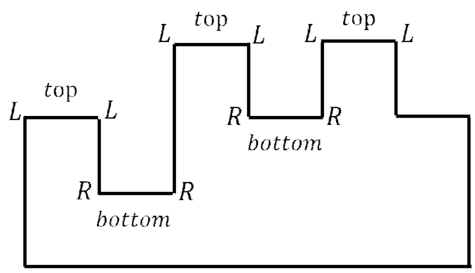

Fig. 4 Top and bottom edges

회전 수열 S가 히스토그램 H를 반시계 방향으로 이동하면서 얻는 꼭짓점에서의 회전 방향을 나타냄으로 S는 항상 부분 문자열 LLLL로 시작함을 알 수 있다. 이것은 히스토그램 H의 가장 왼쪽 에지, 기저, 가장 오른쪽 에지를 나타낸다. 시작 부분 문자열 LLLL을 제외하고 S에서 부분 문자열 LL이 나오면 이것은 히스토그램 H의 수평 에지들 중에서 특별히 탑 에지(top edge)라고 부른다. $s_4 s_5$와 $s_n s_1$이 LL인 경우도 탑 에지이다. 이 경우는 탑 에지가 각각 가장 왼쪽, 가장 오른쪽 에지와 꼭짓점에서 만나는 경우이다. 또한 S에서 부분 문자열 RR이 나오면 히스토그램 H의 수평 에지들 중에서 바닥 에지(bottom edge)라고 부른다(그림 4).

회전 수열 S에서 탑 에지와 바닥 에지 사이의 에지들은 $L(RL)^*R$ 에 속하는 문자열로 나타나고 바닥 에지와 탑 에지 사이의 에지들은 $R(LR)^*L$ 에 속하는 문자열로 나타난다. 특별히 가장 왼쪽, 가장 오른쪽 에지와 탑 에지 사이에 에지들이 존재하는 경우에 이 에지들은 $L(RL)^*$에 속하는 문자열로 나타난다(그림 5).

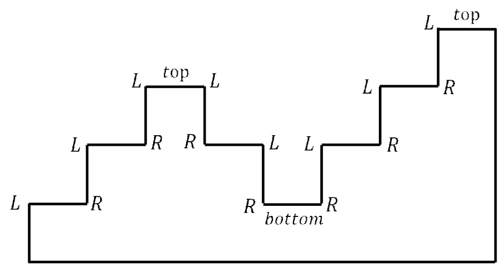

Fig. 5 Chains $C_{t\to b}$ and $C_{b\to t}$

회전 수열 S 를 구현하는 히스토그램 H에서 탑 에지와 바닥 에지 사이의 에지들의 집합을 탑 에지 t와 바닥 에지 b를 연결하는 체인이라 하고 $C_{t\to b}$로 표기한다. 또한 바닥 에지와 탑 에지 사이의 에지들의 집합을 바닥 에지 b와 탑 에지 t를 연결하는 체인이라 하고 $C_{b\to t}$로 표기한다. 그러면 체인 $C_{t\to b}$은 회전 수열 S에서 $L(RL)^*R$에 속하는 문자열을 구현하고 체인 $C_{b\to t}$는 $R(LR)^*L$에 속하는 문자열을 구현함을 알 수 있다. 특별히 탑 에지와 가장 왼쪽 에지 l, 가장 오른쪽 에지 r 사이를 연결하는 체인을 각각 $C_{t\to l}$와 $C_{r\to t}$로 표기하고 두 체인은 $L(RL)^*$에 속하는 문자열을 구현함을 알 수 있다 (그림 5).

그러면 체인 C의 길이 $\ell(C)$는 체인 C에 속하는 L과 R의 개수의 최솟값으로 정의한다. 다시 말해서, 체인에 속하는 회전 L과 R에 해당하는 꼭짓점들의 개수의 최솟값이다.

탑 에지 t에 대해서, t에 왼쪽에서 연결되는 체인 C_t^L와 오른쪽에서 연결되는 체인 C_t^R을 생각할 수 있다. C_t^L은 어떤 바닥 에지 b에 대해 t와 b를 연결하는 체인 $C_{t\to b}$이거나 t와 가장 왼쪽 에지 l을 연결하는 체인 $C_{t\to l}$이다. 또한 C_t^R은 어떤 바닥 에지 b에 대해 b와 t를 연결하는 체인 $C_{b\to t}$이거나 t와 가장 오른쪽 에지 r을 연결하는 체인 $C_{r\to t}$임을 알 수 있다. 물론 탑 에지 t가 가장 왼쪽 에지와 꼭짓점에 만나는 경우에 C_t^L은 존재하지 않고, t가 가장 오른쪽 에지와 꼭짓점에 만나는 경우에 C_t^R은 존재하지 않는다.

탑 에지 t에 대해서, t의 높이 $h(t)$는 두 체인 C_t^L과 C_t^R의 길이의 최댓값으로 정의한다. 다시 말해서,

$$h(t) = \max(\ell(C_t^L), \ell(C_t^R)). \tag{1}$$

이제 우리는 길이 n의 회전 수열 S를 구현하는 면적이 가장 작은 히스토그램을 $O(n)$ 시간에 찾는 방법을 보일 것이다.

정리 3. 1 길이 n의 회전 수열 S가 주어질 때, S를 구현하는 히스토그램 중 최소 면적을 가지는 히스토그램을 찾고 그 면적을 계산하는 $O(n)$ 시간 알고리즘이 존재한다.

증명. 회전 수열 S를 구현하는 면적이 가장 작은 히스토그램 H를 구하기 위해서 모든 바닥 에지는 길이 1을 가지고 기저 에지로부터 수직 길이 1인 위치에 그린다.

탑 에지 t에 대해서, t의 길이는 1이고 인접한 바닥 에지로부터 수직 길이 $h(t)$의 위치에 그린다(그림 6). t에 연결되는 두 체인 C_t^L과 C_t^R에 대해서, $h(t)$를 결정하는 체인을 C라고 할 때, 체인 C의 모든 에지는 길이 1로 그린다. 나머지 체인 $\overline{C}$에 대해서는 t에 접한 에지 e를 제외하고 모든 에지가 길이 1을 가진다. 에지 e의 경우에 길이를 다음과 같이 결정한다:

$$1 + (\ell(C) - \ell(\overline{C})). \tag{2}$$

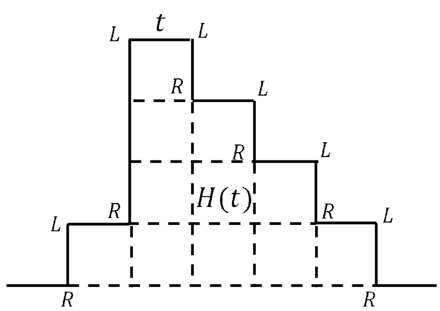

Fig. 6 Area $H(t)$

그림 6에서 탑 에지 t의 높이 $h(t)$는 4이고 이 높이를 결정하는 체인은 오른쪽 체인 C_t^R이다. 따라서 체인 C_t^R의 모든 에지는 길이 1로 그린다. 왼쪽 체인 C_t^L의 경우는 t에 접한 에지를 제외하고 모든 에지가 길이 1이고, t에 접한 에지의 길이는 $1+(\ell(C_t^R)-\ell(C_t^L))$ = 1 + (4 - 2) = 3이다.

탑 에지 t에 인접한 두 체인 C_t^L과 C_t^R에 접한 히스토그램의 영역을 $H(t)$로 나타내자 (그림 6). 그러면 영역 $H(t)$의 면적을 구할 수 있다. t의 높이 $h(t)$를 결정하는 체인을 C라 하고 나머지 체인을 $\overline{C}$라고 할 때, 면적 $area(H(t))$는 다음과 같은 식으로 주어진다:

$$area(H(t)) = \begin{array}{l}(1+2+\cdots+h(t))+\\(1+\cdots+(\ell(\overline{C})-1)).\end{array} \tag{3}$$

그림 6에서 t의 높이 $h(t)$가 4이고 체인 $\overline{C}$의 길이 $\ell(\overline{C})$가 2이므로 영역 $H(t)$의 면적은 (1+2+⋯+4)+(1+⋯+(2-1)) = 10 + 1 = 11 이다.

히스토그램 H에서 모든 탑 에지와 바닥 에지의 길이는 1이고 각 체인의 모든 수평 에지들은 길이가 1이다. 따라서 H에서 기저 에지를 제외한 모든 수평 에지의 길이는 1로 그린다. 그리고 기저 에지의 길이는 나머지 모든 수평 에지들의 총 개수와 같게 그린다. 기저 에지의 길이를 LB로 표기한다.

회전 수열 S는 항상 문자열 LLLL로 시작한다. 여기서 네 번째 문자 L과 마지막 문자 사이에 나타나는 문자 L의 개수가 가능한 모든 수평 에지들의 개수와 같다. 다시 말해서, 이것이 기저 에지의 길이 LB와 같다.

종합적으로, 회전 수열 S에서 나타나는 모든 탑 에지들을 t_1, t_2, ..., t_m이라고 할 때, 최소 면적의 히스토그램의 면적 $area(H)$는 다음과 같이 주어진다:

$$area(H)=\sum_{i=1}^{m} area(H(t_i)) + LB. \tag{4}$$

회전 수열 S를 순서대로 스캔하면서 탑 에지, 바닥 에지를 찾을 수 있고, 각 탑 에지 t에 대한 왼쪽 체인과 오른쪽 체인의 길이를 계산할 수 있다. 따라서 t의 높이 $h(t)$를 계산할 수 있고, 네 번째 문자 L과 마지막 문자 사이에 나타나는 문자 L의 개수를 셀 수 있어서 LB를 구할 수 있다. 따라서 최소 면적 히스토그램 H의 면적 $area(H)$를 $O(n)$ 시간에 계산할 수 있다.

다음으로 회전 수열 S를 구현하는 히스토그램 중 최소 면적 구속 상자 $B(H)$를 가지는 히스토그램을 찾는 문제를 생각한다.

정리 3. 2 길이 n의 회전 수열 S가 주어질 때, S를 구현하는 히스토그램 중 최소 면적 구속 상자를 가지는 히스토그램을 찾고 그 구속 상자의 면적을 계산하는 $O(n)$ 시간 알고리즘이 존재한다.

증명. 정리 3.2의 면적이 최소인 히스토그램을 찾는 알고리즘과 비슷하게 히스토그램 H를 찾는데, 최소 면적의 구속 상자 $B(H)$의 수평 에지의 길이와 수직 에지의 길이를 각각 w과 h라고 하자. 위의 히스토그램 H의 수평 에지들은 모두 길이 1이기 때문에 $w=LB$이다.

회전 수열 S에서 나타나는 모든 탑 에지들을 t_1, t_2, ..., t_m이라고 할 때, 이 에지들의 높이들의 최댓값을 생각한다. 그러면 $h=\max_i h(t_i)+1$이다. 따라서 w와 h는 모두 $O(n)$ 시간에 계산할 수 있다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 길이 n인 회전 수열이 주어질 때, 이를 구현하는 최소 면적의 히스토그램과 최소 면적 구속 상자를 가지는 히스토그램을 찾는 $O(n)$ 시간 알고리즘을 제안한다. [9]에서는 회전 수열을 구현하는 최소 면적 또는 최소 면적 구속 상자를 가지는 x-단조 다각형을 각각 $O(n^4)$과 $O(n^3)$ 시간에 푸는 알고리즘을 제안하였다. 이 경우에 시간 복잡도를 줄이는 연구를 수행할 수 있을 것이다. 또한 향후에 회전 수열을 구현하는 일반 다각형(general polygon)에 대한 연구를 수행할 수 있을 것이다.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the research grant of the Busan University of Foreign Studies in 2019

REFERENCES

[1] T. Blasius, I. Rutter, and D. Wagner, "Optimal orthogonal graph drawing with convex bend costs," *ACM Transactions on Algorithms*, vol. 12, pp. 1-32, March 2016.

[2] W. Didimo, G. Liotta, and M. Patrignani, "Bend minimum orthogonal drawings in quadratic time," in *Proceedings of the 26h International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization*, pp. 481-494, 2018.

[3] H. A. Akitaya, M. Loffler, and I. Parada, "How to fit a tree in a box," in *Proceedings of the 26h International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization*, pp. 361-367, 2018.

[4] T. Biedl, "Ideal drawings of rooted trees with approximately optimal width," *Journal of Graph Algorithms and Applications*, vol. 21, pp. 631-648, March 2017.

[5] M. Patrignanil, "On the complexity of orthogonal compaction," *Computational Geometry*, vol. 19, pp. 47-67, June 2001.

[6] S. W. Bae, Y. Okamoto, and C. S. Shin, "Area bounds of rectilinear polygons realized by angle sequences," in *Proceedings of the 23rd International Symposium on Algorithms and Computation*, pp. 629-638, 2012.

[7] D. Z. Chen and H. Wang, "An improved algorithm for reconstructing a simple polygon from its visibility angles," *Computational Geometry*, vol. 45, pp. 254-257, July 2012.

[8] T. C. Biedl, S. Durocher, and J. Snoeyink, "Reconstructing polygons from scanner data," *Theoretical Computer Science*, vol. 412, pp. 4161-4172, July 2011.

[9] W. S. Evans, K. Fleszer, P. Kindermann, N. Saeedi, C. S. Shin, and A. Wolf, "Minimum rectilinear polygons for given angle sequences," in *Proceedings of the 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games*, pp. 105-119, 2015.

김재훈(Jae-Hoon Kim)

1994 서강대학교 수학과 이학사
1996 KAIST 수학과 이학석사
2003 KAIST 전산과 공학박사
2003~ 부산외국어대학교 컴퓨터소프트웨어학부 교수
※관심분야 : 알고리즘, 최적화, 스케줄링