

기울어진 수조에 액적 충돌로 발생한 최대 공동 예측 모델

이예완* · 김영도** · 김형수†

Maximum cavity radius prediction model generated by drop impact in an inclined bath

Yeawan Lee*, Youngdo Kim** and Hyoungsoo Kim†

Abstract In this study, we show the maximum cavity radius prediction model that a droplet impacts an inclined bath. Surface tensions, viscosities, inclination angles of a bottom substrate, droplet diameters, falling heights of the droplet are varied for the experiment. We experimentally observe that the cavity grows in hemispherical shape like the cavity formed in a deep bath although the depth of the bath is non-uniform due to an inclined bottom substrate. We derive two theoretical models to predict the experimental results of the fully developed cavity. Although each model has error, we observe that qualitatively theoretical model predicts the trend of experiment results well.

Key Words : Droplet (액적), Impact (충돌), Cavity (공동)

기호설명

- ρ : 밀도 (kg/m³)
- U : 액적의 충돌 속도 (m/s)
- D : 액적의 지름 (mm)
- γ : 표면 장력 (mN/m)
- μ : 점성 계수 (mPa·s)
- ϕ : 바닥 경사각 (°)
- H : 수조의 깊이 (mm)
- t : 시간 (s)
- h : 공동과 경사면 사이의 액체층 두께
- δ : 액적 충돌 위치와 경사면 사이 최소 거리

- R : cavity 의 지름 (mm)
- r : 결정 계수
- V : 유속

1. 서론

장마철의 빗방울, 화장실의 수도꼭지, spray coating 등 자연과 일상생활부터 산업분야에 이르기까지 액적 충돌 문제는 주변에서 흔히 볼 수 있는 현상 중 하나이다. 액적 충돌은 We 수 ($We = \rho U^2 D / \gamma$), Fr 수 ($Fr = U^2 / g D$), Oh 수 ($Oh = \mu / \sqrt{\rho \gamma D}$) 등에 의해 splashing, coalescence, jet 등과 같은 여러 다른 현상으로 분류가 되고, 이로 인하여 1900년대 초반부터 지금까지 많은 연구가 되었다⁽¹⁾. 특히나 액적 충돌로 인해 발생하는 cavity 의 크기에 관하여서는, 2000년대 초반부터 현재까지 에너지 보존 법칙⁽²⁾, 포텐셜 유동

† Department of Mechanical Engineering, KAIST
E-mail: hshk@kaist.ac.kr

* Department of Mechanical Engineering, KAIST

** Mueunjae School of Undergraduate Studies,
POSTECH

이론⁽³⁾, 베르누이 정리 이론 등을 이용하여 반지름을 예측하는 다양한 모델이 소개 되었다.

이러한 연구들은 모두 깊은 수조 혹은 균일한 깊이의 얇은 수조나 액체 필름 등에 대한 충돌에서 사용된 이론 모델이었다. 본 논문에서는 경사진 바닥면을 갖는 수조에서 발생하는 cavity 크기를 에너지 보존 및 베르누이 정리를 이용하여 그 예측 모델을 비교, 분석하고 다양한 유체에 대하여 그 실험결과를 통해 모델을 검증하였다.

2. 실험 방법

본 실험에서는 액적이 기울어진 수조에 충돌하여 발생하는 cavity를 관찰하였다. 액적과 수조는 같은 유체이며 점성은 글리세롤과 물을 혼합하여 바꾸었고, 계면활성제 SDS(Sodium dodecyl sulfate)를 이용하여 표면장력의 크기를 낮추었다. 액적은 평평한 니들로부터 시린지 펌프를 이용하여 20 초당 1 방울의 속도로 생성되었다. 액적은 중력에 의해 자유낙하 하였으며 그 크기는 니들의 직경과 액체의 표면장력에 의해 결정된다.

Table 1. Experiment variables

기호	실험 변수	크기
D	액적 지름 (mm)	2.5 - 4
U	충돌 속도 (m/s)	2.3 - 3.6
ϕ	바닥 경사각 (°)	30, 45, 60
H	깊이 (mm)	7.5 - 26

Table 2. Physical properties of working fluids.

Here, SDS is Sodium dodecyl sulfate.

Fluid	Density (kg/m ³)	Viscosity (mPa·s)	Surface tension (mN/m)
DI water	1000	1.00	72.0
50 % v/v glycerol-water solution	1139	6.86	64.0
68.5 % v/v glycerol-water solution	1189	28.36	68.0
5 mM SDS aqueous solution	1000	1.00	44.6
3 mM SDS aqueous solution	1000	1.00	56.0

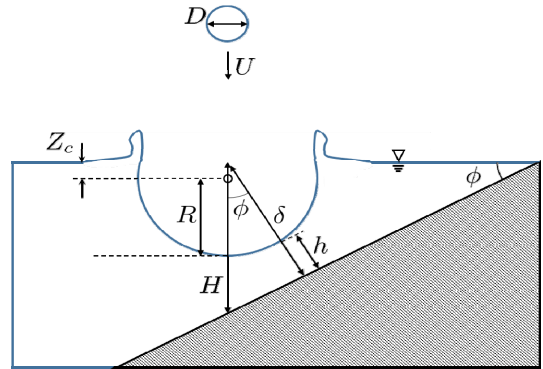


Fig. 1. Sketch of the cavity formation where D is the diameter of the drop, U is the impact velocity, ϕ is the inclination angle of the bottom substrate, R is the radius of the cavity, H is the depth, and Z_c is the distance between the center of the cavity and free surface. h is the thickness of the liquid layer under the cavity and δ is the minimum distance from the bottom substrate.

충돌속도는 니들의 높이를 통해 조절되었으며 Fr 수와 We 수가 $O(10^2)$ 이 되도록 크기가 통제되었다. 수조는 아크릴로 제작되었고 바닥면을 제외한 다른 벽면으로부터 영향이 없도록 충분히 크게 제작되었다. (가로: 25cm, 세로: 25cm, 깊이: 10cm) 실험에서 조작된 변수들과 유체는 각각 Table. 1 과 Table. 2 에 정리되었다. 실험실의 온도는 22°C 였으며, 모든 영상은 초고속 카메라(Photron Mini AX200)로 6400 fps 의 속도로 촬영 되었다. 각 실험은 3 번 반복되었고 영상 후처리는 MATLAB 코드를 이용하여 이진 영상으로 변환하여 사용하였다. 본 실험은 We 수: 240-700, Fr 수: 140-450, Oh 수: 0.002-0.06 의 범위에서 수행되었다. 본 실험과 관련된 변수는 Fig. 1 에 표시되어있다.

3. 공동 반지름 예측 모델

3.1 반구 모양 공동의 에너지 모델

Cavity 의 형태는 2000 년대 초반까지 중심이 자유표면에 위치한 반구라고 여겨졌다. 이러한 가

정은 cavity의 여러 물리적 요소를 cavity의 반지름만으로 손쉽게 정리할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, 최근 cavity의 반지름은 cavity 최하단부와 자유 표면 사이의 거리 $R+Z_c$ 로 새롭게 정의되었다. 따라서 실제 cavity는 그 중심이 자유 표면 아래로 치우쳐있기 때문에 반구로 가정된 cavity의 크기는 실제 반지름 R 에 비하여 크게 측정되었다. 액적 충돌 현상을 기술할 때 효과적인 방법 중 하나는 액체 계면의 형상 변화에 따른 에너지의 전환을 살펴보는 것이다. 액적이 자유표면에 충돌하면 액적의 에너지는 크게 자유표면 위로 솟구치는 액체 필름인 crown과 자유표면 아래로 생기는 구멍이인 cavity로 에너지 전환이 일어난다. 본 논문에서는 crown의 체적은 다른 변화에 비해 미약하여 그 에너지는 고려하지 않았다. 액적의 충돌 에너지는 액적이 충돌하기 직전에 갖는 운동에너지 및 표면에너지를 고려하였다. Cavity의 에너지는 포텐셜 에너지와 표면에너지를 고려하였다.

자유표면에 충돌하기 직전의 액적의 속도를 U 라고 정의하고, 액적을 완전한 구라고 가정하면 액적의 운동에너지는 $\frac{\pi}{12}\rho D^3 U^2$ 으로 정의된다. 마찬가지로, 액적의 표면에너지는 구의 겉넓이 πD^2 를 이용하여 $\pi\gamma D^2$ 로 정의할 수 있다. 따라서 액적의 충돌에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$E_0 = \frac{\pi}{12}\rho D^3 U^2 + \pi\gamma D^2 \quad (1)$$

Cavity의 에너지는 반구의 무게중심과 부피 및 겉넓이를 이용하여 정의할 수 있다. 이 때, cavity의 반지름은 cavity의 최하단부에서 자유 표면까지의 거리로, $R+Z_c$ 로 정의된다. 단, 표면 에너지는 초기의 변형되기 전 자유 표면의 에너지와 cavity의 표면 에너지의 차이이다.

$$E_1 = \frac{\pi}{4}\rho g(R+Z_c)^4 + \pi\gamma(R+Z_c)^2 \quad (2)$$

Fig. 2는 식 (1)과 식(2)에 대한 분포도이다. crown의 에너지를 고려하지 않았기 때문에 E_1

은 E_0 보다 언제나 작다. 최소자승법으로 근사한 직선은 점선으로 나타내었으며 그 관계는 $E_1 = 0.4713E_0 - 2.641 \times 10^{-7}$ 이다. 이때 결정계수 r^2 는 0.6575이다. Fig. 2의 실선은 액적의 충돌에너지를 모두 cavity의 에너지로 전환되었다는 가정하의 직선이다.

모델의 정확성을 위해 Fig. 2의 실선 대신 실험을 통해 얻은 근사 직선인 점선의 식과 식(1) 및 식(2)를 이용하여, cavity의 반지름 R 에 대해 정리하면 이론 반지름 $R_{th,1}$ 을 얻을 수 있다. 본 논문에서는 수식의 복잡성으로 인해 MATLAB 코드를 이용하여 해를 구하였다. 그 결과는 Fig. 3에서 확인할 수 있다. 실선은 위에서와 마찬가지로, $y = x$ 직선을 나타낸다.

Fig. 3에 나타난 데이터 분포를 살펴보면, 실선 주위로 데이터가 분포하고 있으나 산란된 모습이 위로 볼록한 곡선의 형태를 보인다. 이는 실험 데이터 중 cavity의 크기 $R+Z_c$ 가 8 mm 이상인 것은 오직 물과 글리세롤 50% 용액에 대한 것이므로 편향된 데이터 때문으로 생각된다. 그래프의 y 축은 반구의 가정에 따라 자유 표면으로부터 cavity 최하단부까지의 거리인 $R+Z_c$ 를 사용하였다.

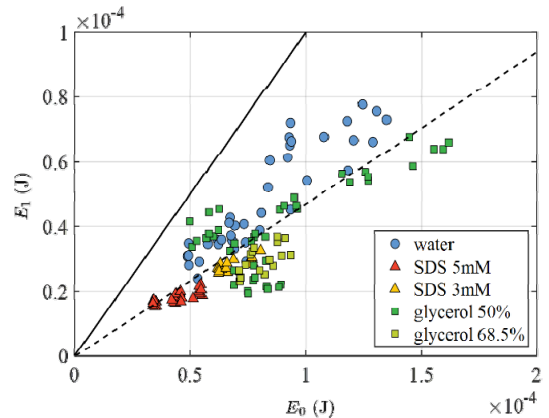


Fig. 2. Comparison of drop energy E_0 and cavity energy E_1 . The solid line indicates $y = x$ and the dashed line is obtained from the experimental results using the least square method.

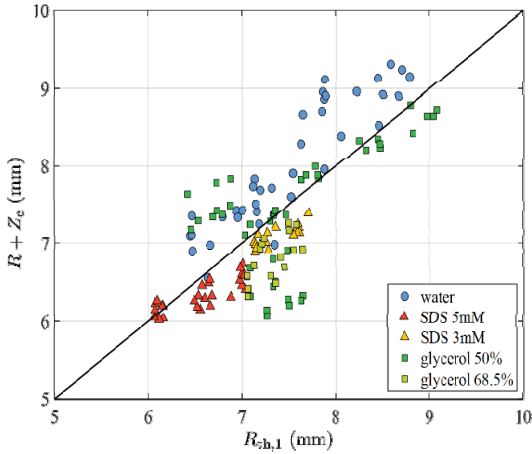


Fig. 3. Comparison of theoretical model for cavity radius $R_{th,1}$ and experimental results. The solid line indicates $y = x$ line.

3.2 구결 모양 공동

상술한 hemisphere cavity 반지름 예측 모델은 정확도는 다소 떨어지지만 cavity의 반지름 R 을 유일한 변수로 사용하여 에너지를 정리할 수 있다. 에너지를 통한 접근법은 액적 충돌 문제를 대략적으로 정리하는데 있어 여러 연구에서 효과적인 수단으로 사용되었다^(2,5). 그러나 실제 cavity는 완전한 반구의 모습이 아니라 구의 중심이 수면 아래로 내려온 spherical cap으로 묘사하는 것이 바람직하다. 이러한 spherical cap에서는 cavity의 기하학적인 특징을 묘사하기 위해 반지름 R 과 수면과 구의 중심의 거리 Z_c 두 개의 변수가 필요하다. 즉, 상술하였던 에너지 방정식은 변수가 늘어나서 사용하기 어렵게 되었다. 그 대신 본 모델에서는 참고논문에서 기술한 베르누이 정리를 이용한 액체 필름에 대한 cavity 반지름 예측 모델을 변형하여 새로운 모델을 제시하였다⁽⁴⁾.

3.2.1 구결 모양 공동의 베르누이 정리 모델

액적 충돌로 발생하는 유동은 해석하기에 매우 복잡하고 여전히 많은 논의가 제기되고 있다. 참고 문헌에 따르면⁽³⁾, 깊은 수조에서 액적 충돌로 발생하는 cavity는 포텐셜 유동과 비정상 베

르누이 정리를 사용하여 그 성장 과정을 기술하였다. 하지만 본 실험에서는 경사면의 존재로 인하여 기존에 사용하던 포텐셜 함수를 사용하기 위해 주의가 필요하다. 그 대신 본 논문에서는 참고문헌⁽⁴⁾에서 기술한 필름에서 발생하는 cavity의 크기 예측 모델을 수정하고 준정상 베르누이 정리를 이용하여 실험결과와 비교해 보겠다.

Cavity의 성장으로 인해 cavity계면과 경사면 사이의 액체층에서 유체가 밀려나는 속도를 u , cavity의 계면이 자유표면 아래로 성장하는 속도를 U_c 라고 정의하도록 한다. 좌표계를 cavity의 계면과 같이 움직인다고 가정하면 cavity와 경사면 사이의 액체층은 $(u - U_c)$ 의 속도로 움직인다. 중력과 표면장력으로 인한 평균 압력을 상술한 속도와 같이 베르누이 정리에 적용하면 식(3)과 같이 기술된다.

$$\rho(u - U_c)^2 - \frac{2\gamma}{R} = \frac{\rho U_c^2}{2} + \frac{\rho g(\delta - h)\cos\varnothing}{2} \quad (3)$$

참고문헌⁽⁶⁾에 나온 실험식을 이용하여 u 와 U_c 에 대하여 식(4)와 식(5)를 적용한다. h 가 δ 에 비해 작기 때문에 식(3)을 적절히 무차원화를 시키면 식(6)과 같이 정리된다.

$$u \approx \frac{R}{t - \tau} = \frac{R}{T} \quad (4)$$

$$U_c = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dT} \quad (5)$$

$$\frac{dR^*}{dT^*} = \frac{u^*}{2} - \left(\frac{\delta^* \cos\varnothing}{2Fr} + \frac{2}{R^* We} \right) \frac{1}{u^*} \quad (6)$$

여기서 위첨자 *는 무차원화된 수임을 의미한다.

τ 는 실험에 의해 구할 수 있는 적절한 시간 변수이며, T 는 시간 t 를 τ 만큼 평행이동한 새로운 시간 변수이다. 무차원화는 길이에 대하여 액적 지름 D 를, 속력에 대하여 충돌 속도 U 를, 시간에 대하여는 D/U 를 사용하였다. 본 실험과 같이 $We \gg 1$, $Fr \gg 1$ 조건을 가진 경우, 충돌 초

기에는 관성력으로 인해 cavity가 성장하지만 cavity가 최대 크기에 가까워지면 성장 속도가 몹시 느려지고 중력과 표면장력이 중요하게 작용한다. 즉, cavity 성장의 마지막 단계에서는 준정상 베르누이 정리인 식(6)을 이용할 수 있으며, 이 때 cavity의 반지름 R 은 최대 크기인 R_{\max} 에 근사할 수 있다. 이러한 가정을 이용하여 식(6)의 해를 구하면 시간에 따른 cavity의 반지름을 식(7)과 같이 구할 수 있다.

$$R^* = \sqrt{\beta T^* - T^{*2} \left(\frac{4}{R_{\max}^* We} + \frac{\delta^* \cos \phi}{Fr} \right)} \quad (7)$$

식(7)의 β 는 미정 계수로 본 실험과 같이 큰 We 수 및 Fr 수를 갖는 액적 충돌에서는 We 수 및 Fr 수와 무관한 미정계수이다. $T^* = T_{\max}^*$ 일 때, $R^* = R_{\max}^*$ 가 됨을 이용하여 cavity가 최대로 성장한 시간 T_{\max}^* 를 식(7)로부터 구할 수 있다. 식(8)에 정리된 T_{\max}^* 를 이용하면 마찬가지로 cavity의 최대 반지름인 R_{\max}^* 를 식(9)와 같이 정리할 수 있다.

$$T_{\max}^* \approx \frac{\beta}{2} \left(\frac{4}{R_{\max}^* We} + \frac{\delta^* \cos \phi}{Fr} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$R_{\max}^* \approx - \frac{2Fr}{We \delta^* \cos \phi} + \frac{\sqrt{4Fr^2 + Fr \beta^2 We^2 \delta^{*2} \cos^2 \phi / 4}}{We \delta^* \cos \phi} \quad (9)$$

식(9)로부터 β 는 식(10)과 같이 정리되며, Fig. 4에서 $\delta^* \cos \phi$ 에 대한 데이터 분포를 확인할 수 있다.

$$\beta = 2 \sqrt{\frac{4R_{\max}^*}{We} + \frac{\delta^* \cos \phi R_{\max}^*}{Fr}} \quad (10)$$

Fig. 4의 점선은 최소자승법으로 구한 근사 직선으로 그 식은 $\beta = 0.09096(\delta^* \cos \phi) + 0.2307$

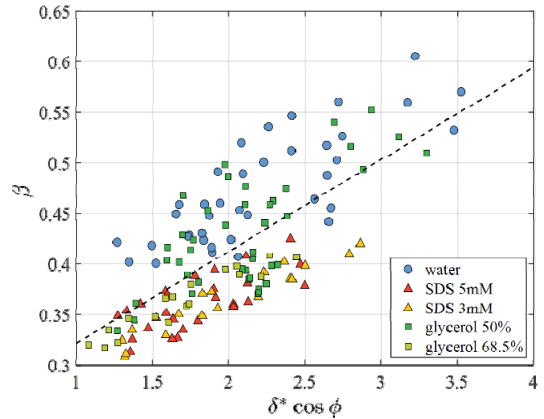


Fig. 4. Relation of indeterminate coefficient β and geometric dimensionless coefficient $\delta^* \cos \phi$.

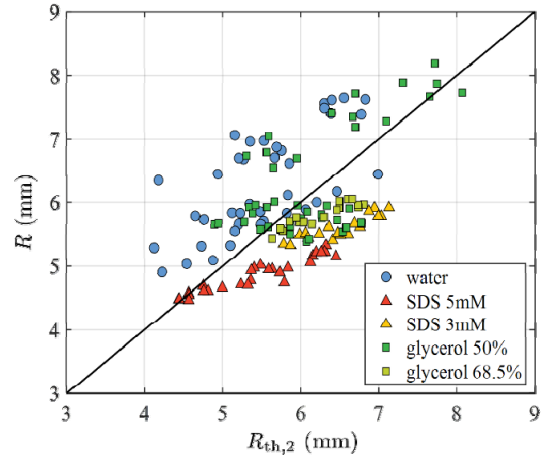


Fig. 5. Validation of the theoretical radius $R_{th,2}$ with respect to experimental cavity radius R . The solid line is $y = x$ line.

이다. 결정계수 r^2 는 0.5067이다. 여기서 구한 근사 직선을 식(9)에 대입하여 spherical cap cavity에서 베르누이 정리를 이용한 이론상 반지름 $R_{th,2}$ 를 구한 결과는 Fig. 5에 실험결과와 함께 제시되었다.

Fig. 5와 Fig. 3을 비교하였을 때, Fig. 5의 데이터 분포가 실선의 경향을 더 따르는 것을 볼 수 있다. 베르누이 정리를 이용한 모델은 비록 Z_c 에 대한 정보를 알 수는 없지만 반구로 가정된 cavity보다 그 경향성 측면에서는 $y = x$ 의 선형적인 분포와 유사하다고 볼 수 있다.

4. 토 의

3.2 절에서 논의한 베르누이 정리를 이용한 cavity 반지름 예측 모델은 비록 3.1 절의 모델보다 실선 주위로 고르게 분포되는 양상을 보였지만 $y = x$ 실선 주위로 산란된 분포를 보였다. 이에 대한 원인으로는 u 에 대한 실험식은 액체 필름에 대한 식으로서, 본 모델에 적용하기에는 수정이 필요함을 말할 수 있다.

Fig. 3 과 Fig. 5 의 결과는 깊은 수조, 혹은 액체 필름에서 발생하는 cavity 크기 예측 모델과 비교하면 그 정확도가 떨어진다고(3-5). 3.1 절의 모델과 3.2 절의 모델은 모두 curve fitting 과정이 포함되어 있기 때문에, 결과의 정확성은 필연적으로 fitting 의 적합성에 따라 달라진다. 하지만 본 논문에서 소개한 두 개의 모델은 모두 결정 계수 r^2 가 0.9 미만으로 낮았기 때문에 그 정확성 또한 떨어졌다고 추측할 수 있다. 이러한 정확성 문제를 해결하기 위해서는 앞서 말한 모델의 수정이 불가피하므로 논의가 필요하다고 말할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 경사면이 있는 수조에서 액적 충돌로 인해 발생하는 cavity 의 최대 크기를 예측하는 모델을 수립하고 검증하는 연구를 수행하였다. 다양한 유체에 대하여 실험을 하였고 반구 모양의 cavity 관점과 spherical cap 모양 cavity 관점에서 두 개의 모델을 수립하였다. 반구 모양의 cavity 에서는 액적의 충돌에너지와 cavity 의 에너지를 curve fitting 을 이용하여 반지름을 예측하였다. 비록 cavity 의 실제 모습은 정확한 반구가 아니어도 이러한 접근은 간단하고 직관적으로 그 경향성을 파악할 수 있다는 점에서 장점을 가진다. Spherical cap 모양 cavity 는 수면아래로 내려온 구의 중심인 Z_c 로 인하여 기존의 에너지 접근법을 사용할 수 없고 문제가 한층 복잡해졌다. 때문에 본 형상에 대해서는 cavity 주변 유체층에 대한 베르누이 정리 관점에서 모델을 수립하였다. 이 모델에서는 실험적

으로 얻은 미정 계수 β 를 이용하여 최종적으로 cavity 의 반지름 R 을 예측하였다. 모든 모델은 실험 결과와 비교하여 검증하였고, spherical cap cavity 에서 수립한 모델은 cavity 반지름 예측에 있어서 반구 모양의 cavity 에서 수립한 모델보다 상관계수가 3.1 절에서 보인 Fig. 3 의 상관계수보다 낮았지만, 선형적인 경향성을 보여주고 있고, 정성적으로 경향성을 파악할 수 있는 모형임을 확인하였다.

평가된 두 모델은 모두 깊은 수조나 액체 필름에서 발생하는 cavity 에 대해 수행된 기존의 연구와 비교하였을 때, 정량적 예측 부분에서 다소 미흡한 점이 있기 때문에 앞으로의 추가 연구가 필요하다고 판단된다.

후 기

This work was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea funded by the Ministry of Science (NRF2018R1C1B6004190). We also thank that this research is based on a research which has been conducted as part of the KAIST-funded Global Singularity Research Program for 2019.

REFERENCE

- 1) Yarin, A. L., 2006, "Drop impact dynamics: Splashing, Spreading, Receding, Bouncing...", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 38, pp. 159-192.
- 2) Fedorchenko, A. I., & Wang, A. B., 2004, "On some common features of drop impact on liquid surfaces," *Physics of Fluids*, Vol. 16(5), pp. 1349-1365.
- 3) Bisighini, A., Cossali, G. E., Tropea, C., & Roisman, I. V., 2010, "Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target," *Physical Review E*, Vol. 82(3), p. 036319.
- 4) Roisman, I. V., van Hinsberg, N. P., & Tropea,

- C., 2008, "Propagation of a kinematic instability in a liquid layer: capillary and gravity effects," *Physical Review E*, Vol. 77(4), p. 046305.
- 5) Leng, L. J., 2001, "Splash formation by spherical drops," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 427, pp. 73-105.
- 6) Yarin, A. L., & Weiss, D. A., 1995, "Impact of drops on solid surfaces: self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 283, pp. 141-173.