

# 극대화된 밴드갭을 갖는 켈빈 격자 구조의 아이소-지오메트릭 최적 설계

최명진<sup>1,2</sup> · 오명훈<sup>1</sup> · 조선희<sup>1</sup> · 구본용<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>서울대학교 조선해양공학과, <sup>2</sup>군산대학교 기계융합시스템공학부

## Isogeometric Optimal Design of Kelvin Lattice Structures for Extremal Band Gaps

Myung-Jin Choi<sup>1,2</sup>, Myung-Hoon Oh<sup>1</sup>, Seonho Cho<sup>1</sup> and Bonyong Koo<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 08826, Korea

<sup>2</sup>School of Mechanical Convergence System Engineering, Kunsan National University, Gunsan, 54150, Korea

### Abstract

A band gap refers to a certain frequency range where the propagation of mechanical waves is prohibited. This work focuses on engineering three-dimensional Kelvin lattices having external band gaps at low audible frequency ranges using a gradient-based design optimization method. Elastic wave propagation in an infinite periodic lattice is investigated by employing the Bloch theorem. We model the ligaments using a shear-deformable beam model obtained by consistent linearization in a geometrically exact beam theory. For a given lattice topology, we enlarge band gap sizes by controlling the configuration of the beam neutral axis and cross-section thickness that are smoothly parameterized by B-spline basis functions within the isogeometric analysis framework.

**Keywords** : wave propagation, band gap, bloch theorem, kelvin lattice, isogeometric analysis, design optimization

### 1. 서 론

주기성(periodicity)을 갖는 구조의 동적 특성(dynamic characteristics)에 관한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 특히, 특정한 주파수 대역의 파동을 전파시키지 않는 밴드갭(band gap) 특성을 가지는 주기 구조는 소음과 진동의 저감 등에 활용될 수 있다. 밴드갭 특성을 일으키는 대표적인 원리로 브래그 산란(bragg scattering)과 국부 공진(local resonance) 효과를 들 수 있다. 브래그형(bragg-type) 밴드갭은 반복 구조 내에서 파동의 상쇄 간섭(destructive interference) 효과에 의해 특정한 주파수 대역의 파동들이 감쇄됨에 따라 나타나는데, 상쇄 간섭을 일으키는 파동의 파장(wave length)이 단위 격자(unit cell)의 크기에 비례하므로 저주파수 대역 밴드갭을 얻기 위해서는 단위 격자의 크기를 매우 크게 해야 하는 문제점이

있다. 이를 극복하기 위해 복합재의 봉입물(inclusion)이나 격자 구조 연결선(ligament)의 국부 공진(resonance)에 의해 에너지를 소산(dissipation)시킴으로서 밴드갭을 생성하고자 하는 연구가 지속적으로 이루어지고 있다. Liu 등(2000)은 연질 피복(soft cladding)으로 둘러싸인 구형(spherical) 봉입물의 국부 진동을 통해 브래그형 밴드갭에 비해 훨씬 낮은 주파수대역의 밴드갭 생성이 가능함을 보였다. Bacigalupo 등(2017)은 격자 구조에 공명기(resonator)를 추가하고 그 개수와 배열 그리고 물성을 최적화 기법을 통해 결정함으로써 밴드갭 특성을 개선하였다. Wang 등(2015)은 빔(beam) 격자 구조에서 연결선의 국부 공진에 의한 밴드갭 생성을 검증하였으며 연결선들의 coordination number, 즉 평균 연결도(average connectivity)와 밴드갭 특성의 관계에 대하여 논의하였다. Li 등(2017)은 사각(square) 프레임 구조에 외팔보

\* Corresponding author:

Tel: +82-63-469-4713; E-mail: bykoo@kunsan.ac.kr

Received June 22 2019; Revised July 8 2019;

Accepted July 9 2019

©2019 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

(cantilever beam)를 추가하여 단성 에너지를 빔(beam)의 국부 공진으로 변환시킴으로써 밴드갭을 생성하였다.

지금까지 밴드갭을 특성을 가지는 다양한 위상(topology)의 격자 구조들이 제시되어 왔다. Phani 등(2006)은 다양한 위상을 갖는 격자구조의 밴드갭 특성을 고찰하였다. Trainiti 등(2016)은 물결형(undulated) 연결선의 도입에 따른 격자 구조의 이방성(anisotropy)과 파동 전파의 방향성 등 동적 특성의 관계에 대하여 논의하였다. 6개의 사각형과 8개의 육각형으로 이루어진 14면체(Fig. 1(a)의 좌측 하단 빨간색 격자)를 주기적으로 배열한 켈빈 구조가 3차원 공간을 최소 면적으로 채우는 구조로 제안되었으며(Thomson, 1887), 이후에 더 작은 면적을 갖는 Weaire-Phelan 폼 구조가 발견되었다(Weaire and Phelan, 1994). Bayat과 Gaitanaros(2018)은 최근 켈빈 구조의 파동 전파 방향성 및 밴드갭 특성에 관한 연구를 수행하였다.

위상 및 형상 최적 설계를 통해 밴드갭 특성이 극대화된 구조를 얻으려는 다양한 연구가 수행되어 왔다. Sigmund와 Jensen(2003)은 밀도법 기반 위상 최적화를 통해 재료의 밴드갭 성능을 극대화하였다. Lu 등(2017) 또한 위상 최적 설계를 통해 2상(two-phase)의 3차원 포노닉 크리스탈(phononic crystal) 구조를 제안하였다. 최근 3차원 프린팅 기술이 급격히 발달하면서 형상 설계의 자유도 역시 크게 증가하였다. 하지만 밀도법 기반 위상 최적 설계 기법은 여전히 형상의 엄밀한 표현에 한계를 갖고 있다. Choi 등(2019)은 빔 모델을 이용하여 격자 구조 거동을 모사하였으며 중립축의 형상(configuration) 및 단면 두께의 치수(sizing) 최적 설계를 통해 밴드갭이 극대화된 다양한 2차원 및 3차원 물결형 격자 구조를 제시하였다. 또한 아이소-지오메트릭 해석법(Hughes *et al.*, 2005)에 기반하여 CAD(computer-aided design) 시스템에서 사용되는 NURBS(non-uniform rational b-splines)를 기저함수로 도입함으로써 고유치 해석 및 설계민감도 해석의 과정에서 고차의 기하정보를 엄밀하게 표현할 수 있다(Cho and Ha, 2009; Ahn *et al.*, 2010). 본 논문에서는 기존 연구(Choi *et al.*, 2019)의 해석적 설계 민감도 해석 기법을 활용하여 켈빈(kelvin) 격자 구조의 밴드갭 성능을 극대화하는 최적 설계를 수행하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 NURBS 기저함수에 의한 격자 구조의 형상 매개화에 대하여 설명한다. 3장에서는 블로흐(bloch) 이론에 의한 반복 구조의 파동 분산관계(dispersion relation) 해석을 다루며, 4장에서는 고유치 문제에 대한 형상 및 치수 설계 민감도 해석을 간략히 설명한다. 5장에서는 켈빈 구조의 밴드갭을 극대화하는 최적 설계 결과를 제시한다.

## 2. NURBS에 의한 3차원 격자구조의 형상 표현

NURBS 기저함수는 B-spline 기저함수에 의해 구성된다. B-spline 기저함수의 노트 벡터(knot vector)는 다음과 같이 정의된다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

이때,  $n$ 은 조정점(control point)의 개수이며,  $p$ 는 기저함수의 차수(degree)를 의미한다. B-spline 기저함수는 다음과 같이 재귀적(recursive) 방법에 의해 얻어진다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (p=0) \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

NURBS 기저함수는 다음과 같이 정의된다.

$$W_i(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_i N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (4)$$

여기서,  $w_i$ 는 각각의  $i$ 번째 기저함수에 대응되는 가중치(weight)이다. NURBS 기저 함수  $W_i(\xi)$ 와 조정점  $B_i$ 를 사용하여 NURBS 곡선을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n W_i(\xi) B_i \quad (5)$$

식 (5)는 빔의 중립축 형상 표현에 사용된다. 빔의 단면 두께 역시 NURBS 기저함수에 의해 고차의 연속성을 갖도록 매개화할 수 있다.

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^{n_{th}} \widetilde{W}_i(\xi) h_i \quad (6)$$

이때,  $h_i$ 는 두께의 분포를 나타내는 계수값을 의미하며,  $W_i(\xi)$  대신  $\widetilde{W}_i(\xi)$ 로 표기한 것은 두께의 매개화에서 중립축의 형상과 서로 다른 수준의 요소망 세분화(mesh refinement)를 사용할 수 있기 때문이다.

### 3. 블로흐 이론(bloch theorem)에 의한 반복 구조의 탄성과 해석

#### 3.1 켈빈 구조의 형상 표현

켈빈 격자 구조는 Fig. 1(a)에 파란색 선으로 표시한 것과 같이 6개의 사각형으로 이루어진 단위 격자(unit cell)를 Fig. 1(b)에 표시된 기저벡터  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 의 방향으로 주기적으로 배열하여 얻을 수 있다. 이때 기저벡터(direct lattice base vector)는 다음과 같이 얻어진다(Bayat and Gaitanaros, 2018).

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\sqrt{2}L\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{b}_2 = 2\sqrt{2}L\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_3 = 2\sqrt{2}L\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (7)$$

이때,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 는 각각 전역 직교좌표계의 X, Y, Z축 방향의 기저벡터를 의미하고  $L$ 은 연결선의 길이를 의미하며  $L = 40\text{mm}$ 로 선택하였다.

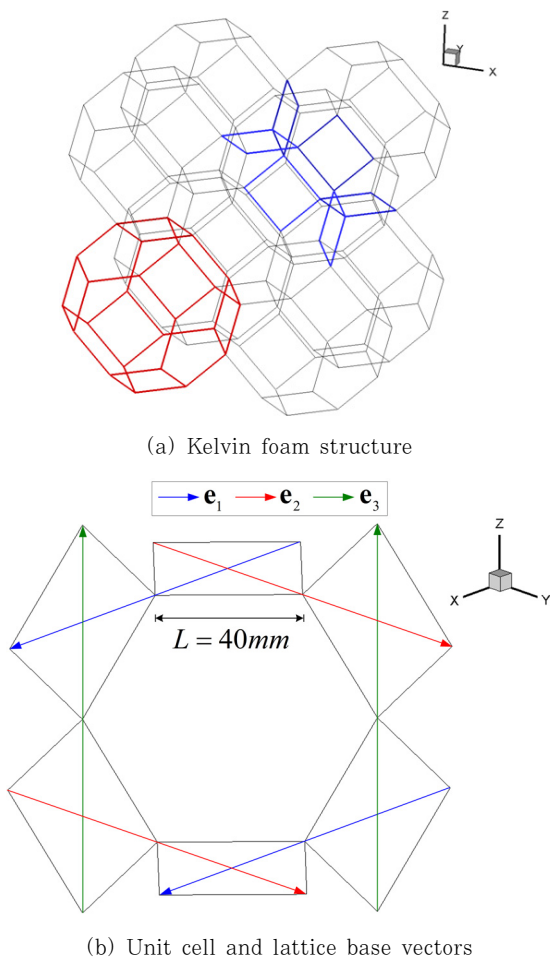


Fig. 1 Kelvin lattice structure and unit cell

#### 3.2 파동 분산관계의 계산

블로흐 이론(bloch theorem)을 이용하여 무한(infinite) 반복 구조에서의 탄성과 분산관계(dispersion relation) 해석을 수행한다. 무한 반복 격자구조내의 임의의 점  $p$ 의 위치는 primitive 셀(cell) 내의 대응점으로부터의 기저벡터 방향으로의 병진(translation)에 의해 다음과 같이 표현된다(Bayat and Gaitanaros, 2018).

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_0 + n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2 + n_3\mathbf{b}_3 \quad (8)$$

이때  $n_i (i = 1, 2, 3)$ 는 정수값을 갖는다. 블로흐 이론에 의해 격자 구조내의 한 점  $p$ 에서의 응답(response)은 primitive 셀 내의 대응점에서의 응답과 다음의 관계를 갖는다(Choi et al., 2019).

$$\begin{cases} \mathbf{z}(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{z}(\mathbf{r}_0, t)e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0)} = \mathbf{z}(\mathbf{r}_0, t)e^{n_i\mu_i} \\ \theta(\mathbf{r}_p, t) = \theta(\mathbf{r}_0, t)e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0)} = \theta(\mathbf{r}_0, t)e^{n_i\mu_i} \end{cases} \quad (9)$$

전단 변형을 고려하기 위해 회전 자유도를 도입하였고,  $i = 1, 2, 3$ 는 dummy index이다.  $\mathbf{k}$ 는 wave vector를 나타내고,  $\mu_i = \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_i$ 는 propagation constant의 성분을 나타내는 복소수(complex number)이며, 그 실수부와 허수부는 각각 감쇄 및 phase 상수를 나타낸다. 본 논문에서는 감쇄 효과를 고려하지 않아  $Re(\mu_i) = 0$ 이다. 응답의 주기성을 만족시키기 위해서  $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j^* = 2\pi\delta_{ij}$ 의 조건을 만족시키는 다음과 같은 역격자(reciprocal lattice) 기저벡터를 이용해서 wave vector를 표현한다.  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker-delta symbol을 의미한다(Bayat and Gaitanaros, 2018).

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1^* = 2\pi \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)} \\ \mathbf{b}_2^* = 2\pi \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)} \\ \mathbf{b}_3^* = 2\pi \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)} \end{cases} \quad (10)$$

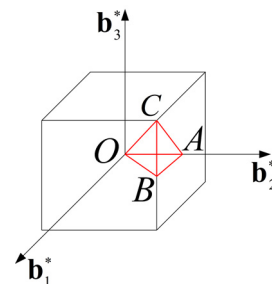


Fig. 2 The first Brillouin zone and irreducible Brillouin zone

역격자에 대해 주기성을 고려하면 Fig. 2에 육면체로 도시된 제 1 Brillouin 영역이 정의되며, 대칭성으로 의해 사면체로 도시된 최소 Brillouin 영역(irreducible Brillouin zone, IBZ) 내의 wave vector 성분만을 고려하더라도 모든 방향으로의 파동의 전파를 다룰 수 있다. 일반적으로 각 고유모드별로 고유주파수의 극값(extremum)이 IBZ의 경계에서 나타남을 이용해서 IBZ의 모서리(Fig. 2의 빨간색 선)상의 wave vector 성분만을 고려하게 된다.

### 3.3 3차원 빔 모델에 의한 격자 구조 탄성과 해석

본 절에서는 기하학적으로 정밀한 비선형 빔 모델(Simo and Vuoc, 1986)의 선형화(linearization)를 통해 얻은 선형 빔 모델에 대하여 간략히 설명한다. 다음과 같이 변위와 회전 벡터에 대한 조화응답(harmonic response)을 가정한다.

$$\begin{cases} \mathbf{z}(s,t) = \mathbf{z}(s)e^{-i\omega t} \\ \boldsymbol{\theta}(s,t) = \boldsymbol{\theta}(s)e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (11)$$

이때,  $i^2 = -1$ 이고  $\omega$ 는 각진동수, 그리고  $s$ 와  $t$ 는 각각 빔의 중립축의 arc-length 좌표와 시간을 의미한다. 식 (11)을 이용하여 고유치 문제에 대한 변분 방정식을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$a(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = \zeta d(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}), \quad \forall \bar{\boldsymbol{\eta}} \in \bar{Z} \quad (12)$$

$\zeta \equiv \omega^2$ 이고,  $\bar{Z}$ 는 운동학적 경계조건을 만족시키는 해 공간(solution space)을 의미한다.  $\boldsymbol{\eta} \equiv (\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta})$ 는 변위와 회전 벡터로 이루어진 응답 변수를 의미하며  $\bar{\boldsymbol{\eta}} \equiv (\bar{\mathbf{z}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$ 는 그 변분 혹은 가상(virtual) 응답 변수를 나타낸다. 고유벡터의 유일성(uniqueness)을 위해 아래와 같은 정규화 조건을 도입한다.

$$d(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) = 1 \quad (13)$$

이때, 변형률에너지 및 운동에너지 형식은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \equiv \int_{\Omega} (\bar{\boldsymbol{\Gamma}}^T \mathbf{C}_F \boldsymbol{\Gamma} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^T \mathbf{C}_M \boldsymbol{\Omega}) ds \\ d(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \equiv \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{z}}^T \rho A \mathbf{z} + \bar{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{I}_p \boldsymbol{\theta}) ds \end{cases} \quad (14)$$

여기서,  $\boldsymbol{\Gamma}$ 는 축방향 및 전단 변형률을 의미하고  $\boldsymbol{\Omega}$ 는 굽힘 및 비틀림 변형률을 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{\Lambda}_0^T (\mathbf{z}_{,s} + \mathbf{j}_1 \times \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Lambda}_0^T \boldsymbol{\theta}_{,s} \end{cases} \quad (15)$$

$\mathbf{j}_1$ 은 단위 접선벡터이고,  $\{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ 가 정규화된 국소 직교 기저벡터(local orthonormal base vectors)를 나타낸다.  $\boldsymbol{\Lambda}_0$ 는 다음과 같은 전역(global) 직교 기저벡터  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 로부터 국소 기저벡터로의 회전변환을 나타내며  $\mathbf{j}_I = \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{e}_I$  ( $I=1,2,3$ )의 관계를 갖는다. 행렬  $\mathbf{C}_F$ 와  $\mathbf{C}_M$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} \mathbf{C}_F = \text{diag}[EA, GA_2, GA_3] \\ \mathbf{C}_M = \text{diag}[GI_p, EI_2, EI_3] \end{cases} \quad (16)$$

이때,  $\text{diag}[a,b,c]$ 는  $a, b, c$ 를 성분으로 갖는 대각행렬을 의미하고,  $A$ 는 단면적,  $\rho$ 는 밀도,  $E$ 는 영률,  $G$ 는 전단강성을 나타낸다.  $A_2 \equiv k_2 A$ ,  $A_3 \equiv k_3 A$ 이며  $k_2$ 와  $k_3$ 는 전단보정계수(shear correction factor)를 의미한다.  $\mathbf{I}_p \equiv \rho \cdot \text{diag}[I_p, I_2, I_3]_{\{\mathbf{j}_I\}}$ 는 관성 텐서를 의미하며  $I_p, I_2, I_3$ 는 각각 극관성모멘트(polar moment of inertia)와 2개의 주관성모멘트(principal moment of inertia)를 의미한다. 아랫 첨자  $\{\mathbf{j}_I\}$ 는 관성텐서가 국소 기저벡터  $\{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ 에 대해 표현되었음을 의미한다.

### 3.4 NURBS 기저함수를 이용한 응답변수의 이산화

아이소-지오메트릭 해석기법에서는 CAD 시스템에서 형상을 표현하는 NURBS 기저함수를 이용하여 다음과 같이 응답변수를 이산화(discretization)한다.

$$\begin{cases} \mathbf{z}^h = \sum_{i=1}^n W_i(\xi) \mathbf{y}_i \\ \boldsymbol{\theta}^h = \sum_{i=1}^n W_i(\xi) \boldsymbol{\theta}_i \end{cases} \quad (17)$$

식 (17)을 이용해 식 (12)로부터 다음과 같이 이산화된 고유치 문제를 얻는다.

$$(\mathbf{K} - \zeta \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (18)$$

이때,  $\mathbf{K}$ 와  $\mathbf{M}$ 은 각각 전역(global) 강성행렬과 질량행렬을 의미하며  $\mathbf{u}$ 는 응답 계수 벡터를 의미한다. 식 (9)로부터 얻은 블로흐 주기경계조건은 다음과 같은 변환관계에 의해 표현된다 (Phani *et al.*, 2006).

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}) \tilde{\mathbf{u}} \quad (19)$$

식 (19)을 식 (18)에 대입하고 양변에  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\mu})^H$ 를 곱하면 다음과 같은 Hermitian 고유치 문제를 얻는다.

$$(\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\mu}) - \zeta \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu}))\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (20)$$

이때,  $\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\mu}) \equiv \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu})^H \mathbf{K} \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu})$ 와  $\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu}) \equiv \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu})^H \mathbf{M} \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu})$ 는 각각 축소된 강성 및 질량행렬이다.  $(\cdot)^H$ 는 켈레전치(conjugate transpose)를 의미한다. IBZ의 모서리를 따라 주어진 wave vector 성분  $\boldsymbol{\mu}$  각각에 대하여 식 (20)의 고유치 문제를 풀어서 파동의 분산관계를 얻는다.

#### 4. 고유치 문제의 설계 민감도 해석

##### 4.1 중립축 형상 설계 민감도 해석

본 논문에서는 고유치의 중첩도를 고려하지 않고 단순 (simple) 고유치에 대한 설계민감도 해석 기법을 적용하였다. 중첩된 고유치에 대한 설계 민감도에 대한 설명은 Seyranian 등(1994)에 제시되어 있으며, 향후 연구에서 반영될 것이다.

중립축의 형상 설계 변화를 나타내는 설계 속도장은 조정점의 위치 섭동(perturbation)량과 NURBS 기저함수의 선형조합으로 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{V}(\xi) = \sum_{i=1}^n W_i(\xi) \delta \mathbf{B}_i \quad (21)$$

식 (12)의 양변에 전미분(material derivative)을 취하고 식 (13)의 정규화 조건을 적용하면 아래와 같이 고유치의 설계 민감도를 얻을 수 있다.

$$\dot{\zeta} = a_{\zeta'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) - \zeta d_{\zeta'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \quad (22)$$

이때,  $a_{\zeta'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ 와  $d_{\zeta'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ 는 각각 변형률에너지 및 운동 에너지 형식의 명시적 설계 의존성에 해당되는 항들로 식 (21)의 주어진 설계 속도장과 고유벡터에 의해 계산될 수 있다. 보다 자세한 식은 Choi 등(2019)을 참고할 수 있다.

##### 4.2 단면적 치수 설계 민감도 해석

앞서 식 (6)에서 단면의 두께를 NURBS 기저함수에 의해 매개화하였으며 그 계수( $h_i$ )를 설계변수로 고려할 수 있다. 식 (12)의 양변에 설계 변수에 대한 일차 변분(first variation)을 취하고 식 (13)의 정규화 조건을 적용하면 아래와 같은 치수

설계민감도 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\zeta}' = a_{\zeta_u'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) - \zeta d_{\zeta_u'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \quad (23)$$

$a_{\zeta_u'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ 와  $d_{\zeta_u'}'(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ 는 각각 변형률에너지 및 운동 에너지 형식의 명시적 설계 의존성에 해당되는 항들로 자세한 식은 Choi 등(2019)에 제시되어 있다.

### 5. 켈빈 밴드갭 구조의 최적 설계

#### 5.1 최적화 문제의 정식화

인접한 두 고유모드간의 밴드갭을 극대화하기 위해 목표 밴드갭의 상한(underlying) 밴드의 최소 주파수를 최대화하고 하한(underlying) 밴드의 최대 주파수를 최소화한다. 이를 위해 Sigmund와 Jensen(2003)은 목적 함수를 다음과 같이 설정하였다.

$$f(\mathbf{d}) = 2 \frac{\min_{\mathbf{k}} \zeta_{j+1}(\mathbf{k}, \mathbf{d}) - \max_{\mathbf{k}} \zeta_j(\mathbf{k}, \mathbf{d})}{\min_{\mathbf{k}} \zeta_{j+1}(\mathbf{k}, \mathbf{d}) + \max_{\mathbf{k}} \zeta_j(\mathbf{k}, \mathbf{d})} \quad (24)$$

식 (24)의 목적함수의 분모는 밴드갭의 평균 주파수 대역을 나타내므로 목적함수의 최대화를 통해 밴드갭의 주파수 대역을 낮출 수 있다. 설계 변수  $\mathbf{d}$ 를 이용한 최적화 문제는 다음과 정식화된다(Choi *et al.*, 2019).

$$\text{Maximize } f(\mathbf{d}) \quad (25)$$

$$\text{subject to } \{\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\mu}) - \zeta \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu})\}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$g_k(\mathbf{d}) \equiv \frac{1}{L_k(\mathbf{d})} \int_{\Omega_k} [\{\kappa^f(\xi) / \kappa_V^f\}^2 - 1] ds < 0 \quad (27)$$

식 (27)은 중립축의 과도한 형상 변화로 인한 꼬임을 방지하기 위한 것으로,  $k$ 번째 노트 요소(knot span)의 최대 프레네-세레 곡률(frenet-serret curvature)을 제약한다.  $L_k$ 는  $k$ 번째 노트 요소의 길이,  $\kappa_V^f$ 는 허용 곡률을 의미한다.

#### 5.2 켈빈 구조의 최적설계 결과

격자 구조의 재료 물성치는 영률  $E=71\text{GPa}$ , 포아송비  $\nu=0.33$ , 밀도  $\rho=2,700\text{kg/m}^3$ 로 설정하였고, 단면의 두께는  $5.046\text{mm}$ 로 균일하게 설정하였다. 식 (17)에서의 응답 변수 이산화에서 4차(quartic)의 NURBS 기저함수와 각 패치(patch)별 10개씩의 노트 요소를 이용하였다. 단위 격자의 초기

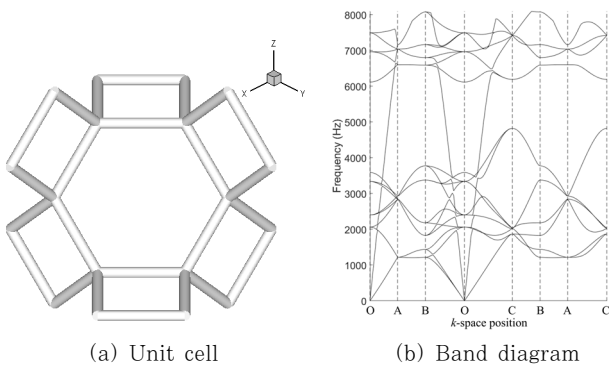


Fig. 3 Unit cell and dispersion relation of original design

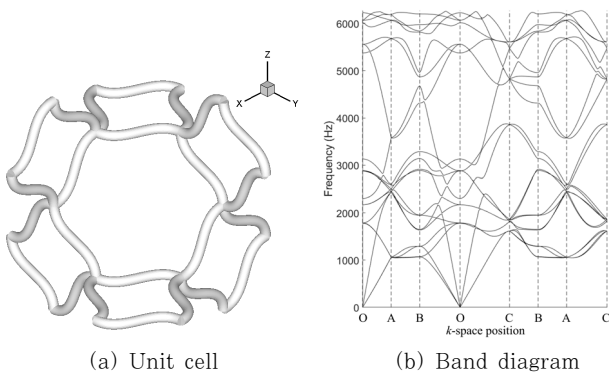


Fig. 4 Unit cell and dispersion relation of undulated design

설계는 Fig. 3(a)와 같다. Fig. 3(b)는 초기 설계안의 분산관계를 나타내며 모든 방향으로의 밴드갭을 의미하는 complete 밴드갭은 관찰되지 않는다. Fig. 4(a)는 연결선의 형상을 물결형으로 변화시킨 것으로, Fig. 4(b)에 나타난 것과 같이 여전히 complete 밴드갭은 관찰되지 않는다.

Fig. 4(a)의 물결형 구조를 초기설계안으로 하여 식 (24)~(27)의 최적화 문제의 해를 MMFD(Modified Method of Feasible Direction) 알고리즘을 이용하여 얻었다. 각 패치별로 5개의 조정점과 4차의 NURBS 기저함수를 이용해 형상을 매개화하였으며 단위 격자의 크기를 유지하기 위하여 양끝 조정점의 위치는 고정하였고 가운데 3개의 조정점의  $X, Y, Z$  좌표 각각을 형상 설계 변수로 설정하였다. 또한, 각 패치별로 14개의 계수와 4차의 NURBS 기저함수를 이용하여 두께의 분포를 표현하였으며 이들을 추가적인 설계 변수로 고려하였다. 목표 밴드갭을 15번째와 16번째 고유모드 사이의 것으로 설정하였으며, 그 결과 Fig. 5(a)의 최적 설계안을 얻었다. 목표 밴드갭(상한 및 하한 고유모드 번호)의 선택에 대하여 최적화의 결과가 민감하므로 경험적인 방법에 의존하여 목표 밴드갭을 설정하게 되며, 만약 초기 설계안에서 complete 밴드갭이 나타난다면 그 밴드갭을 주로 극대화한다(Choi *et al.*, 2019).

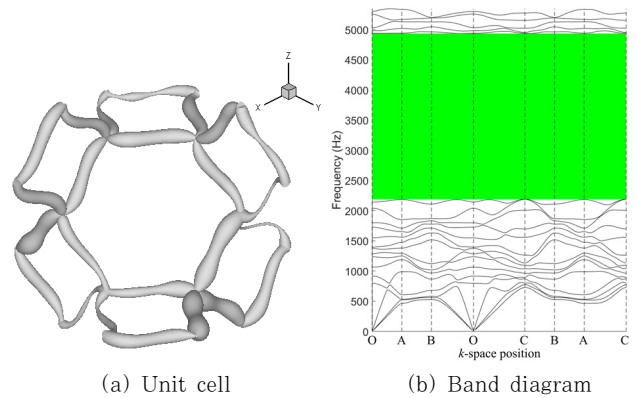


Fig. 5 Unit cell and dispersion relation of optimal design

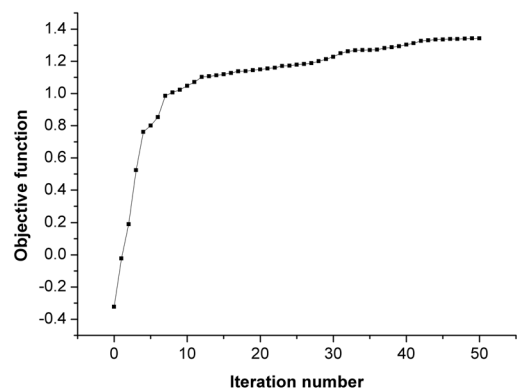


Fig. 6 Optimization history of objective function

Fig. 5(b)는 최적 설계안의 분산관계를 나타낸다. Fig.4(b)에서는 complete 밴드갭이 나타나지 않았지만 최적화를 통해 매우 큰 밴드갭이 2,188~4,934Hz 주파수 영역에서 생성되었음을 알 수 있다. Fig. 6은 목적 함수의 최적화 이력을 나타낸다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 해석적 설계 민감도 해석 기법 기반의 최적 설계를 통해 켈빈 격자 구조의 밴드갭을 극대화하였다. 빔 모델을 활용하여 삼차원의 격자 구조의 거동을 모사하였으며 블로흐 주기 경계 조건을 단위 격자에 적용하여 무한 반복구조의 분산관계 해석을 수행하였다. 빔 모델의 중립축 형상과 단면의 두께 분포를 고차의 NURBS 기저함수로 매개화하였다. 인접한 두 고유모드간의 밴드갭을 극대화하는 최적화를 통해 얻은 켈빈 구조는 가청 주파수 영역 내에서 약 2.7kHz의 매우 큰 폭을 갖는 밴드갭을 나타내었다. 향후 연구에서는 고유치의 중첩을 고려한 설계 민감도 해석을 적용하고 제시된 최적 설계안에 대한 실험적 검증을 수행할 것이다.

감사의 글

M.-J. Choi and B. Koo were supported by the NRF grant funded by the Korea government(Ministry of Science, ICT, and Future Planning)(No. NRF-2018 R1D1A1B07050370).

References

**Ahn, S.H., Kim, M.K., Cho, S.H.** (2010) Isogeometric Shape Design Optimization of Structures under Stress Constraints, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 21(3), pp.275~282.

**Bacigalupo, A., Gnecco, G., Lepidi, M., Gambarotta, L.** (2017) Optimal Design of Low-Frequency Band Gaps in Anti-Tetrachiral Lattice Meta-Materials, *Compos. B: Eng.*, 115(15), pp.341~359.

**Cho, S., Ha, S.H.** (2009) Isogeometric Shape Design Optimization: Exact Geometry and Enhanced Sensitivity, *Struct. Multidiscipl. Optim.*, 38(1), pp.53~70.

**Choi, M.-J., Oh, M.-H., Koo, B., Cho, S.** (2019) Optimal Design of Lattice Structures for Controllable Extremal Band Gaps, *Sci. Rep.*, 9, 9976.

**Li, Y., Baker, E., Reissman, T., Sun, C., Liu, W. K.** (2017) Design of Mechanical Metamaterials for Simultaneous Vibration Isolation and Energy Harvesting, *Appl. Phys. Lett.*, 111(25), 251903.

**Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y., Yang, Z., Chan, C.T., Sheng, P.** (2000) Locally Resonant Sonic

Materials, *Science*, 289(5485), pp.1734~1736.

**Lu, Y., Yang, Y., Guest, J. K., Srivastava, A.** (2017) 3-D Phononic Crystals with Ultra-Wide Band Gaps, *Sci. Rep.*, 7, 43407.

**Phani, A.S., Woodhouse, J., Fleck, N.** (2006) Wave Propagation in Two-Dimensional Periodic Lattices, *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(4), pp.1995~2005.

**Seyranian, A.P., Lund, E., Olhoff, N.** (1994) Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems, *Struct. Optim.*, 8(4), pp.207~227.

**Sigmund, O., Jensen, J.S.** (2003) Systematic Design of Phononic Band-Gap Materials and Structures by Topology Optimization, *Philos. Trans. R. Soc. A: Math. Phys. & Eng. Sci.*, 361(1806), pp.1001~1019.

**Simo, J.C., Vu-Quoc, L.** (1986) A Three-Dimensional Finite-Strain Rod Model, Part II: Computational Aspects, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 58(1), pp.79~116.

**Thomson, W.** (1887) On the Division of Space with Minimum Partitional Area, *The London, Edinb. & Dublin Philos. Mag. & J. Sci.*, 24(151), pp.503~514.

**Trainiti, G., Rimoli, J.J., Ruzzene, M.** (2016) Wave Propagation in Undulated Structural Lattices, *Int. J. Solids & Struct.*, 97-98, pp.431~444.

**Wang, P., Casadei, F., Kang, S.H., Bertoldi, K.** (2015) Locally Resonant Band Gaps in Periodic Beam Lattices by Tuning Connectivity, *Phys. Rev. B*, 91(2), 020103.

**Weaire, D., Phelan, R.** (1994) A Counter-Example to Kelvin's Conjecture on Minimal Surfaces, *Philos. Mag. Lett.*, 69(2), pp.107~110.

요 지

밴드갭은 기계적 파동의 전파가 금지되는 특정 주파수 범위를 의미한다. 본 연구는 경사도 기반의 설계 최적화 방법을 사용하여 낮은 가칭 주파수 범위에서 밴드갭을 갖는 3차원 켈빈 격자를 설계하는 것을 목적으로 하고 있다. 블로흐 이론을 이용하여 무한주기 격자에서의 탄성과 전파를 해석하고, 기하학적으로 엄밀한 빔 이론에서 선형화를 통해 얻은 진단 변형 가능한 빔 모델을 사용하여 격자 구조 연결선을 모델링하였다. 주어진 격자 구성에서 중립 축 및 단면 두께를 B-spline 함수를 이용한 아이소-지오메트릭 매개화를 통해 설계 변수로 정의하고, 격자 구조의 밴드갭의 크기를 극대화하는 최적 설계를 수행하였다.

**핵심용어** : 파동 전파, 밴드갭, 블로흐 이론, 켈빈 격자, 아이소-지오메트릭 해석, 최적 설계