

Birefringence Analysis of a Uniaxially Anisotropic Substrate Based on the Trajectory of the Transmission Ellipsometric Pseudoconstant in Polar Coordinates

Sung Mo Yang and Sang Youl Kim[†]

Department of Physics, Ajou University, 206, Worldcup-ro, Yeongtong-gu, Suwon 16499, Korea

(Received May 16, 2019; Revised June 19, 2019; Accepted June 21, 2019)

The trajectory of the transmission ellipsometric pseudoconstant $\rho = \tan\psi_{\mu} e^{i\Delta_{\mu}}$ of a uniaxially anisotropic substrate like PET forms a circle in polar coordinates, as the phase-retardation angle is varied at a fixed azimuthal angle. The radius as well as the center's position of this circle are functions of the azimuthal angle only. This circle passes through the point (1,0), and the center of this circle is located on the real axis. These characteristics of the circle are examined analytically, and are utilized to derive simple expressions for the azimuthal angle and the phase-retardation angle of the uniaxially anisotropic substrate using the measured transmission ellipsometric constant. Finally, we confirm that the derived expressions are well applied to the analysis of the optical anisotropy of a PET film.

Keywords: Transmission ellipsometric pseudoconstants, Birefringence, Uniaxial anisotropy, Equi-azimuthal curves
OCIS codes: (260.1440) Birefringence; (160.1190) Anisotropic optical materials; (120.2130) Ellipsometry and polarimetry

유사 투과타원상수의 극좌표상 자취에 기반한 단축 이방성 기층의 복굴절 해석

양성모 · 김상열[†]

아주대학교 물리학과

Ⓞ 16499 경기도 수원시 영통구 월드컵로 206

(2019년 5월 16일 받음, 2019년 6월 19일 수정본 받음, 2019년 6월 21일 게재 확정)

PET와 같은 단축 이방성 기층의 유사 투과타원상수 $\rho = \tan\psi_{\mu} e^{i\Delta_{\mu}}$ 는 광축의 방위각이 고정되어 있을 때 위상지연각이 변함에 따라 극좌표계에서 원을 그린다. 이 원의 반지름과 중심의 좌표는 광축의 방위각에 의해 결정되지만 항상 좌표점 (1,0)을 지나며 원의 중심은 실수축 상에 있다. 단축 이방성 기층의 유사 투과타원상수가 극좌표에서 그리는 자취의 이러한 특성들을 해석적으로 확인하고 이 특성들을 이용하여 측정된 투과타원상수로부터 단축 이방성 기층의 광축의 방위각과 위상지연각을 결정하는 간단한 표현들을 제시하고 실제 PET 시료의 이방성 분석에 잘 적용됨을 보였다.

Keywords: 유사 투과타원상수, 복굴절, 단축 이방성, 등방위각 곡선
OCIS codes: (260.1440) Birefringence; (160.1190) Anisotropic optical materials; (120.2130) Ellipsometry and polarimetry

I. 서 론

위상차 필름은 투과광의 편광상태를 변화시키기 위하여 디스플레이 산업에서 종종 사용된다¹⁻⁴. 이 위상차 필름의 편광작용을 결정하는 광축의 방위각과 위상지연각을 정밀하게 측정하는 대표적인 방법으로 투과타원법을 들 수 있다⁵⁻⁸. 투과타원법은 시료에 의한 투과광의 편광상태 변화를 측정 분석함으로써 시료의 위상지연각과 광축을 결정하는데 위상지연각과 광축방위각 결정의 정밀도를 향상시키기 위해서

상대위상이 최대가 나오는 시료의 방위각을 찾는 과정이 필요하다⁶. 측정되는 투과타원상수는 위상차 필름의 방위각이나 입사하는 빛의 편광상태에 따라 달라지므로 유사 투과타원상수라고 부를 수 있는데 이 유사 투과타원상수로부터 광축의 방위각과 위상지연각을 결정하는 데에는 컴퓨터를 사용한 수치해석적인 방법을 사용하고 있다^{7,8}. 더불어, 물리 행렬 타원법을 이용한 유연기판의 면방향 복굴절과 두께방향 복굴절을 결정하는 방법도 소개되었다⁹. 물리 행렬 타원법은 시료의 편광지움 효과까지 측정할 수 있지만, 측정 데

[†]E-mail: sykim@ajou.ac.kr, ORCID: 0000-0001-5126-8291

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

이로부터 시료의 정보를 얻기 위해 매우 복잡한 분석과정이 필요하다.

한편 타원상수 ρ 는 복소수로 정의되며 편광의 진폭과 위상 정보를 모두 포함하는데 본 연구에서는 단축 이방성 기층의 위상지연각을 변화시키며 투과광의 유사타원상수가 극좌표계에서 그리는 자취를 해석하여 광축의 방위각과 위상지연각을 결정하는 편리한 방법을 제시하고자 한다. 투과광의 유사타원상수는 극좌표에서 원을 그리는데 원의 중심은 실수축 상에 있으며 (1,0)을 지나며 중심의 좌표와 반지름은 광축의 방위각만에 의해 결정된다. 이같이 투과광 유사타원상수를 극좌표에 그리면 단축 이방성 필름이 변화시키는 편광의 진폭과 위상에 대한 정보를 직관적으로 확인할 수 있으므로 이러한 특성들을 이용하여 위상차 필름의 광축의 방향과 위상지연각을 구하는 간단한 표현들을 제시하고자 한다.

II. 유사 투과타원상수의 등방위각 곡선

능동 편광소자와 시료가 편광자-시료-검광자(polarizer-sample-analyzer)와 같은 배치를 가지는 PSA 구조를 가진 회전 검광자형 타원계에서 편광자의 방위각이 P 일 때 위상지연각이 δ 이고 광축의 방위각이 θ 인 단축이방성 기층을 통과한 빛의 편광상태는 다음과 같이 존스 벡터를 사용하여 나타낼 수 있다^[10].

$$\begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix} = \vec{R}(-\theta) \cdot \vec{T}_s \cdot \vec{R}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos P \\ \sin P \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서 \vec{R} 은 회전형렬, $\vec{T}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}$ 는 시료의 존스행렬을 각각 가리킨다. 광축의 방위각 효과를 포함한 시료의 작용을 유사 투과타원상수 ψ_μ 와 Δ_μ 를 사용하여 나타내면 아래 식과 같다.

$$\begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\psi_\mu e^{i\Delta_\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos P \\ \sin P \end{pmatrix} \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)를 비교하면 광축의 방위각과 위상지연각을 사용하여 이 유사 투과타원상수의 구체적인 표현을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tan\psi_\mu e^{i\Delta_\mu} = \tan P \frac{(1 + \tan\theta) - \tan\theta(1 - \tan\theta)e^{-i\delta}}{\tan\theta(1 + \tan\theta) + (1 - \tan\theta)e^{i\delta}} \quad (3)$$

식 (3)을 역방계산하면 측정된 유사 타원상수값으로부터 광축의 방위각과 위상지연각을 구할 수 있는데 컴퓨터를 사용한 수치해석적인 역방계산 방법이 적용될 수 있으나 여기서는 극좌표에서 타원상수가 그리는 자취를 분석하여 광축 방위각의 간단한 수식표현과 위상지연각을 얻는 해석적인 방법을 알아보자. 먼저 $|e^{-i\delta}| = 1$ 임을 이용하면 다음과 같은

등방위각 곡선의 표현을 구할 수 있다.

$$1 = \left(\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \right)^2 \left(\frac{1 - 2r \cos\Delta_\mu \tan\theta + r^2 \tan^2\theta}{r^2 + 2r \cos\Delta_\mu \tan\theta + \tan^2\theta} \right) \quad (4)$$

위 식에서 r 은 다음과 같이 정의되었다.

$$r = \tan\psi_\mu / \tan P \quad (5)$$

약간의 계산과정을 거치면 식 (4)로부터 다음과 같은 극좌표상에서 원의 표준형을 유도할 수 있다.

$$r^2 - 2r \frac{\cos\Delta_\mu}{1 - \cot 2\theta} - \frac{1 + \tan 2\theta}{1 - \tan 2\theta} = 0 \quad (6)$$

한편 $re^{i\Delta_\mu}$ 와 같은 극좌표 표현을 사용하면 중심의 위치가 (r_0, ϕ_0) , 반지름이 R 인 원의 자취는 아래와 같다.

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\Delta_\mu - \phi_0) - (R^2 - r_0^2) = 0 \quad (7)$$

따라서 식 (6)과 식 (7)을 비교하여

$$\phi_0 = 0 \text{ or } \pi \quad (8a)$$

$$r_0 = \frac{\cos\phi_0}{1 - \cot 2\theta} \quad (8b)$$

$$R = \left| \frac{1}{1 - \tan 2\theta} \right| \quad (8c)$$

을 구한다. 여기서 식 (8a)는 원의 중심이 x축 상에 있음을 나타내며 $\phi_0 = \pi$ 이면 이 원의 중심은 점 (1,0)의 좌측에 $\phi_0 = 0$ 이면 점 (1,0)의 우측에 있게 된다. 한편 식 (7)은 $r = 1, \Delta_\mu = 0$ 을 만족한다. 이는 모든 등방위각 곡선이 점 (1,0)을 지남을 의미한다.

그림 1과 그림 2는 각각 방위각에 따른 $1/(1 - \cot 2\theta)$ 과 $1/(1 - \tan 2\theta)$ 의 그래프들을 보여준다. 이 그래프들과 식 (8b), 식 (8c)를 분석하여 다음과 같은 사실들을 확인할 수 있다.

1) $\theta \rightarrow \theta + \pi/2$ 로 바뀌어도 r_0, R 의 표현은 동일하다. 즉 원들은 θ 에 대해 $\pi/2$ 의 주기성을 가진다.

2) $0 < \theta < \pi/8$ 일 경우 $\frac{1}{1 - \cot 2\theta} < 0, \frac{1}{1 - \tan 2\theta} > 0$ 이므로

$$\phi_0 = \pi \quad (9a)$$

$$r_0 = -\frac{1}{1 - \cot 2\theta} \quad (9b)$$

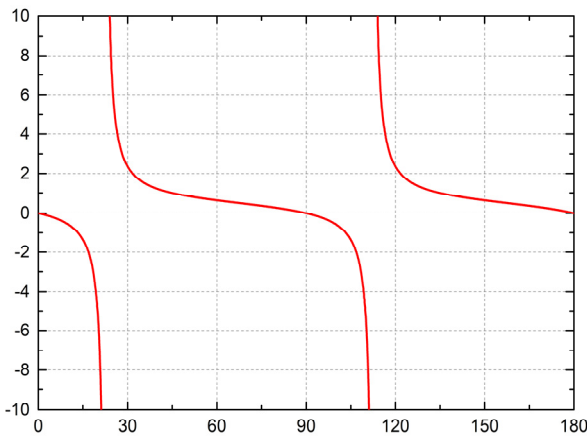


Fig. 1. Graph of $1/(1-\cot 2\theta)$ vs θ .

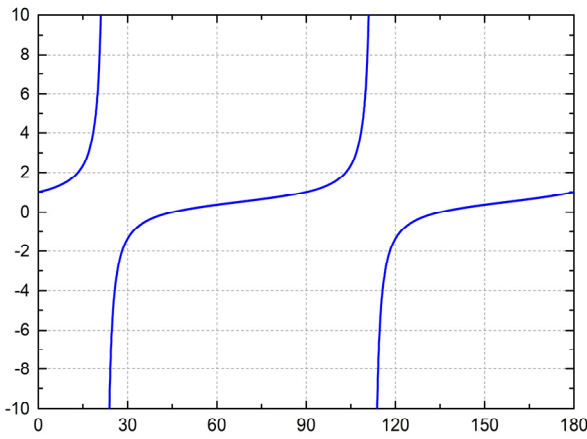


Fig. 2. Graph of $1/(1-\tan 2\theta)$ vs θ .

$$R = \frac{1}{1-\tan 2\theta} \tag{9c}$$

$$R = r_0 + 1 \tag{9d}$$

이고, $\pi/8 < \theta < \pi/4$ 일 경우 $\frac{1}{1-\cot 2\theta} > 1$, $\frac{1}{1-\tan 2\theta} < 0$ 이므로

$$\phi_0 = 0 \tag{10a}$$

$$r_0 = \frac{1}{1-\cot 2\theta} \tag{10b}$$

$$R = -\frac{1}{1-\tan 2\theta} \tag{10c}$$

$$R = r_0 - 1 \tag{10d}$$

이며, $\pi/4 < \theta < \pi/2$ 일 경우

$$0 < \frac{1}{1-\cot 2\theta} < 1, \quad 0 < \frac{1}{1-\tan 2\theta} < 1 \text{ 이므로}$$

$$\phi_0 = 0 \tag{11a}$$

$$r_0 = \frac{1}{1-\cot 2\theta} \tag{11b}$$

$$R = \frac{1}{1-\tan 2\theta} \tag{11c}$$

$$R = 1 - r_0 \tag{11d}$$

와 같은 관계들을 각각 만족한다.

이제 이같은 등방위각 곡선의 특성을 이용하여 타원상수 측정값으로부터 단축이방성 시료의 광축의 방위각 θ 와 위상 지연각 δ 을 구하는 방법을 알아보자. 먼저 중심의 위치가 (r_0, ϕ_0) , 반지름이 R 인 원이 $\phi_0 = 0$ or π 인 조건을 만족하면 그 자취의 극좌표 표현인 식 (7)에 더하여 아래와 같은 관계식이 만족함을 알 수 있다.

$$R^2 = (r_0 - \cos \phi_0)^2 = r^2 - r_0^2 - 2rr_0 \cos(\Delta_\mu - \phi_0) \tag{12}$$

식 (12)로부터 아래 식들과 같이 r_0 와 R 을 순차적으로 결정할 수 있다.

$$r_0 = \frac{\cos \phi_0}{2} \left(\frac{1-r^2}{1-r \cos \Delta_\mu} \right) \tag{13a}$$

$$R = \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2rr_0 \cos(\Delta_\mu - \phi_0)} \tag{13b}$$

r_0 는 양수이므로 식 (13a)에서 $(1-r)(1-r \cos \Delta_\mu) > 0$ 이면 $\phi_0 = 0$ (원의 중심은 점 (1,0)의 우측에 있음), $(1-r)(1-r \cos \Delta_\mu) < 0$ 이면 $\phi_0 = \pi$ (원의 중심은 점 (1,0)의 좌측에 있음)이 된다. 한편 θ 에 관한 r_0 와 R 의 표현들은 식 (9)~(11)에 있는데 이들을 간단히 요약하면 다음과 같다.

$0 < \theta < \pi/8$ 이면 원의 중심은 점 (1,0)의 좌측에 있고 $\phi_0 = \pi$ 이므로

$$r_0 = -\frac{1}{1-\cot 2\theta} \tag{9b'}$$

$$R = r_0 + 1 \tag{9d'}$$

와 같으며 $\pi/8 < \theta < \pi/2$ 이면 원의 중심은 점 (1,0) 우측에 있고 $\phi_0 = 0$ 이므로 아래 식들과 같다.

$$r_0 = \frac{1}{1 - \cot 2\theta} \tag{10b'}$$

$$R = |r_0 - 1| \tag{14}$$

측정된 타원상수들을 식 (13a)에 대입하여 r_0 를 구하고 이를 식 (8b)나 식 (9b') 또는 식 (10b')에 대입하여 광축의 방위각 θ 를 구하려면 ϕ_0 가 0인지 π 인지를 먼저 파악해야 한다. 타원상수 측정값을 사용하여 ϕ_0 가 0인지 π 인지를 파악하고 r_0 와 θ 를 계산하는 방법은 아래와 같다.

$r < 1$ 인 경우 $\frac{1-r^2}{1-r\cos\Delta_\mu} > 0$ 이다. 따라서 식 (13b)에서 $\phi_0 = 0$ 이고 $R = 1 - r_0$ 이며(그림 3 참조) 방위각은 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ 의 범위를 가진다. 따라서 식 (13b)와 식 (11b)로부터 다음과 같은 표현들을 얻는다.

$$r_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-r^2}{1-r\cos\Delta_\mu} \right) \tag{15a}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(1 - \frac{1}{r_0} \right) \tag{15b}$$

$r > 1$ 인 경우는 두 경우로 나누어 분석한다. 먼저 $1 < r\cos\Delta_\mu$ 인 경우는 $\frac{1-r^2}{1-r\cos\Delta_\mu} > 0$ 이므로 $\phi_0 = 0$ 이고 $R = r_0 - 1$ 이며(그림 4 참조) 방위각은 $\pi/8 < \theta < \pi/4$ 의 범위를 가진다. r_0, θ 의 표현은 식 (15a), 식 (15b)와 같다. 그 다음으로 $r > 1$ 이며 $1 > r\cos\Delta_\mu$ 인 경우는 $\frac{1-r^2}{1-r\cos\Delta_\mu} < 0$ 이

므로 $\phi_0 = \pi$ 이고 $R = r_0 + 1$ 이며(그림 5 참조) 방위각은 $0 < \theta < \pi/8$ 의 범위를 가진다. 따라서 이때에는 식 (13a)와 식 (9b)로부터 다음과 같은 r_0, θ 의 표현을 얻는다.

$$r_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1-r^2}{1-r\cos\Delta_\mu} \right) \tag{16a}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(1 + \frac{1}{r_0} \right) \tag{16b}$$

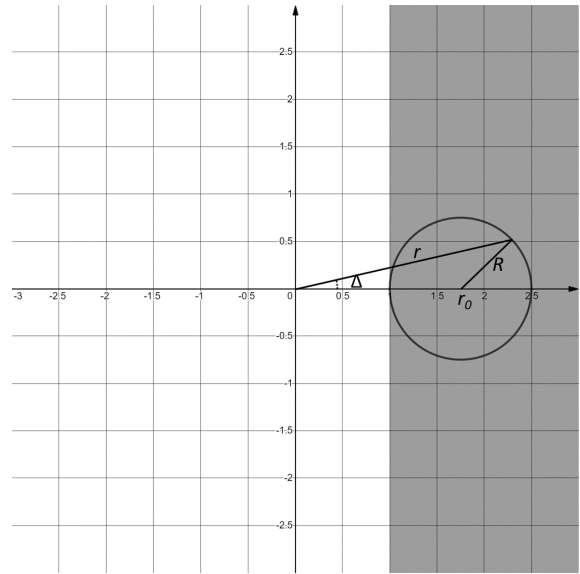


Fig. 4. Ellipsometric pseudoconstant in polar coordinates when $\tan\psi_\mu \cos\Delta_\mu > \tan P$, and a representative circle.

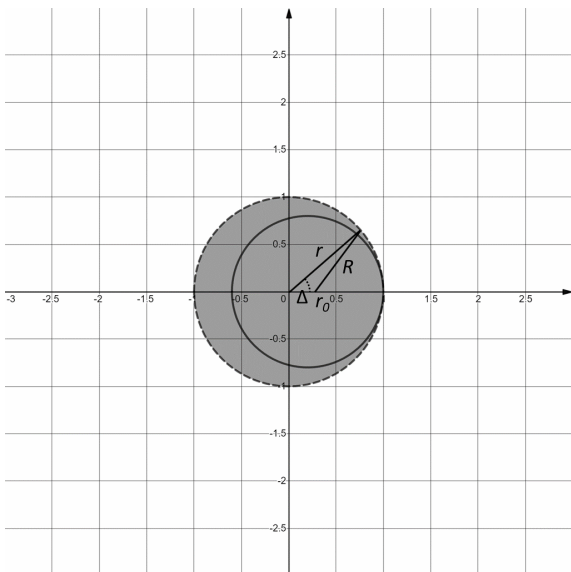


Fig. 3. Ellipsometric pseudoconstant in polar coordinates when $\tan\psi_\mu < \tan P$, and a representative circle.

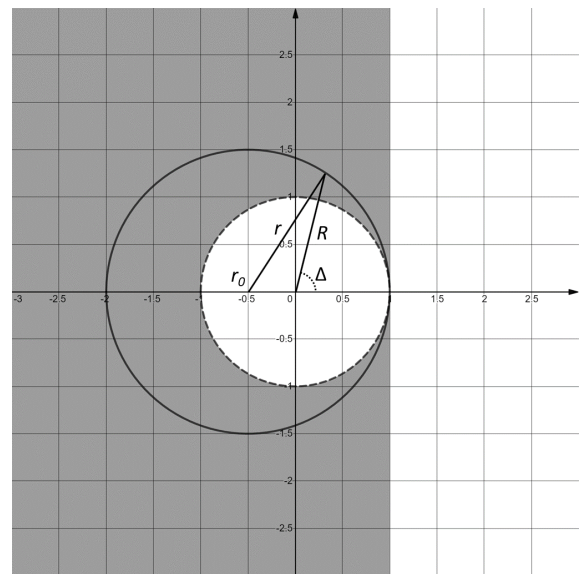


Fig. 5. Ellipsometric pseudoconstant in polar coordinates when $\tan\psi_\mu \cos\Delta_\mu < \tan P$ and $\tan\psi_\mu > \tan P$, and a representative circle.

식 (15), (16)을 종합하면 모든 타원상수 측정값에 대해 광축의 방위각은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(\frac{1 - 2r \cos \Delta_\mu + r^2}{1 - r^2} \right) \quad (17)$$

마지막으로 식 (17)과 같이 구한 θ 와 $\rho = \frac{\tan \psi_\mu}{\tan P} e^{i\Delta_\mu}$ 를 식 (3)에 대입하고 정리하여 아래 식과 같은 위상지연각 δ 의 표현을 얻는다.

$$\delta = -\arg \left[\frac{(1 - \tan \theta)(1 - \rho \tan \theta)}{(1 - \tan \theta)(\rho + \tan \theta)} \right] \quad (18)$$

참고로 회전 편광자형 타원계를 사용하는 경우에는 식 (5)의 표현에서 편광자의 방위각 P 를 검광자의 방위각 A 로 치환하면 되며 이들 방위각이 45° 인 경우에는 $\tan P = 1$ 또는 $\tan A = 1$ 이 되어 식 (5)의 표현이 $r = \tan \psi_\mu$ 와 같이 단순해진다.

III. PET 기층의 단축이방성 측정 및 분석

단축 연신공정에 따라 제조된 PET (polyethylene terephthalate, KEL86W, Teijin-DuPont, $t = 50 \mu\text{m}$) 필름의 분광 투과타원상수를 측정하고 그 자취를 분석하였다. PET와 같이 고분자 사슬구조를 가진 필름은 연신조건에 따라 사슬이 강하게 배향될 수 있고 배향정도에 비례하여 큰 구조적 이방성을 가지는데^[7-9, 11] 고분자는 사슬 방향으로 큰 분극을 가지고 있기 때문에 연신 후의 PET 필름은 큰 복굴절을 보인다. 이 복굴절은 대개 파장이 커짐에 따라 그 크기가 감소하는 정상분산의 특성을 가지고 있다. 측정된 분광 투과타원상수들도 파장에 따라 변하는 위상지연각을 가지며 극좌표상에서 표시한 투과 타원상수 측정값 $\rho = \tan \psi_\mu e^{i\Delta_\mu}$ 는 극좌표계에서 원의 자취를 그릴 것으로 예상된다.

시료 준비는 다음과 같이 하였다. 선행연구에서 제시한 방법^[7]에 따라 PET 필름의 광축 방향을 확인한 후 시료의 옆면이 광축과 나란하도록 $40 \times 40 \text{ mm}^2$ 의 크기로 PET 필름을 재단하였다. 투과타원상수 측정에 사용한 분광타원계(Elli-SE-UV, Ellipso Technology)는 회전편광자 방식으로 입사각은 0° 으로, 검광자의 방위각은 45° 로 고정했다. 이 분광타원계는 1.2~6.0 eV의 영역에 걸쳐 투과 분광타원상수를 측정할 수 있게 한다. 시료는 자동화된 회전 스테이지에 장착하여 시료의 방위각과 광축의 방위각이 일치하도록 하였다. 그리고 자동화된 회전 스테이지를 이용해서 0° 부터 90° 까지 15° 간격으로 시료의 방위각을 변화시키며 유사타원상수 α_μ, β_μ 를 측정하였다. 측정된 유사타원상수 α_μ, β_μ 는 아래 식 (19)를 이용해서 유사타원상수 Δ_μ, ψ_μ 로 변환하였다. 식 (19)에서 A 는 회전편광자 방식의 분광타원계의 검광자 방위각이다.

$$\tan \psi_\mu = \tan A \sqrt{\frac{1 + \alpha_\mu}{1 - \alpha_\mu}} \quad (19)$$

$$\cos \Delta_\mu = \frac{\beta_\mu}{\sqrt{1 - \alpha_\mu^2}}$$

그림 6은 PET 필름의 투명 영역인 1.2~3.8 eV에서 얻은 PET 시료의 타원상수 측정값들을 시료 방위각별로 극좌표계에 표시한 그림이다. 시료의 방위각은 0° 부터 90° 까지 15° 간격으로 변화시켰는데 시료의 방위각이 45° 인 경우에는 모든 유사타원상수가 $\Delta_\mu = 0^\circ, \psi_\mu = 45^\circ$ 로 측정되어 (1,0)인 점에 모인다. 또한 시료의 방위각이 90° 인 경우는 시료의 방위각이 0° 인 경우와 극좌표 상에서 동일한 데이터가 얻어지므로 번거로움을 피하기 위해 그림 6에 포함시키지 않았다. 시료 방위각이 45° 인 경우를 제외한 모든 시료 방위각에서 측정된 유연기판의 유사타원상수 ρ 가 극좌표계에서 원을 이루며 각 원의 중심은 실수축 상에 있고 점 (1,0)을 지남을 확인

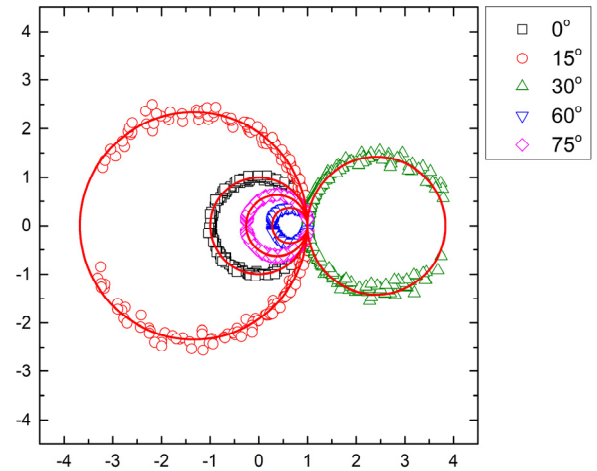


Fig. 6. Measured transmission ellipsometric spectra (open symbols) of a PET film in polar coordinates at a few selected azimuthal angles with the best fit calculated spectra (solid lines).

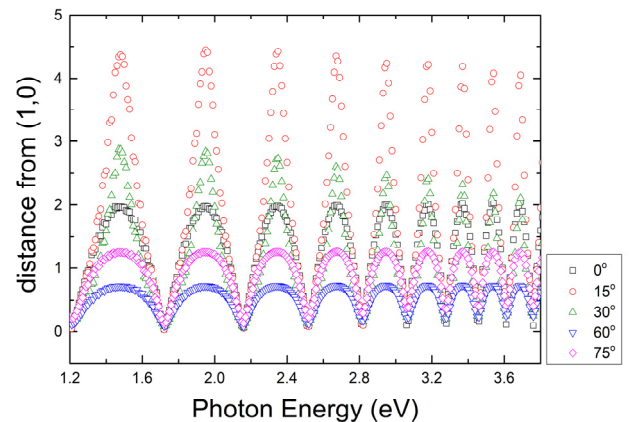


Fig. 7. Distance of the measured ellipsometric pseudoconstant ρ from the point (1,0) in polar coordinates.

할 수 있다.

유사타원상수 측정값으로부터 광축의 방위각은 식 (17)에 따라 구할 수 있는데 $r=1$, $\Delta_\mu=0$ 근방에서는 식 (17)의 우측항이 부정형이 되어 측정값의 미세한 오차가 θ 결정에서의 큰 오차를 유발한다. 이는 모든 원이 (1,0)인 점을 지나가기에 (1,0) 근방의 타원상수 측정값을 지나가는 원을 특정하기 매우 어려운 것과 상통한다. 그림 7은 극좌표 상에서 점 (1,0)과 유사타원상수 측정값 간의 거리를 나타낸 그림이다. 이 거리가 0에 가까울수록 광축 방위각의 오차가 커지며 이에 비례하여 위상지연각의 오차 또한 커지므로 이 영역에서의 데이터를 분석할 때에는 세심한 주의가 필요하다. 본 연구에서는 다음과 같이 가중치를 곱한 방위각의 평균을 사용함으로써 점 (1,0) 근방에서의 데이터를 분석할 때 동반되는 오차를 최대한 축소시켰다.

광축의 방위각을 나타내는 표현인 식 (17)은 원의 중심좌표 r_0 로부터 구해지는데 유사타원상수 ρ 의 자취는 항상 (1,0)을 지나가는 점을 이용하여 측정된 유사타원상수 ρ 에 최적맞춤된 원과 그 중심좌표를 구하여 광축의 방위각을 결정하고자 한다. 먼저 측정된 k 번째 타원상수의 xy 직교좌표값들은 각각 다음과 같다.

$$x_{k,exp} = \text{Re}(\rho_k) = \frac{\tan\psi_{\mu,k}}{\tan P} \cos\Delta_{\mu,k} \quad (20a)$$

$$y_{k,exp} = \text{Im}(\rho_k) = \frac{\tan\psi_{\mu,k}}{\tan P} \sin\Delta_{\mu,k} \quad (20b)$$

또한 아래와 같이 각도 ϕ_k 와 계산된 타원상수의 직교좌표 값 $x_{k,cal}$, $y_{k,cal}$ 그리고 편차 d_k 들을 정의한다.

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{y_{k,exp}}{x_{k,exp} - r_0}\right) \quad (21)$$

$$x_{k,cal} = r_0 + |r_0 - 1| \cos\phi_k \quad (22a)$$

$$y_{k,cal} = |r_0 - 1| \sin\phi_k \quad (22b)$$

$$d_k = \sqrt{(x_{k,exp} - x_{k,cal})^2 + (y_{k,exp} - y_{k,cal})^2} \quad (22c)$$

이 때 중심좌표 r_0 는 레벤버그-마퀴트(Levenberg-Marquardt algorithm, LMA)의 선형회귀분석법을 적용하여 아래 식 (23)의 오차함수 $err(r_0)$ 를 최소화하는 과정을 통해 구하였다. 최적맞춤 원들(실선)은 측정값들(표식)과 직접 비교할 수 있도록 그림 6에 실선으로 나타내었는데 그림에서 두 원들이 잘 포개지는 것을 확인할 수 있다. 앞에서 논의한 바와 같이 광축의 방위각이 입사 편광과 일치하는 경우를 포함하여 $\rho=1$ 근방에서는 광축방위각의 오차가 커지며 이 광축방위각을 사용하여 식 (18)에 따라 구하는 상대위상각의 오차도

비례하여 커지게 되는데 본 연구에서는 가중치를 가한 평균을 취함으로써 광축의 방위각을 정확하게 결정할 수 있었다. 식 (23)의 w_k 는 식 (24)와 같이 표현되는 가중치로서 측정된 타원상수와 좌표 (1,0)간의 직선거리를 나타낸다(그림 7).

$$err(r_0) = \frac{\sum_k w_k d_k}{\sum_k w_k} \quad (23)$$

$$w_k = \sqrt{(w_{k,exp} - 1)^2 + y_{k,exp}^2} \quad (24)$$

그림 8은 그림 6에 제시된 5개의 시료 방위각 각각에 대하여 식 (18)에 따라 계산한 위상지연각 분산들이 시료의 방위각에 상관없이 동일함을 보여준다. 그림 8에서 주목할 사항은 위상지연각의 변동폭이 360° 를 크게 상회하여 위상지연각이 파장의 정수배에 따른 360° 의 주기를 가지므로 절대 위상지연각을 얻기 위해서는 이 주기성에 대한 적절한 보정이 필요하다는 점이다.

그림 8의 위상지연각 분산을 아래와 같이 절대 위상지연각 분산으로 변환하였다. 식 (25)는 이방성 시료에 의한 위상지연각의 정의를 보여주는데 δ_{abs} , λ , Δn 그리고 d 는 각각 절대 위상지연각, 빛의 파장, 이방성 시료의 복굴절 그리고 시료의 두께를 나타낸다. 이 위상지연각은 복굴절의 분산이 없더라도 파장에 반비례하므로 파장의 역수인 빛의 에너지에 비례하여 증가한다. 그림 8에서도 이같은 위상지연각의 빛에너지 의존성을 보여주는데 위상지연각이 180° 에서 -180° 로 불연속적으로 변하는 각각의 위치에서 360° 씩 위상각을 인위적으로 더해지면 연속적인 상대 위상지연각 δ_{rel} 의 그래프를 얻을 수 있다.

$$\delta_{abs} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d \quad (25)$$

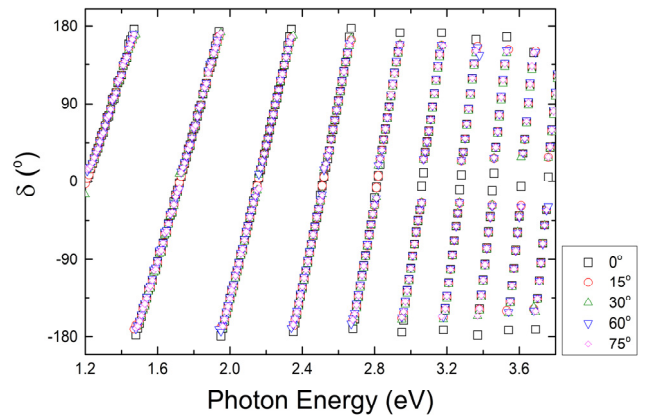


Fig. 8. Calculated phase retardation angles using the measured ellipsometric pseudoconstant show a well-defined normal dispersion. The retardation angles from 5 different sample azimuthal angles overlap each other very well.

한편, 이 상대위상지연각 δ_{rel} 도 식 (25)의 절대 위상지연각 δ_{abs} 과 360° 의 정수배만큼 차이가 날 수 있으므로 아래 식들과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta_{abs} = \delta_{rel} + 360^\circ \quad (26)$$

또는

$$\Delta n = (\delta_{rel} + 360^\circ N) \frac{\lambda}{2\pi d} \quad (27)$$

여기서 N 은 자연수이다. 일반적으로 유연 기판의 복굴절 Δn 은 정상분산을 가진다. 본 실험에 사용된 PET 필름도 정상 형태의 복굴절 분산을 가지는 것으로 보고된 바 있다^[7,10].

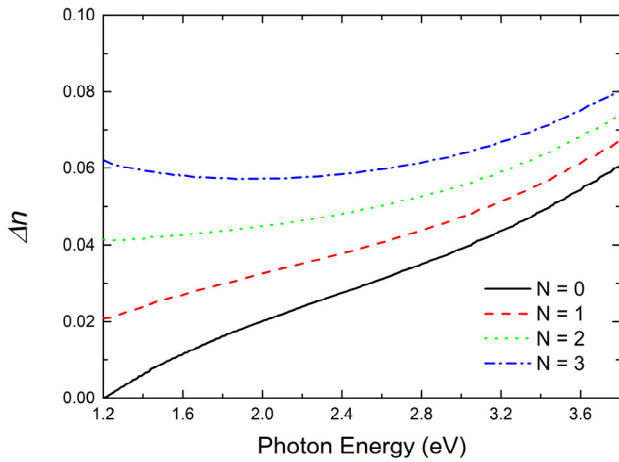


Fig. 9. Variation of the birefringence dispersion Δn as the order N in Eq. (26) is increased from 0 to 3.

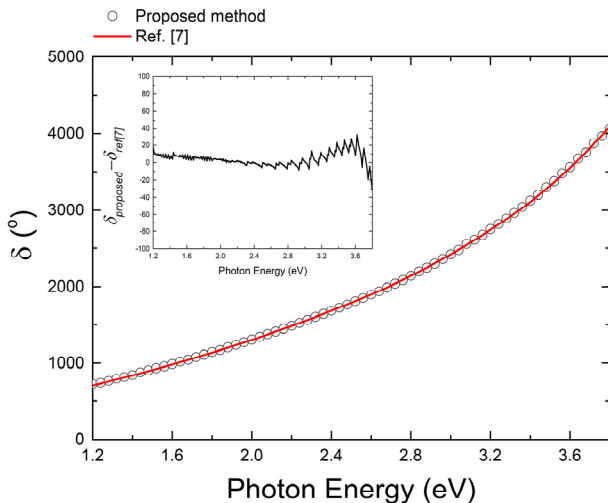


Fig. 10. Dispersion of the absolute phase retardation of the PET film analyzed in this research (open circles) matches perfectly with the previously obtained one (line) using the conventional transmission spectroscopic ellipsometry.

그림 9는 차수 N 을 증가시키며 계산한 복굴절 Δn 의 분산곡선들이다. 그림 9로부터 복굴절 Δn 은 $N=2$ 일 때 정상분산에 가장 가까운 모양을 가지는 것을 알 수 있다. 참고로 그림 9에서 $N=0$ 에 해당하는 곡선은 상대 위상지연각 δ_{rel} 에 대응되는 복굴절 분산곡선이다.

마지막으로 그림 10은 이같이 결정한 절대 위상지연각의 분산곡선(표식)을 선행 연구에서 제시한 방법^[7]을 이용해서 결정한 위상지연각(실선)과 함께 그린 그래프이고 이 그림 내의 작은 그래프는 두 위상지연각의 차이를 그린 그래프이다. 이 두 그래프가 정확하게 일치하는 것으로부터 본 연구에서 제시하는 광축 방위각과 위상지연각 계산 방법이 유효함을 확인할 수 있다.

IV. 결 론

광축의 방위각이 고정되어 있을 때 단축 이방성 기층 시료의 위상지연각이 변함에 따라 극좌표계에서 유사 투과 타원상수 $\rho = \frac{\tan \psi_\mu}{\tan P} e^{i\Delta n}$ 가 그리는 자취가 원이 되며 이 원의 반지름과 중심 좌표는 방위각만의 함수임을 해석적으로 증명하였다. 중심은 실수축 상에 있고 항상 점 (1,0)을 지나는 이 원들이 극좌표계에서 그리는 특성들을 이용하여 측정된 유사 투과 타원상수로부터 단축 이방성 기층의 광축의 방위각과 위상지연각을 결정하는 간단한 수학적 표현들을 제시하였다. 실제 PET 시료의 분광 타원상수 측정값이 예측되는 원의 자취를 이루는 것을 확인하였고 실제 측정값으로부터 광축의 방위각과 위상지연각을 결정할 때 오차가 크게 전파되는 조건과 이를 최소화하는 방법도 제시하였다. 위상지연각이 가지는 360° 주기성을 보정하여 구한 절대 위상지연각 분산곡선이 기존의 결과와 잘 일치함을 보였다. 극좌표계에서 유사 투과 타원상수 ρ 를 그리면 투과광의 진폭과 위상이 동시에 표현되므로 단축 이방성 기판의 광축의 방위각과 위상지연각을 직관적으로 해석할 수 있다. 본 연구결과는 투과 타원상수로부터 단축 이방성 필름의 복굴절을 결정하는데 유용하게 사용될 것으로 예상된다.

감사의 글

본 연구는 한국산업기술평가관리원(산업핵심기술개발사업, 과제번호: 10051830)의 지원으로 수행되었습니다.

References

1. Y. Huang, Y. Zhou, and S. T. Wu, "Broadband circular polarizer using stacked chiral polymer films," *Opt. Express* **15**, 6414-6419 (2007).
2. T. Ishinabe, T. Miyashita, and T. Uchida, "Design of a quarter wave plate with wide viewing angle and wide wavelength range for high quality reflective LCDs," in *Proc.*

- SID Symposium Digest of Technical Papers* (UK: Blackwell Publishing Ltd, Oxford, 2001), pp. 906-909.
3. H. Mori, "The wide view (WV) film for enhancing the field of view of LCDs," *J. Disp. Technol.* **1**, 179-186 (2005).
 4. A. Sakai, K. Sakuragi, M. Hasegawa, K. Tsuda, N. Yamada, and K. Okamoto, "Novel wide-view circular polarizers using negative and positive AC plates," in *Proc. SID Symposium Digest of Technical Papers* (UK: Blackwell Publishing Ltd, Oxford, 2009), pp. 402-405.
 5. J. W. Ryu, S. Y. Kim, and Y. K. Kim, "Polarization analysis of composite optical films for viewing angle improvement of liquid crystal display," *Korean J. Opt. Photon.* **20**, 241-248 (2009).
 6. G. H. Lyum, S. U. Park, S. M. Yang, H. K. Yoon, and S. Y. Kim, "Precise measurement of ultra small retardation of rubbed polyimide alignment layer using an improved transmission ellipsometer," *Korean J. Opt. Photon.* **24**, 77-85 (2013).
 7. S. M. Yang, S. Hong, and S. Y. Kim, "Wavelength dependent in-plane birefringence of transparent flexible films determined by using transmission ellipsometry," *Jpn. J. Appl. Phys.* **57**, 05GB03 (2018).
 8. S. M. Yang, S. Hong, and S. Y. Kim, "Optical, mechanical, and photoelastic anisotropy of biaxially stretched polyethylene terephthalate films studied using transmission ellipsometer equipped with strain camera and stress gauge," *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.* **57**, 152-160 (2019).
 9. N. Hong, R. A. Synowicki, and J. N. Hilfiker, "Mueller matrix characterization of flexible plastic substrates," *Appl. Surf. Sci.* **421**, 518-528 (2017).
 10. S. Y. Kim, *Ellipsometry* (Ajou University Press, Gyeonggi, Korea, 2000), Chapter 3.
 11. S.-H. Lee, *Structure and Morphology of Polymers* (Minumsa, Seoul, Korea, 1992), Chapter 5.