한국초등수학교육학회지 23(2) 193-217. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 23*(2) 193-217.
2019. 5. 31 *May 31. 2019.*

단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수 선택에 관한 연구

김정훈[1)] · 정상태[2)] · 노은환[3)] · 김선유[4)]

연구자는 단위비율 결정 맥락 문제에서 식을 세우는 데 어려움을 겪는 한 학생을 발견하였다. 한 학생의 사례와 살펴본 선행연구를 바탕으로 단위비율 결정 맥락 문제에서 학생들이 나눗셈식을 어떻게 표현하는지, 사용하는 피제수와 제수 선택의 방법이 무엇인지, 그러한 방법은 어떻게 알게 된 것인지 등에 대해 자세히 살펴보고자 하였다. 먼저 학생들의 반응을 분석하기 위해 검사 문항을 만들어 연구 대상자에게 투입하였다. 이후 응답자 중 일부를 대상으로 피제수와 제수 선택 방법과 그에 따른 인지적 특징을 확인하기 위한 면담을 진행하였다. 그 결과 피제수와 제수 선택의 어려움이 다수의 문제임을 확인하였다. 또한 면담 대상자 중 일부는 피제수와 제수를 선택하는 나름의 방법이 있음에도 불구하고 왜 그렇게 선택하는지에 대해 설명하는 것에는 어려움이 있다는 것을 확인할 수 있었다. 연구 결과를 바탕으로 단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수를 왜 그렇게 선택하는지, 표현된 식의 의미가 무엇인지에 대해 강조한 지도가 필요하다는 시사점을 얻었으며 그것을 수행하기 위한 지도방안을 제안하였다.

주제어: 나눗셈 상황, 피제수와 제수 선택, 나눗셈식 세우기, 단위비율 결정 맥락

Ⅰ. 서 론

수학적 관점에서 나눗셈은 곱셈의 역연산을 따른다. 교수학적 변환을 거친 지식은 학문적 지식과 차이점이 있을 수 있는데 초등수학에서 다루는 나눗셈 연산도 그러하다. 초등수학에서 나눗셈 연산은 정의역을 적절히 축소함으로써 이항연산으로 다룰 수 있게 되며, 이때 구체적인 상황에 따라 연산을 결정하도록 한다(노은환 외, 2015). 상황에 따라 연산을 결정한다는 것은 제시된 구체적인 상황으로부터 '÷' 연산과 이를 적용할 두 대상을 선택하여 알맞은 나눗셈식으로 나타낸다는 것을 말한다.

나눗셈식으로 표현하기 위해서는 문제 상황을 해석하여 '÷' 연산을 사용한다. 예컨대 '사과 6개가 있습니다. 한 사람이 2개씩 나누어 먹는다면 몇 명이 나누어 먹을 수 있을까요?' 와 같은 문제를 묶음이 몇 개 만들어지는지 구하는 포함제 상황으로 해석하여

1) [제1저자] 양산초등학교, 교사
2) [교신저자] 사천곤명초등학교, 교사
3) 진주교육대학교, 교수
4) 진주교육대학교, 교수

‘÷’ 연산을 선택하게 되는 것이다. ‘÷’ 연산을 결정하는 문제 상황은 포함제, 등분제, 단위비율 결정 맥락, 곱셈의 역연산, 카테시안 곱의 역 상황과 같이 다양하다(Sinicrope et al., 2002).

한편 이항연산을 위해서는 두 대상이 필요한데, 나눗셈에서는 피제수와 제수라는 대상 선택에 따라 식의 의미가 달라지기 때문에 대상 선택에 각별한 주의가 요구된다. 뿐만 아니라 15L인 기름의 무게가 30kg일 때, 1L의 무게를 구하는 식과 1kg의 들이를 구하는 식은 각각 30÷15와 15÷30으로 다르기에 의미에 맞는 대상 선택이 필요하다.

그런데 연구자는 ‘통나무 3.15m의 무게가 $12\frac{2}{5}$kg이라고 합니다. 이 통나무 1m의 무게는 몇 kg입니까?’ 라는 문제에 대해 ‘3.15에서 $12\frac{2}{5}$를 나눠야 해요? $12\frac{2}{5}$에서 3.15를 나눠야 해요?’ 와 같이 질문하는 학생A를 만났다. 무슨 말인지를 확인하기 위한 질문에 학생A는 ‘나누기를 하긴 해야 할 것 같은데... 뭐에서 뭐를 나눠야 할지 모르겠어요.’ 와 같은 반응을 보였다. 이 문제는 단위비율 결정 맥락의 나눗셈 상황과 관련된 것으로 해석할 수 있다. 그런데 학생A는 ‘÷’ 연산을 결정하고도 피제수와 제수 선택에 어려움이 있어 알맞은 나눗셈식을 세우지 못하고 있었다. 연구자는 학생A의 사례와 같이 단위비율 결정 맥락 문제에서 식을 세우는 데 어려움을 겪는 이유가 피제수와 제수라는 대상 선택과 밀접한 관련이 있을 수도 있다는 생각을 갖게 되었다.

나눗셈과 관련된 선행연구들로는 다양한 나눗셈 상황에 관한 연구(임재훈 외, 2005; 임재훈, 2007; 임재훈, 2013; 조용진, 홍갑주, 2013; 강홍규, 2014; 임재훈, 2017), 나눗셈 계산에 관한 연구(김경미, 강완, 2008; 안소현, 최창우, 2016), 나눗셈 연산 의미 이해에 관한 연구(방정숙, 김수정, 2007; 임근광, 2010; 김경미, 황우형, 2011; 김영아 외, 2016), 몫과 나머지에 관한 연구(박교식, 권석일, 2011; 박교식, 권석일, 2012; 정상태, 2016) 등이 있었다. 하지만 나눗셈에 관한 다수의 연구가 수행되었음에도 불구하고, 피제수와 제수 선택에 대해 자세히 다룬 연구는 거의 찾아보기 어려웠다. 이는 학생A의 사례와 같이 대상 선택에서 겪는 어려움에 대해 그동안 간과한 부분이 있었다는 것을 의미한다.

이에 연구자는 단위비율 결정 맥락 문제에서 학생들이 나눗셈식을 어떻게 표현하는지, 사용하는 피제수와 제수 선택의 방법이 무엇인지, 그러한 방법을 어떻게 알게 되었는지에 대해 자세히 조사해 볼 필요가 있다고 생각하게 되었다.

따라서 이 연구에서는 단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수의 선택에 대한 학생들의 반응과 그에 따른 인지적 특징을 분석하여 나눗셈 연산 지도에 관한 교수학적 시사점을 얻고자 한다. 연구 목적을 달성하기 위해 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

연구 문제 1: 초등학생들이 단위비율 결정 맥락 문제를 식으로 표현할 때 피제수와 제수 선택에서 보이는 반응은 어떠한가?

연구 문제 2: 초등학생들이 단위비율 결정 맥락 문제에서 사용하는 피제수와 제수의 선택 방법은 무엇이며 그에 따른 인지적 특징은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 나눗셈에서 피제수와 제수 선택의 중요성

만약 문장제를 식을 세워 해결하고자 한다면 필연적으로 상황을 식으로 표현하는 단계와 표현된 식을 계산하는 단계를 거치게 된다. 상황을 식으로 표현하기 위해서는 그 상황에 맞게 연산을 결정하고 연산을 적용할 두 대상을 선택할 필요가 있는데 나눗셈은 덧셈, 뺄셈, 곱셈과는 달리 대상 선택의 중요성이 강조된다.

덧셈과 뺄셈은 모두 동일한 대상을 다룬다. 예컨대 '사과 6개가 있습니다. 사과 3개를 더 샀다면 모두 몇 개의 사과를 가지고 있나요?' 와 같은 문제에서 피가수와 가수는 모두 사과라는 대상을 의미한다. 이는 뺄셈에서도 마찬가지이다. 반면 곱셈과 나눗셈은 서로 다른 종류의 대상을 다룬다(Reys et al., 2015). 예컨대 '사과 6개가 있습니다. 3개씩 나눈다면 몇 묶음이 되나요?' 와 같은 문제는 6÷3으로 나타낼 수 있는데, 이때 피제수인 6은 사과를 의미하며, 제수인 3은 한 묶음의 크기를 의미한다. 이는 (묶음의 수)×(묶음의 크기)와 같이 나타낼 수 있는 곱셈에서도 마찬가지이다.

덧셈은 피가수와 가수의 순서에 따라 의미는 달라지지만 교환법칙이 성립하기에 그 결과를 구하는 것에 큰 어려움이 없다. 예컨대 '사과 2개가 있습니다. 사과 3개를 더 샀다면 사과는 모두 몇 개일까요?' 라는 상황과 '사과 3개가 있습니다. 사과 2개를 더 샀다면 사과는 모두 몇 개일까요?' 라는 상황이 있다면 이는 각각 2+3과 3+2라는 식으로 나타낼 수 있다. 이때 두 식의 의미는 상황에 따라 다르지만 그 결과가 5로 동일하다는 것이다. 이는 곱셈에서도 마찬가지로 적용된다. 뺄셈은 자연수 범위의 동일한 대상을 다루기에 [큰 수]-[작은 수]와 같은 방법을 사용한다면 피감수와 감수 선택에서 자유로울 수 있다. 하지만 나눗셈에서는 대상 선택에 관한 문제가 상대적으로 더 부각된다. 이는 서로 다른 종류의 대상을 다루면서 교환법칙이 성립하지 않는 데 기인한다. 나눗셈의 경우 피제수와 제수의 선택에 따라 계산 결과와 그 의미가 달라진다. 또한 뺄셈에서 사용한 [큰 수]-[작은 수]라는 방법을 적용하는 데에도 한계가 있다. 예컨대 '3.2L의 물을 8명이서 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 한 사람이 먹을 수 있는 물은 얼마인지 구하시오.' 라는 문제를 해결할 때, 교환법칙을 적용하거나 [큰 수]÷[작은 수]와 같은 방법을 사용한다면 8÷3.2라는 식을 세워 2.5라는 결과를 얻을 수 있다. 하지만 2.5는 1L의 물로 나누어 먹을 수 있는 인원수를 의미한다. 이러한 점에서 나눗셈에서는 상대적으로 대상 선택의 중요성이 부각되는 것이다.

2. 단위비율 결정 맥락의 특징

이 절에서는 단위비율 결정 맥락에 대해 자세히 살펴볼 것이다. 나눗셈 상황에 대한 구분은 학자에 따라 다양한데 자연수 범위의 나눗셈은 포함제와 등분제 상황으로 도입하는 것이 보편적이다. 하지만 수의 범위가 소수와 분수로 확장됨에 따라 나눗셈 상황도 세분화된다. 예컨대 Ma(1999)는 분수의 나눗셈을 측정 모델(포함제), 분할 모델(등분제), 곱과 인수 모델로 구분하였으며, Sinicrope et al.(2002)는 포함제, 등분제, 단위비율 결정 맥락, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 상황으로 세분하기도 하였다.

단위비율 결정 맥락은 불특정한 비율로 주어진 값을 기본 단위에 해당하는 값으로 환산한 양을 구하는 경우를 의미한다(박교식 외, 2004; 김창수 외, 2011). 즉, 조건 속 어떤 대상을 적절하게 줄이거나 늘려 구하고자 하는 값을 찾는 상황을 말한다. 예컨대 '무게가 3.75kg인 철봉의 길이를 재어 보았더니 1.5m이었다. 이 철봉 1m의 무게는 몇 kg인가?' 라는 문제가 있을 때, 1m의 무게를 구하기 위해서는 1.5m에 해당하는 무게인 3.75kg을 1.5배 줄여 구할 수 있다는 것이다. 이는 3.75kg÷1.5[5]라는 식으로 표현할 수 있는데, 이때 피제

수는 줄이거나 늘리는 대상을 의미하며 제수는 줄이거나 늘리는 양을 의미한다. 한편 불특정한 비율로 주어진다는 것은 문제 상황에 따라 들이와 넓이, 길이와 들이, 거리와 시간 등 다룰 수 있는 대상과 그 관계가 다양하다는 것을 뜻한다.

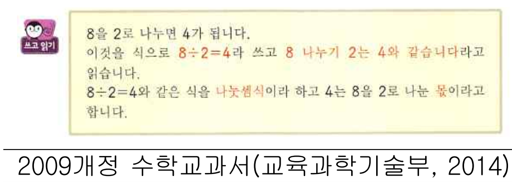
단위 비율 결정 맥락에 관한 선행연구들은 분수의 나눗셈에서 역수의 곱을 구하는 설명에서의 상대적 장점을 부각시켜 논의하였다. 조용진과 홍갑주(2013)은 단위비율 결정 맥락이 몫이 분수가 되는 분수 나눗셈의 경우에도 어색하지 않다는 점, 제수의 역수 의미가 분명하게 된다는 점에서 상대적으로 장점이 있지만 실제 2007개정 교육과정에서는 다루어지고 있지 않다고 지적하였다. 2015개정 교육과정에서는 분수와 소수의 나눗셈에서 단위비율 결정 맥락을 도입하고 있으며, 이는 등분제의 발전이라고 하였다.(교육부, 2018b). 이는 단위비율 결정 맥락이 해석하는 방법에 따라 등분제의 특수한 경우 또는 그 확장으로 본 임재훈 외(2005)와 김영아 외(2016)의 의견과 일맥상통한다.

이 연구에서는 다양한 나눗셈 상황 중 연구의 동기에서 한 학생이 보인 반응과 관련한 단위비율 결정 맥락으로 한정하여 피제수와 제수 선택에 관해 살펴볼 것이다.

3. 수학교과서에 제시된 나눗셈 상황에 따른 나눗셈식의 도입 방법

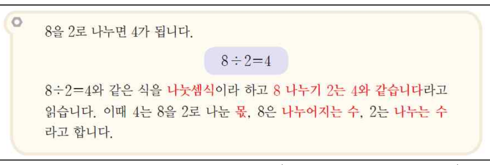
이 절에서는 수학교과서에서 나눗셈식을 언제, 어떻게 도입하는지 살펴봄으로써 나눗셈 연산 교육에 관한 시사점을 도출하는 데 기초 자료로 활용할 것이다. 연구에 참여하는 학생들이 1학년에서부터 6학년까지 모두 2009개정 교육과정을 적용받았다는 점을 고려하여 2009개정 교육과정에 따른 수학교과서(이하 2009개정 수학교과서) 내용을 중점적으로 살펴볼 것이다. 더불어 2015개정 교육과정에 따른 수학교과서(이하 2015개정 수학교과서)가 출판된 시점임을 고려하여 2009개정 수학교과서 내용에 해당하는 2015개정 수학교과서 내용을 비교해 볼 것이다.

나눗셈 상황에 따른 나눗셈식 도입 방법을 제시된 순서로 살펴보면 다음과 같다. 2009개정 수학교과서와 2015개정 수학교과서 모두 나눗셈이 3학년에 처음 도입된다. 3학년 1학기 '3. 나눗셈' 2차시와 3차시에서 나눗셈 상황을 다루며, 2차시에서는 등분제 상황에서 나눗셈식을 도입한다. 여기에서는 '8을 2로 나누면 4가 됩니다.' 라는 표현을 $8 \div 2 = 4$와 같이 나눗셈식으로 쓰고 '8나누기 2는 4와 같습니다.' 라고 읽는 방법을 소개하고 있다. 그런데 나눗셈식을 읽고 쓰는 방법만 소개하는 2009개정 수학교과서(교육과학기술부, 2014)와 달리 2015개정 수학교과서(교육부, 2018a)에서는 '8을 나누어지는 수, 2를 나누는 수라고 합니다.' 와 같이 나눗셈식에서 대상의 명칭을 분명히 한 차이가 있다. 구체적인 교과서 내용은 [그림 1]과 같다.



8을 2로 나누면 4가 됩니다.
이것을 식으로 8÷2=4라 쓰고 8 나누기 2는 4와 같습니다라고 읽습니다.
8÷2=4와 같은 식을 나눗셈식이라 하고 4는 8을 2로 나눈 몫이라고 합니다.

2009개정 수학교과서(교육과학기술부, 2014)

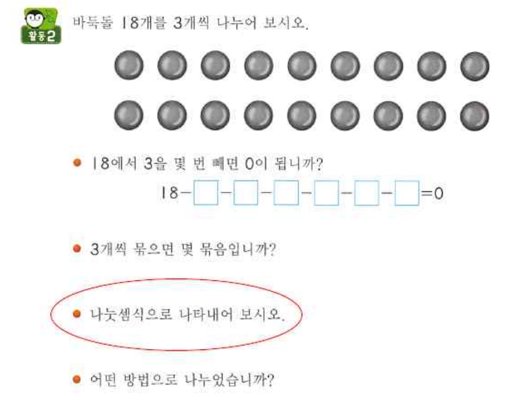

8을 2로 나누면 4가 됩니다.
8÷2=4
8÷2=4와 같은 식을 나눗셈식이라 하고 8 나누기 2는 4와 같습니다라고 읽습니다. 이때 4는 8을 2로 나눈 몫, 8은 나누어지는 수, 2는 나누는 수라고 합니다.

2015개정 수학교과서(교육부, 2018a)

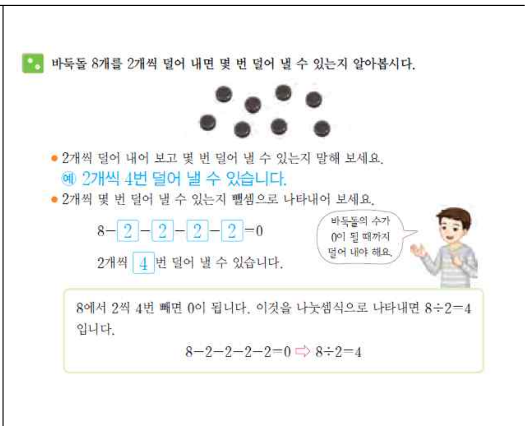
[그림 1] 등분제 상황에서 나눗셈식의 도입

5) 주어진 제수인 1.5m를 기본 단위인 1m로 바꾸기 위해서는 $\div 1.5$ 혹은 $\times \frac{1}{1.5}$을 할 필요가 있는데 이를 배율인수라고 한다(Smith & Stein, 2011).

3차시에서는 포함제 상황에서 나눗셈식을 도입한다. 2009개정 수학교과서(교육과학기술부, 2014)에서는 바둑돌을 직접 묶음의 크기만큼 나눠보는 활동을 한 뒤 '18에서 3을 몇 번 빼면 0이 됩니까?' 와 같은 발문을 통해 뺄셈식으로 표현할 수 있도록 안내한다. 이후 '3개씩 묶으면 몇 묶음입니까?' , '나눗셈식으로 나타내어 보시오.' 와 같은 발문을 통해 나눗셈식을 도입하고 있다. 반면 2015개정 수학교과서(교육부, 2018a)에서는 포함제 상황의 나눗셈식을 '8에서 2를 4번 빼면 0이 됩니다. 이것을 나눗셈식으로 나타내면 8÷2=4입니다.' 와 같이 명시적으로 안내하고 있다. 구체적인 교과서 내용은 [그림 2]와 같다.



2009개정 교과서(교육과학기술부, 2014)



2015개정 교과서(교육부, 2018a)

[그림 2] 포함제 상황에서 나눗셈식의 도입

이상 2009개정 수학교과서와 2015개정 수학교과서에서 나눗셈 상황과 나눗셈식을 어떻게 도입하는지 살펴본 후 다음과 같은 사실을 확인할 수 있었다. 먼저 두 교과서 모두 나눗셈이 처음 도입되는 3학년에서 등분제와 포함제 상황을 다루고 있었다. 또한 2015개정 수학교과서에서는 2009개정 수학교과서와 달리 나눗셈식의 도입에서 대상의 명칭을 분명히 하고 있으며, 포함제 상황에 대해서도 명시적으로 나눗셈식을 다루고 있음을 확인하였다. 하지만 두 교과서 모두 나눗셈 상황에 대한 내용은 자연수 범위의 나눗셈에서만 다루고 있다. 수의 범위는 자연수에서 소수와 분수로 확장되지만, 확장된 수의 범위에서 나눗셈 상황을 식으로 표현하는 것에 대한 명시적인 내용을 찾아보기 어렵다. 다음으로 나눗셈이 도입되는 3학년에서 등분제와 포함제를 학습목표로 다루고 있지만, 단위비율 결정 맥락, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 상황에 대해서는 명시적으로 다루고 있지 않은 것으로 보인다. 마지막으로 두 교과서 모두 나눗셈식의 도입에서 대상 선택과 관련된 내용은 찾아보기 어려웠다.

Ⅲ. 연구방법

이 장에서는 연구 목적을 달성하기 위한 연구 절차, 검사 문항, 자료 수집 방법 및 연구 대상자, 자료 분석 방법에 대해 살펴보고자 한다.

1. 연구 절차

연구자는 단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수 선택에 어려움을 겪는 한 학생의 사례를 접한 후 연구의 동기를 얻었다. 이후 앞서 확인한 어려움이 보편적인 문제인지 확인하기 위한 검사 문항을 마련하고 연구 대상자에게 투입하여 그 결과를 분석하였다. 다음으로 분석된 결과를 바탕으로 면담 대상자를 선정한 후 피제수와 제수 선택의 방법과 그에 따른 인지적 특징이 어떠한지에 대해 면담하고 그 결과를 분석하였다. 마지막으로 분석된 결과들을 바탕으로 나눗셈 연산 지도에 관한 교수학적 시사점을 도출하였다.

2. 검사 문항

검사 문항 제작의 초점은 피제수와 제수 선택에서 보이는 반응을 확인하는 것이다. 이를 위해 검사 문항은 서로 다른 문장제[6]와 그에 따른 공통 질문으로 구성하였다. 문장제는 6학년 2학기 '6. 여러 가지 문제' 의 수학 익힘책(교육부, 2015)에 제시된 문제를 변형한 것으로, 연구의 동기를 준 한 학생의 질문거리이기도 했다.

문장제를 변형할 때 두 가지 사항을 고려하였다. 하나는 문제에 제시된 순서대로 식을 세우는 것을 방지하기 위해 조건의 제시 순서를 다르게 설정한 것이다. 다른 하나는 소수와 분수의 나눗셈을 소수의 나눗셈으로 변형하여 제시함으로써 서로 다른 수의 범위 때문에 식을 세우지 못하는 것을 방지하고자 한 것이다.

또한 공통질문 (1)은 문장제 해결의 양상을 확인하기 위한 것이고, 공통질문 (2)는 그 이유를 확인하기 위한 것으로 설정하였다. [문항 1]과 [문항 2]를 함께 제시한 이유는 비슷한 것처럼 보이지만 다른 상황을 함께 제시하여 연구 대상자의 인식과 그 이유를 좀 더 명료하게 확인하기 위한 의도였다. 최종 검사 문항은 [그림 3]과 같다.

[문항 1] 무게가 12.6kg인 쇠막대의 길이가 3.15m일 때, 이 쇠막대 1kg의 길이는 얼마인가? (단, 쇠막대의 두께는 모두 일정하다.)

(1) 위 문제를 해결하기 위한 식을 아래에 기록하시오.

(2) 위 문항을 해결하는데 (1)의 식이 타당한 이유를 설명하시오.

[문항 2] 무게가 12.6kg인 쇠막대의 길이가 3.15m일 때, 이 쇠막대 1m의 무게는 얼마인가? (단, 쇠막대의 두께는 모두 일정하다.)

(1) 위 문제를 해결하기 위한 식을 아래에 기록하시오.

(2) 위 문항을 해결하는데 (1)의 식이 타당한 이유를 설명하시오.

[그림 3] 최종 검사 문항

3. 자료 수집 방법 및 연구 대상자

이 연구에서 수집한 자료는 설문자료와 면담자료이다. 설문자료를 확보하기 위해 경남 중소도시 소재 A초등학교에 재학 중인 6학년 3개 반(62명)을 대상으로 아침활동시간을 이용하여 검사 문항을 투입하였다. 이때 [문항 1]을 투입하고 개별적으로 답변이 끝났다는 의사표시를 하면 수거한 뒤 [문항 2]를 투입하였다. [문항 1]과 [문항 2]를 순차적으로 투입한 이유는 문항간의 상호 간섭효과를 통제하기 위함이었다. 검사 문항의 투입에 앞서 문

6) 단위비율 결정 맥락의 나눗셈 문장제를 의미한다.

제해결 및 자료 수집에 대한 학생의 동의를 받았으며, 연구 목적의 설문자료 활용에 대한 보호자의 동의를 받았다. 이 과정을 거쳐 확정된 연구 대상자는 55명이다. 이들은 초등학교 교육과정을 모두 이수한 학생들로 1학년에서부터 6학년까지 2009개정 교육과정을 적용받았다.

면담자료를 확보하기 위해 [문항 1]과 [문항 2]의 공통질문 (1)에서 보인 반응을 기준으로 연구 대상자를 분류하였으며 면담 대상자는 각 유형에 해당하는 인원을 균형 있게 선정하고자 하였다. 각 유형 별 연구 대상자 중 [문항 1]과 [문항 2]에서 특징적인 반응을 보이는 일부를 면담 대상자로 선정하였다. 면담 대상자로 선정된 인원은 총 9명이었으며 피제수와 제수 선택의 방법은 어떠한지, 자신의 방법이 옳다고 생각하는 이유는 무엇인지, 어떻게 그 방법을 알게 되었는지를 질문의 초점으로 삼아 반구조화된 면담을 실시하였다. 이를 위해 '[문항 1]과 [문항 2]를 어떻게 해결하였는지 한마디로 표현해 주겠니?', '네 방법이 옳다는 것을 설명해 주겠니?', '처음부터 그 방법을 사용 했니?' 와 같은 질문을 활용하였다. 또, 분명한 학생의 의견 확인을 위해 12÷3과 같은 식을 보여주고 12를 나누어지는 수, 3을 나누는 수라고 지칭함을 안내하고 이와 같은 수학적 용어를 사용해 줄 것을 면담 전에 요청하였다.

4. 자료 분석 방법

설문자료를 통해 피제수와 제수 선택의 양상은 어떠한지, 자신이 세운 식이 옳다고 생각하는 이유는 무엇인지 분석하고자 하였다. 이를 위해 설문자료는 공통질문 (1)과 공통질문 (2) 각각에 대한 기준을 마련하고 분류한 뒤 그 결과를 분석하였다. 공통질문 (1)은 연구 대상자가 선택한 피제수와 제수를 기준으로 삼아 분류하였다. 또한 공통질문 (2)에서는 질문에 대한 학생들의 반응에서 핵심어를 추출한 뒤 그것을 기준으로 삼아 분류하였다.

면담자료를 통해 면담 대상자의 피제수와 제수 선택의 방법은 무엇인지, 왜 그렇게 하는지, 어떻게 그 방법을 배웠는지, 자신의 방법에 대한 정당화는 어떠한지를 분석하고자 하였다. 면담자료는 모두 녹취하고 전사하였으며 이때 하나의 질문과 답변에 대해 모두 코드를 부여하여 내용을 파악하고자 하였다. 이들 중 특징적인 내용을 연구의 실제에 기술하였다.

Ⅳ. 연구의 실제

이 장에서는 먼저 단위비율 결정 맥락 문제를 식으로 표현할 때 피제수와 제수 선택에 대한 반응과 그 이유를 분석할 것이다. 다음으로 피제수와 제수 선택의 방법과 그에 따른 인지적 특징을 분석할 것이다.

1. 피제수와 제수 선택에 대한 반응과 그 이유 분석

가. 피제수와 제수 선택에 대한 반응

피제수와 제수 선택의 양상을 구분하고 그에 따라 면담 대상자를 선정하기 위해서는 분류 기준을 명확히 할 필요가 있었다. [문항 1]에서는 1kg의 길이를 구하기에 적절한 나눗셈식[7)]인 3.15÷12.6과 3.15÷12.6 이외의 반응으로 구분하였다. 이때 전반적인 피제수와 제

수 선택의 양상을 살펴보기 위해 3.15÷12.6과 같이 단위를 생략하고 숫자에 집중한 분류 기준을 마련하였다. 3.15÷12.6 이외의 반응은 12.6÷3.15와 같이 피제수와 제수를 역으로 선택한 경우와 '4÷4=1, 1÷4=0.25' 와 같이 기타로 분류되는 경우를 모두 포함한다. [문항 2]에서도 마찬가지로 1m의 무게를 구하기에 적절한 나눗셈식인 12.6÷3.15와 12.6÷3.15 이외의 반응으로 구분하였다. 이때 장제법으로 나타난 식들도 모두 동일한 기준을 적용하였다.

이러한 기준에 따라 [문항 1] 3.15÷12.6-[문항 2] 12.6÷3.15(A유형), [문항 1] 3.15÷12.6-[문항 2] 12.6÷3.15 이외의 반응(B유형), [문항 1] 3.15÷12.6 이외의 반응-[문항 2] 12.6÷3.15(C유형), [문항 1] 3.15÷12.6 이외의 반응-[문항 2] 12.6÷3.15 이외의 반응(D유형)으로 분류하여 정리한 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> 피제수와 제수 선택 양상

유형	[문항 1] 1kg의 길이를 구하는 문제	[문항 2] 1m의 무게를 구하는 문제	도수(명)	비율(%)	면담 대상자 인원수
A	3.15÷12.6	12.6÷3.15	11	20.00	3명
B	3.15÷12.6	12.6÷3.15 이외의 반응	2	3.64	1명
C	3.15÷12.6 이외의 반응	12.6÷3.15	18	32.73	2명
D	3.15÷12.6 이외의 반응	12.6÷3.15 이외의 반응	24	43.64	3명
계			55	100	·

A유형은 20%에 불과한데 이는 나눗셈 관련 문제에서 피제수와 제수의 선택에 다수의 학생들이 어려움을 겪고 있다는 것을 의미한다. B유형은 매우 적은 비율이 나타났다. C유형은 32.73%로 적지 않은 비율을 차지하는데 그 중 일부는 [문항 1]과 [문항 2] 모두 3.15÷12.6이라 응답하였다. D유형은 43.64%로 가장 높은 비율을 차지하였는데 그 중 일부는 피제수와 제수를 반대로 선택하였다. 이는 C유형 및 D유형 중 일부 연구 대상자들이 보이는 특징적인 반응의 원인이 무엇인지 자세히 확인해 볼 필요가 있다는 것을 의미한다.

<표 1>을 바탕으로 선정할 면담 대상자의 인원수를 결정하였다. 이때 A유형의 경우 피제수와 제수를 정확하게 선택할 수 있었던 이유에 대해 면밀히 파악하여 시사점 도출에 도움을 얻고자 1명을 추가로 선정하였다. 선정된 면담 대상자의 인원수는 A그룹 3명, B그룹 1명, C그룹 2명, D그룹 3명이다.

나. 피제수와 제수 선택의 이유

피제수와 제수 선택의 이유를 확인하기 위해 검사 도구의 공통질문 (2)에 대한 반응을 분류하였다. 이때 설문 반응을 모두 살펴보면서 핵심어를 추출한 뒤 그것을 기준으로 삼아 분류하였다. 예컨대 [문항 1]의 식이 타당하다고 생각하는 이유에 대해 '쇠막대의 무게가 12.6kg인 쇠막대는 무게가 1kg인 쇠막대보다 12.6배 더 무거우니까 길이가 3.15m인 쇠막대에서 ÷12.6을 하면 답이 나온다.' 와 같이 응답한 학생의 반응에서 '12.6kg의 쇠막대

7) 1kg의 길이를 구하기에 알맞은 나눗셈식이 유일한 것은 아니다. 피제수와 제수 선택의 양상을 구분하기 위해 알맞은 식 중 대표적인 하나와 그 이외의 반응을 분류 기준으로 삼은 것이다. [문항 1]에서는 3.15÷12.6을, [문항 2]에서는 12.6÷3.15를 대표적인 식으로 보았다.

는 무게 1kg인 쇠막대 보다 12.6배 더 무겁기 때문에 길이에도 똑같이 ÷12.6을 하기 때문' 이라는 핵심어를 선정한 뒤, 이를 기준으로 유사한 응답을 분류하였다. 이 중 기타로 분류된 반응은 '쇠막대의 두께가 일정하다고 했으니까 나누기를 하여 계산을 했다.' , '위 문항을 해결하는데 적절한 식이기 때문이다.' 와 같이 피제수와 제수 선택과 관련 없는 응답이다.

피제수와 제수 선택의 이유에 관한 특징적인 응답을 유형화하기 위해 분류 기준에 코드를 부여하였다. 이때 코드는 숫자와 영문을 함께 사용하였다. 숫자는 피제수와 제수 선택이 옳다고 생각하는 이유에 대해 유형화 한 것이고 영문은 어떤 문항에 대한 반응인지를 밝힌 것이다. '1' 코드는 피제수와 제수를 반대로 선택하고도 적절하다고 응답한 유형을 말하며, '2' 코드는 하나의 대상에서 파악한 배율인수를 다른 대상에게 적용하였기 때문에 식이 옳다고 밝힌 유형을 말한다. '3' 코드는 '[길이]÷[무게]' 와 같은 패턴을 적용하면 되기에 옳다고 밝힌 유형이며, '4' 코드는 세운 식이 목표를 구하기에 올바르기 때문이라고 밝힌 유형을 말한다. '5' 코드는 기타 유형을 말한다. [문항 1]에 대해서는 X코드를, [문항 2]에 대해서는 Y코드를 사용하였다. 최종 정리된 결과는 <표 2>와 같다.

<표 2> 피제수와 제수 선택의 이유

구분	이 유	도수(명)	비율(%)	유형	해당 면담 대상자
문항 1 [1kg의 길이를 구하는 문제]	[무게]÷[길이]를 하면 1kg의 길이가 나오기 때문	8	14.55	X1	C2, D1, D2
	12.6kg의 쇠막대는 무게 1kg인 쇠막대 보다 12.6배 더 무겁기 때문에 길이에도 똑같이 ÷12.6을 하기 때문	3	5.45	X2	A2
	1kg의 길이를 구하므로 [길이]÷[무게]를 하면 되기 때문	2	3.64	X3	A3
	쇠막대 1kg의 길이를 구하는 것의 식이 3.15÷12.6=0.25이기 때문	1	1.82	X4	A1
	기타	30	56.36	X5	B1, C1, D3
	무응답	10	18.18		
계		55	100	·	·
문항 2 [1m의 무게를 구하는 문제]	1m의 무게를 구하기 위해서는 [길이]÷[무게]를 해야 하기 때문	5	9.09	Y1	D1, D2
	1m가 되려면 3.15m에서 ÷3.15를 해야 하고, 이때 무게인 12.6kg에도 똑같이 ÷3.15를 해야 하기 때문	3	5.45	Y2	A2
	[무게]÷[길이]를 하면 1m의 무게가 나오기 때문	5	9.09	Y3	A3, C2
	1m의 무게를 구하는 식이 12.6÷3.15이므로	4	7.27	Y4	A1, C1
	기타	30	54.55	Y5	B1, D3
	무응답	8	14.55		
계		55	100	·	·

연구 대상자의 14.55%에 해당하는 X1은 '[무게]÷[길이]를 하면 1kg의 길이를 구할 수 있기 때문' 이라고 응답한 경우에 해당한다. 그러나 이 방법이 적절하다고 보기는 어렵다. 왜냐하면 12.6kg÷3.15m=(12.6÷3.15)(kg/m)과 같이 구한 결과가 의미하는 것은 1m에 해당하는 길이이기 때문이다. 이들에게는 피제수와 제수를 반대로 선택하는 이유가 무엇인지 파악해 볼 필요가 있다. 다음으로 5.45%에 해당하는 X2는 '12.6kg의 쇠막대는 1kg의 쇠막대 보다 12.6배 더 무겁기 때문에 길이에도 똑같이 ÷12.6을 하기 때문' 이라고 응답하였다. 이들은 12.6kg과 1kg의 쇠막대에서 파악한 관계를 ÷12.6이라는 배율인수로 표현하고 이를 길이에도 똑같이 적용하였다. 이들에게는 자신의 방법에 대한 자세한 설명을 요구함으로써 어떤 인지적 특징이 있는지 자세히 파악해볼 필요가 있다. 마지막으로 연구 대상자의 3.64%에 해당하는 X3는 '1kg의 길이를 구하므로 [길이]÷[무게]를 하면 되기 때문' 이라고 응답하였다. 이들은 피제수와 제수를 올바르게 선택하는 나름의 방법을 가지고 있는 것으로 보인다. 하지만 '[길이]÷[무게]' 와 같이 패턴에 따른 접근방법임을 고려했을 때 피제수와 제수의 의미에 대해 다시 한 번 확인해 볼 필요가 있다. 피제수와 제수의 선택과 관련이 없어 기타로 분류된 X5도 다수 있었다. [문항 2]에 대한 반응을 [문항 1]과 같이 분석하였지만 구분되는 유형과 그 비율이 대동소이하여 구체적인 설명은 생략한다.

앞서 선정된 면담 대상자의 인원수를 고려하여, [문항 1]과 [문항 2]에서 특징적인 반응을 보이는 연구 대상자 중 일부를 면담 대상자로 선정하였다. 이때 <표 1>에서 구분된 유형별로 A1, A2, A3와 같이 면담 대상자 코드를 부여하였다. 또한 선정된 면담 대상자가 <표 2>에서 어떤 유형에 속하는지 명확히 하고자 해당 유형에 면담 대상자 코드를 표기하였다. 예컨대 C2는 X1과 Y3유형에 해당하는 면담 대상자이다.

실제 면담은 9명 모두 수행하였지만 B1, D1, D3의 사례는 연구의 실제에서 다루지 않았다. 먼저 B1은 [문항 1]과 [문항 2]를 어떻게 해결하였는지 묻는 연구자의 질문에 일관되지 않은 반응을 보이는 등 의사소통에 어려움이 있었기 때문에 제외하였다. 다음으로 D3는 역수를 곱하는 방법을 사용하여 피제수와 제수 선택에 관한 정보를 확인할 수 없었기 때문에 제외하였다. 마지막으로 D2는 설문이 완료된 뒤 짧은 시간 내에 면담을 실시했음에도 불구하고 그 사이 관련 내용을 학원에서 지도받아 의견이 전반적으로 수정되었음이 확인되었다. 이에 연구의 객관성을 해칠 수 있다고 판단하여 제외하였다. 연구의 실제에서는 6명에 관한 사례를 중점적으로 기술할 것이며, 그 내용은 2절에서 자세히 다룬다.

2. 피제수와 제수 선택 방법과 그에 따른 인지적 특징

이 절에서는 면담 대상자들에게 피제수와 제수 선택의 방법과 그에 따른 인지적 특징을 살펴볼 것이다. 면담의 프로토콜에서는 질문의 목적을 명확히 할 필요가 있는 경우 괄호에 질문의 목적을 넣어 그 의도를 명확히 하였다. 또한 내용의 명료성과 가독성을 높이기 위해 '말하는 이-차례' 순서로 구분하여 코드를 부여하였다. 예컨대 RA-01은 A에 대한 연구자(R)의 첫 번째 질문을 의미하며 A-01은 이에 대한 응답을 의미한다.

가. 주어진 양 사이의 비례관계를 파악하여 제수로 삼음 : A2(X2, Y2)의 사례

A2는 [문항 1]과 [문항 2]에서 각각 3.15÷12.6과 12.6÷3.15라는 식을 세운 면담 대상자이다. [문항 1]에서 자신이 세운 식이 올바른 이유에 대해 '길이가 3.15m일 때 무게가 12.6kg이라면 1kg일 때 12.6kg을 12.6으로 나누어야 한다. 그러면 1kg일 때의 길이는

3.15÷12.6이 된다.' 와 같이 응답하였고, [문항 2]에서도 이와 같은 방식으로 응답을 하였다. 작성한 설문자료를 토대로 피제수와 제수 선택의 방법을 확인하기 위해 진행한 A2와의 대화내용은 다음과 같다.

<프로토콜 1>

RA2-01: (피제수와 제수 선택의 방법을 확인하기 위해) [문항 1]과 [문항 2]를 어떻게 해결하였는지 한 문장으로 표현해 주겠니?

A2-01: 나누는 수를 똑같이 하는 것이에요. 예를 들어 조건으로 제시된 3.15m를 1m로 만들기 위해서 3.15로 나누었으니깐 마찬가지로 조건에서 제시된 12.6kg에도 3.15를 나누어 답을 구한다는 말이에요.

RA2-02: (피제수의 선택 방법을 확인하기 위하여) 나누어지는 수는 어떻게 결정했니?

A2-02: [문항 2]에서 1m의 무게를 구하라고 했을 때 무게에 해당하는 수를 구해야 하니깐 12.6kg을 선택했어요. [문항 1]에서는 1kg의 길이라고 했을 때 길이에 해당하는 수를 구해야 하니깐 3.15m를 선택했어요.[8)]

A2-01과 A2-02를 통해 A2가 피제수와 제수를 선택하는 방법에 대한 정보를 얻을 수 있었다. A2는 1m의 무게를 구하는 [문항 2]를 예로 들어 설명하였다. A2는 3.15m의 쇠막대 길이가 1m로 되기 위해 ÷3.15의 과정을 거쳐야 한다는 사실을 바탕으로 ÷3.15라는 배율인수를 파악하여 제수로 삼고 구하고자 하는 '무게' 를 피제수로 삼는 방법을 사용하고 있었다. 연구자는 길이를 통해 파악한 배율인수를 왜 무게에도 똑같이 적용하는지를 확인하기 위해 다음과 같이 추가 질문을 하였다.

<프로토콜 2>

RA2-03: (무게와 길이에 똑같은 배율인수를 적용하는 이유를 확인하기 위해) 무게와 길이는 어떤 관계가 있니?

A2-03: 무게가 줄어들면 길이도 줄어들고 길이가 줄어들면 무게도 같이 줄어듭니다.

RA2-04: (자세한 설명을 요구하기 위해) 같이 줄어든다는 것은 어떻게 줄어드는 건데?

A2-04: 나누는 수 만큼 같이 줄어드는 거예요.

RA2-05: (정당화를 요청하기 위해) 네가 생각하는 무게와 길이의 관계가 옳다는 것을 설명해줄래?

A2-05: 문제에서 쇠막대의 두께가 모두 일정하다고 해서요. 쇠막대의 두께가 일정하지 않으면 똑같이 줄어들 수 없는데, 두께가 일정할 때 똑같이 나누면 길이와 무게가 똑같이 줄어든다는 거잖아요.

A2-05를 통해 A2가 쇠막대의 두께가 일정하다는 조건에서 길이와 무게가 함께 줄어들거나 늘어나는 관계가 있다는 것을 파악하고 있음이 확인된다. 무게와 길이의 배율관계를 파악한 것은 앞서 길이에서 파악한 배율인수를 무게에도 똑같이 적용한 근거로 볼 수 있다. 연구자는 A2가 그 방법을 어떻게 학습한 것인지 확인하기 위하여 추가 질문을 하였는데, A2는 6학년 담임교사에게 영향을 받았다고 답하였다. 연구자는 그때 상황을 좀 더 자

8) A2가 말하는 무게에 해당하는 수, 길이에 해당하는 수는 조건으로 제시된 12.6kg과 3.15m를 각각 의미한다.

세히 확인하기 위해 예를 들어 설명해 주기를 요청하였다. 이에 A2는 구체적인 그림과 함께 '귤 세 박스에 3만원이다. 무게는 6kg일 때, 한 박스의 무게는 얼마인가?' 라는 문제를 노트에 적어 설명하였다. A2는 해당 문제를 예시로 담임교사가 붙임자석을 이용하여 상자가 늘어나고 줄어듦에 따라 무게가 어떻게 변화하는지에 주목하도록 지도해 주었음을 말하였다.

A2가 배율인수를 파악하여 제수로 삼는 방법을 사용하기 시작한 것은 담임교사의 영향을 받은 6학년 이후부터였다. 연구자는 나눗셈을 처음 학습한 3학년에서부터 새로운 방법을 알게 된 6학년까지의 기간이 상당했다는 점에 주목하였다. 이 기간 동안에는 어떻게 피제수와 제수를 선택했는지 확인하기 위해 추가 질문을 하였다.

<프로토콜 3>

RA2-06: (구체적인 경험을 확인하기 위해) 처음부터 그러한 방법으로 문제를 해결했니?

A2-06: 아니요. ([문항 1]을 가리키며) 처음에는 12.6÷3.15와 3.15÷12.6을 모두 해보고 그 결과를 주어진 것과 비교해서 답을 적었어요.

RA2-07: (비교하고 판단하는 기준을 확인하기 위해) 그 때 어떻게 판단을 했니?

A2-07: 주어진 것하고 비교했을 때 이상하다 싶으면 바꾸는 거죠.

RA2-08: 그게 무슨 말이야?

A2-08: 어.... 지금 [문항 1] 같은 경우에는 12.6÷3.15라는 식을 세우고 이 답을 구하면 4 잖아요. 근데 제가 구하고자 하는 것은 m 잖아요? 그런데 1kg에 해당하는 무게인 4가 3.15보다 높을 수가 없잖아요.

A2가 문제를 해결하기 위해 이전에 사용한 방법은 조건에서 제시된 두 숫자를 적절하게 조합하여 두 가지 식을 모두 만드는 것이었다. 이후 두 식을 통해 답을 얻은 다음 주어진 조건과 비교하여 적절하다고 판단되는 것을 택함을 확인할 수 있었다. 하지만 A2가 이전에 사용한 방법은 주어진 조건 사이의 차가 작을수록 그 판단에 어려움을 겪을 수 있다. 예컨대 '무게가 3.6kg인 쇠막대의 길이가 2.88m일 때, 이 쇠막대 1kg의 길이는 얼마인가?' 라는 문제에 대해 3.6÷2.88과 2.88÷3.6이라는 식을 각각 세워 1.25와 0.8이라는 결과를 얻을 수 있다. 하지만 조건에 제시된 3.6과 2.88이라는 숫자와 비교하여도 두 수 모두 적절하다고 판단할 수 있다는 것이다. 또한 이러한 방법은 근본적으로 피제수와 제수의 선택이 왜 그렇게 되는지 설명하지 못한다는 한계가 있다.

나. 구하고자 하는 목표를 피제수로 결정

1) 분절적인 상황 해석과 식의 의미 설명: A1(X4, Y4) 사례

A1은 [문항 1]에서 3.15÷12.6이라는 식을 세워 문제를 해결하고자 하였다. 연구자는 왜 그 식을 세웠는지 물었지만 '1kg의 길이를 구하는 식이 3.15÷12.6이기 때문' 과 같이 애매모호한 답변을 반복하였다. 따라서 구하고자 하는 목표와 식이 어떤 관계가 있다고 생각하는지 확인하기 위해 진행한 A1과의 대화내용은 다음과 같다.

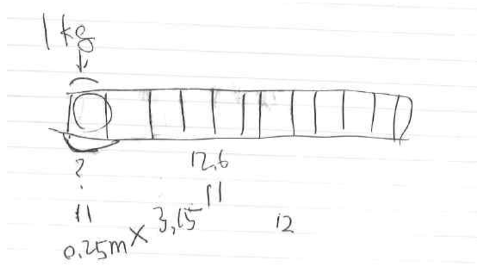
<프로토콜 4>

RA1-01: (구하고자 하는 것과 식 사이의 관계 인식을 확인하기 위해) 이 식이 왜 쇠막대 1m의 무게를 구하는 것인지 자세히 설명해 줄래?

A1-01: 머릿속에서 그림을 그려 생각해봤을 때 길이가 3.15m이고 무게가 12.6kg이니까 1kg의 길이를 구하려면 제가 한 식 대로 하면 답이 0.25가 나오기 때문입니다. 그리고 검산을 할 때 0.25곱하기 3.15를 하면 12.6kg이 나오기 때문에 맞습니다.

RA1-02: (구체적인 설명을 요청하기 위해) 머릿속에서 그림을 그렸다고 했는데 노트에 그려 설명해 주겠니?

A1-02: (아래 [그림 4]를 그린 뒤) 쇠막대를 12.6등분 하면 한 조각에 1kg이에요. 그리고 1kg 조각에 해당하는 길이는 3.15m를 12.6등분 한 것과 같기 때문에 0.25m라는 것을 알 수 있어요.



[그림 4] A1이 정당화를 위해 그린 그림

A1은 자신이 세운 식이 왜 쇠막대 1kg의 길이를 구할 수 있는지에 대해 자세히 설명해 주었다. 먼저 [문항 1]에서 무게가 12.6kg이고 길이가 3.15m인 쇠막대를 적절히 등분하여 한 조각이 1kg이 되도록 하였다. 다음으로 한 조각에 해당하는 길이를 구하기 위해 3.15m를 12.6등분한 것을 3.15÷12.6이라는 식으로 표현하였다. 이후 [문항 2]에서도 동일한 방법으로 설명하였다.

사실 A1-02에서 12.6등분을 한다는 설명과 [그림 4]에서 정당화를 위해 실제 그린 12등분에는 차이가 있었다. 하지만 A1이 주어진 쇠막대를 적절히 등분하여 한 조각을 1kg으로 만들어 자신의 식을 정당화하였기에 피제수와 제수 선택 방법에 초점을 맞추어 다음과 같이 질문하였다.

<프로토콜 5>

RA1-03: (피제수와 제수 선택 방법을 확인하기 위해) [문항 1]과 [문항 2]를 해결하는 방법을 한 문장으로 설명해 줄래?

A1-03: [문항 1]은 1kg의'길이'를 구하는 것이니 나누어지는 값을 조건에 있는 길이인 3.15m로 두고, [문항 2]는 1m의'무게'를 구하는 것이기 때문에 나눠지는 값을 조건에 있는 무게인 12.6kg으로 두면 됩니다.

RA1-04: (제수 선택의 기준이 궁금하여) 나누는 수는 어떻게 결정했니?

A1-04: 나누는 수는... 문제에서 제시된 조건 중 다른 하나를 나누는 값으로 두면 됩니다.

A3는 문항에서 구하고자 하는 것을 기준으로 피제수를 결정하고 나머지 조건 하나를 제수로 결정하는 방법을 사용하였다. 그런데 A3의 이러한 설명은 앞서 [문항 1]과 [문항 2]에서 근거를 들어 설명할 때와 달리 기계적인 접근이었다. 이에 연구자는 '나누는 수는 무엇을 의미하니?' 와 같은 질문을 통해 식에서 피제수와 제수의 의미를 어떻게 파악하는지

확인하고자 하였다. 하지만 '12.6÷3.15에서 ÷3.15는 조건 중 남은 다른 하나를 말합니다. 왜냐하면 제가 세운 식을 보면 그렇다는 것을 알 수 있습니다.' 와 같이 식을 세우는 방법에 관한 답변을 반복하였다. 이를 통해 A3는 나름의 해석을 통해 상황을 식으로 나타내는 것은 가능하지만, 표현된 식의 의미를 설명하는 것에는 어려움이 있다는 것을 확인할 수 있었다. 이는 나눗셈식의 의미 이해를 돕기 위해서는 주어진 상황을 식으로 표현하도록 요구하는 것과 더불어 표현된 식을 상황에 비추어 설명하도록 요구할 필요가 있다는 것을 의미한다.

2) 패턴에 따른 피제수와 제수 선택: A3(X3, Y3)의 사례

A3는 [문항 1]에서 3.15÷12.6이라는 식을 세워 문제를 해결하고자 하였다. 그 식이 옳다고 생각하는 이유에 대해 '1kg의 길이를 구하는 문제이므로 [길이]÷[무게]이다.' 라고 응답하였다. [문항 1]을 어떻게 해결하고자 하였는지 확인하기 위해 진행한 A3와의 대화내용은 다음과 같다.

<프로토콜 6>

RA3-01: ([문항 1]을 어떻게 해결하였는지 확인하기 위해) [문항 1]을 어떻게 해결하였는지 설명해 주겠니?

A3-01: 길이를 구하는 것이기에 [길이]÷[무게]를 했습니다.

RA3-02: (왜 그렇게 했는지를 확인하기 위하여) 왜 그렇게 했는지 설명해 주겠니?

A3-02: 왜냐하면 길이를 구하는 것이기에 길이를 앞에 둬야 할 것 같았어요. 만약 무게 나누기 길이를 하면 4m가 나오는데 12.6kg이 1kg보다 더 크므로 4m가 될 수 없기 때문입니다.

A3는 1kg의 길이를 구하는 [문항 1]에 대해 [길이]÷[무게]라는 방법을 사용했다고 설명하였다. 이러한 방법을 사용한 이유에 대해 구하고자 하는 목표를 피제수로 삼아야 한다는 설명과 함께 [무게]÷[길이]로 구한 답이 조건에 견주어 적절한 답이 될 수 없다는 설명을 덧붙였다. 이후 [길이]÷[무게]라는 방법이 왜 1kg의 길이를 구할 수 있는지에 대해 질문하였지만 [무게]÷[길이]가 적절하지 않기 때문이라는 말을 되풀이 하였다.

이러한 설명 패턴은 [문항 2]에 대한 설명에서도 반복되었다. 연구자는 어떻게 이러한 방법을 사용하게 되었는지 확인하기 위해 '네가 사용하는 방법을 어떻게 알게 되었니?' 와 같이 질문하였다. 이에 대해 A3는 '사과가 6개 있습니다. 3명이 똑같이 나눠 먹을 때, 1명당 몇 개씩 먹을 수 있을까요?' 와 같은 구체적인 상황을 제시하며 3학년 시절 자신의 학습경험을 다음과 같이 설명하였다.

<프로토콜 7>

RA3-03: (구체적인 학습경험을 확인하기 위해) 어떻게 배웠니?

A3-03: 한 명 당 몇 개씩이잖아요. 그럼 개수가 중요한 거잖아요. 그럼 개수는 사과잖아요. 그럼 필요 없는 것은 사람이잖아요. 그럼 중요한 것이 앞으로 가야잖아요. 그럼 사과 나누기 사람이 되지요.

RA3-04: 중요하다는 것은 뭘 의미하는 것이지?

A3-04: 1명당 몇 개인가? 와 같이'몇 개'가 중요한 거죠. 이게 물어보는 거죠. 그게 앞으

로 가는 거예요.

RA3-05: 뒤로 가는 건?

A3-05: 필요 없는 정보는 사람이니까 뒤로 가는 거죠.

<프로토콜 7>에서 A3가 나눗셈식을 세우는 방법을 좀 더 자세히 들여다 볼 수 있었다. A3-03, A3-04, A3-05는 A3가 중요한 것(구하고자 하는 목표)을 피제수로 선택하고 필요 없는 정보(나머지 조건)를 제수로 선택하는 패턴을 따름을 말해준다. 그런데 A3의 이러한 방법은 상황의 해석이 강조될 때에 취약하다는 한계가 있을 수 있다. 즉, ‘무게가 12.6kg인 쇠막대의 길이가 3.15m일 때, 이 쇠막대 2kg의 길이는 얼마인가?’ 와 같이 기준 단위가 바뀌었을 때, [무게]÷[길이]와 같은 패턴으로 접근할 경우 상황을 식으로 올바르게 표현하기 어렵다. 물론 이와 같은 방식으로 1kg의 길이를 구한 뒤, 그 결과의 두 배를 하여 2kg의 길이를 구할 수도 있다. 하지만 패턴에 따른 [무게]÷[길이]라는 방법은 궁극적으로 의미에 대한 이해가 결여되어 있다는 한계가 있다.

다. 식의 결과를 해석한 뒤 피제수와 제수 다시 결정: C1(X5, Y4)의 사례

C1은 [문항 1]에서 (12.6÷3.15라는 식을 쓰고 지운 흔적이 있음.) 4÷4=1, 1÷4=0.25라는 식을 세웠는데, 그 이유에 대해 ‘쇠막대의 1kg은 몇 m입니까라고 해서’ 와 같이 응답하였다. 12.6÷3.15를 지운 이유에 대해 ‘1m의 무게를 구한다고 생각한 거예요.’ 와 같이 답변하였다. [문항 1]을 어떻게 해결하였는지 묻는 질문에 ‘1m의 무게가 4kg이니까 1kg일 때 무게를 물어서 4÷4=1, 1m÷4를 해서 0.25m를 구했다고 답변하였다. 피제수와 제수 선택을 잘못하고도 정답으로 접근할 수 있었던 이유를 확인하기 위해 진행한 C1과의 대화내용은 다음과 같다.

<프로토콜 8>

RC1-01: (대상 선택을 잘못하고도 정답으로 접근할 수 있었던 이유를 확인하기 위해) 이 생각은 어떻게 했어?

C1-01: 음... 처음에 12.6÷3.15를 잘못 했는데, 그거... 쇠막대 1kg의 길이를 구하는데도 관련이 있어가지고요.

RC1-02: (자세한 설명을 요청하기 위해) 어떤 관련이 있어?

C1-02: 4kg이 쇠막대 1m의 무게니까 쇠막대 무게가 1kg이 되면 ÷4되니까 길이도 ÷4를 하면 0.25가 돼요.

C1은 자신이 세운 12.6÷3.15라는 식에서 1m의 무게가 4kg이라는 사실을 인지하고 이를 활용해 1kg의 길이를 구하고자 하였다. 즉, 12.6÷3.15에서 1m에 해당하는 무게가 4kg이라는 정보를 얻은 다음 무게와 길이에 각각 ÷4라는 배율인수를 적용해 1kg에 해당하는 길이를 구한 것이다. 연구자는 C1이 어떻게 식의 결과가 의미하는 바를 정확하게 찾아내는지 확인하기 위해 추가 질문하였다.

<프로토콜 9>

RC1-03: (식의 결과가 의미하는 바를 어떻게 파악하는지 확인하기 위해) 식의 의미 파악이 어떻게 쉽게 가능한 거지?

C1-03: 단위와 문제를 고려해요.
RC1-04: (자세한 설명을 요청하기 위해) 그게 무슨 말이야?
C1-04: 쇠막대 1kg의 길이를 구하라는 문제에서 12.6÷3.15를 하면 결과가 4가 나오는데요. 이 4는 1m일 때 무게를 의미해요.
RC1-05: 그것은 어떻게 알게 되었니?
C1-05: 지금 식은 무게÷3.15라고 했는데 길이도 똑같이 3.15가 나눠질 거잖아요. 그래서 3.15m÷3.15가 1m이니까요.
RC1-06: 1m의 무게인 것은 어떻게 아는 건데?
C1-06: 3.15m일 때 ÷3.15를 하면 1m고 길이에 해당하는 만큼 무게도 똑같이 ÷3.15를 하는 거예요.

C1은 식을 해석할 때 단위와 문제를 고려한다고 응답하였다. 예컨대 12.6÷3.15라는 식을 해석할 때 먼저 피제수가 무게라는 것을 파악한 다음 ÷3.15라는 배율인수를 파악하고 마지막으로 길이에도 배율인수를 똑같이 적용하여 1m에 해당하는 무게라는 의미를 명확히 하는 방법을 사용하는 것이다. C1이 자신이 세운 식의 결과에 대해 나름의 방법으로 해석을 시도하는 것은 잘못된 피제수와 제수를 선택하고도 정답으로 방향을 수정하는 데 영향을 미친 것으로 보인다. 즉, [문항 1]에서 12.6÷3.15라는 식을 세우고 그 의미를 1m에 해당하는 길이가 4kg이라는 것으로 해석할 수 있었기에 피제수와 제수를 다시 결정하여 정답으로 접근할 수 있었던 것이다.

라. 단위를 고려해서 제수 결정: C2(X1, Y3)의 사례

C2는 [문항 1]과 [문항 2]에 모두 12.6÷3.15라는 식을 세운 학생이다. [문항 2]에 대한 해결 방법을 설명하는 과정에서 [문항 1]에 대한 자신의 풀이가 틀렸다고 생각한다는 의견을 밝혔다. 똑같은 식을 세우고도 하나는 맞고, 하나는 틀렸다고 생각하는 이유를 확인하기 위해 진행한 C2와의 대화내용은 다음과 같다.

<프로토콜 10>

RC2-01: (학생의 생각을 확인하기 위해) 똑같은 식을 쓰고 [문항 1]은 틀리고 [문항 2]는 맞았다고 생각한 이유는 뭐야?
C2-01: [문항 2]에서 쇠막대의 길이라고 했을 때 3.15m이고, 쇠막대 1m의 무게라고 단위가 m로 똑같아서요. 구할 때 12.6÷3.15를 하면 쇠막대 1m의 무게가 나와서요.
RC2-02: (식을 세운 과정에서 단위를 언급하기에) 어떻게 단위를 고려했기에 그 사실을 알 수 있어?
C2-02: 단위가 똑같으니깐 나누는 수를 결정할 수 있잖아요. [문항 2]에서 물어보는 것이 1m의 무게인데, 길이가 3.15m이라는 것의 단위가 똑같아서 아까 세운 12.6÷3.15라는 것은 1m의 무게일 것 같아서요.

<프로토콜 10>에서 C2는 나눗셈식을 세우기 위해 제시된 단위를 고려하여 제수를 선택하는 방법을 사용한다는 것을 확인하였다. 즉, 쇠막대 1m의 무게에서 ‘m’라는 단위에 초점을 맞춰 길이인 3.15m를 제수로 결정한다는 것이다. 동일한 식을 쓰고 식의 적절성 여부를 판단할 수 있었던 이유는 C2의 이러한 방법에 기인한 것으로 보인다. C2가 피제수와

제수를 선택하는 방법을 좀 더 자세히 확인하기 위해 추가 질문하였고 그 내용은 다음과 같다.

<프로토콜 11>

RC2-03: (피제수와 제수 선택 방법을 확인하기 위해) 네가 [문항 1]과 [문항 2]를 해결하는 방법을 간단히 설명한다면 어떻게 할 수 있을까?

C2-03: 1m의 무게랑 1kg의 길이를 구하는 문제에서 나누기를 하는데, 물어보는 것이 1m의 무게이면 무게 나누기 길이를 하고, 1kg의 길이를 구하는 거면 길이 나누기 무게를 해요.

RC2-04: 이때 고려하는 사항은 뭐지?

C2-04: 첫 번째에는 단위를 고려해서 나누는 수를 결정해요. 그리고 나누는 수 말고 다른 하나를 나누어지는 수로 결정해요.[9)]

C2는 단위를 고려해 제수를 선택하는 자신의 방법에 대해 자세히 설명해주었다. 예컨대 1kg의 길이를 구하는 문제에서 'kg' 이라는 단위를 고려해 [무게]라는 정보를 피제수로 선택하고, [길이]라는 다른 하나를 제수로 선택한다고 했다. 이후 피제수와 제수의 선택 방법을 어떻게 알게 된 것인지 묻는 연구자의 질문에 자신의 시행착오와 학습경험에 대해 설명해 주었다. C2가 최초에 사용한 방법은 [큰 수]÷[작은 수]를 해 결과를 얻는 것이었는데 항상 이러한 방법이 통용되는 것은 아니라고 말하였다. 그때 C2가 선택한 방법은 그 문제를 틀리고 수정할 때 순서를 바꿔 계산하는 것이라고 하였다. 현재 사용하는 나름의 규칙을 파악할 수 있었던 학습경험에 대해서도 '선생님께서 문제를 푸는 것을 보면서 만약 1m의 무게를 구하는 거라면 무게를 먼저 쓰고 길이를 뒤에 쓰는 것을 찾았어요.' 와 같이 교사의 풀이 방법에서 귀납적으로 방법을 도출해 내었다고 하였다. 귀납적으로 학습한 경우 그 과정에 따라 왜 그렇게 되는지에 대해 간과될 수도 있다. 따라서 이를 돕기 위해 교사가 왜 그러한 방법을 사용할 수 있는지에 대해 탐구할 기회를 제공할 필요가 있다.

마. 문제에 언급된 순서를 기준으로 피제수와 제수를 결정: D1(X1, Y1)의 사례

D1은 [문항 1]과 [문항 2]에 각각 12.6÷3.15, 3.15÷12.6이라는 식을 세웠고, 그 식이 올바르다고 생각하는 이유를 '쇠막대 1kg의 길이를 구할 때에는 12.6÷3.15를 하면 알 수 있기 때문에' 와 같이 문제를 해결하기에 그 식이 올바르기 때문이라고 응답하였다. 피제수와 제수 선택의 방법을 자세히 확인하기 위해 진행한 D1과의 대화내용은 다음과 같다.

<프로토콜 12>

RD1-01: (피제수 선택을 확인하기 위해) 나누어지는 수는 어떻게 결정한 거니?

D1-01: 예를 들어 1m의 무게를 물으면 길이를 나누어지는 수로 둬요.

RD1-02: (제수 선택을 확인하기 위해) 나누는 수는 어떻게 결정한 거니?

D1-02: 예를 들어 1m의 무게를 물으면 무게를 나누는 수로 둬요.

RD1-03: 왜 그렇게 하는거야?

9) 단위를 고려한다는 말은 1kg의 길이를 구하는 문제에서 'kg' 이라는 단위를 고려한다는 것을 의미하고, 나누는 수 말고 다른 하나는 '길이' 를 의미한다.

D1-03: 1m의 무게라고 물어봤으니깐 물어본 순서대로 1m는 길이잖아요? 그래서 길이, ~의 무게잖아요 그래서 무게를 순서대로 나누었어요.

D1-03을 통해 피제수와 제수의 선택에 있어 문제에 언급된 순서가 영향을 미쳤다는 것을 확인하였다. 즉, D1은 1m의 무게를 구하기 위해서 먼저 등장한 '1m' 에서 길이라는 정보를 얻어 해당하는 조건인 3.15를 피제수로 선택하고, 다음으로 '무게' 에서 무게라는 정보를 얻어 해당하는 조건인 12.6을 제수로 선택하였다. D1은 1kg의 길이를 구하는 [문항 1]을 예시로 들어 설명해 줄 것을 요청했을 때에도 동일한 반응을 보였다. 이러한 방법을 왜 사용하는지에 대해 질문하였지만 '그렇게 하면 구하고자 하는 것을 구할 수 있기 때문' 이라는 말을 되풀이 하였다. 질문 순서를 기준으로 피제수와 제수를 선택하는 방법을 다른 유형의 문제에서도 동일하게 적용되는지 확인하기 위해 새로운 문제를 제시하며 추가 질문을 하였다.

<프로토콜 13>

RD1-04: (9시간에 270km를 가는 자동차가 있습니다. 이 자동차가 1시간에 갈 수 있는 거리는 얼마 입니까?라는 문제를 제시하며) 이 문제는 어떻게 해결할 것 같니?

D1-04: (곧 바로) 270km 나누기 9요. 270km가는데 9시간이 걸리잖아요. 1시간에 갈 수 있는 거리는 270÷9하면 구할 수 있어요.

RD1-05: (일관되지 않은 방법을 사용하는 이유를 확인하기 위하여) 아까 같이 한다면 9시간÷270 해야 하는 것 아니야?

D1-05: 아까 문제와 이 문제는 다른 것 같아요.

RD1-06: 왜?

D1-06: [문항 1]에서는 1kg의 길이니깐 kg당 길이를 물어보고, 이 문제에서는 한 시간당 거리를 물어봐서요.

D1은 앞선 두 문제에서 문제에 언급된 순서를 기준으로 피제수와 제수를 선택한 것과 달리 속력 문제에서는 그 순서를 반대로 선택하였다. D1-06에서 [문항 1]과 속력 문제를 비교하며 두 문제가 다르다고 설명하였는데, 사실 D1이 설명한 내용은 'A당 B' 라는 구조로 동일하였다. 피제수와 제수의 선택에서 질문 순서가 중요했던 D1이 속력 문제에서는 문제에 언급된 순서와 관계없이 다른 방법을 자신 있게 택한 이유를 확인하기 위해 '앞선 두 문제와 속력 문제 중 무엇이 더 쉽다고 느껴지니?' 와 같은 질문을 하였다. 이에 대해 속력 문제가 더 쉽게 느껴진다고 말하였다. 또한 그 이유를 '6학년 교과서에서 나오는 속력을 구하는 식이 거리÷시간이라는 식을 봐서 어떻게 하는지 바로 알았는데, [문항 1]은 6학년에서 배우는 것 같긴 한데 순서가 맞는지 생각해 봤지만 잘 생각이 나지도 않고 도움을 받을 수 있는 것도 없어서 순서대로 나누었어요.' 와 같이 응답하였다.

위 내용을 통해 두 가지 해석이 가능하다. 하나는 속력·거리·시간과 같이 교과서에 명시적으로 제시된 내용이 피제수와 제수 선택의 방법에 영향을 미친다는 것이다. 다른 하나는 불특정한 비율로 주어지는 단위비율 결정 맥락의 특징으로 인해 두 대상의 관계를 나눗셈 식으로 표현하는 것에 어려움이 있을 수 있다는 것이다. 따라서 교사는 관련이 있는 두 대상을 찾아 이들의 관계를 파악하고 그 결과를 나눗셈식으로 나타낼 수 있도록 도울 필요가 있다는 것이다.

Ⅴ. 결론 및 지도방안 제안

이 연구에서는 단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수의 선택에 대한 학생들의 반응과 그에 따른 인지적 특징을 분석하여 나눗셈 연산 지도에 관한 교수학적 시사점을 얻는 것을 목적으로 하였다. 연구 목적을 달성하기 위해 단위비율 결정 맥락 문제를 식으로 표현할 때 피제수와 제수 선택에서 보이는 반응과 그에 따른 인지적 특징을 분석하였다. 이상의 과정을 통해 다음과 같은 연구의 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 피제수와 제수 선택 및 그 이유에 대해 분석한 결과 단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수 선택에 다수의 학생이 어려움을 겪는 것을 확인할 수 있었다. 이는 [문항 1]과 [문항 2]의 상황을 적절한 식으로 표현한 연구 대상자의 비율이 20%로 상당히 낮았음을 통해 확인할 수 있다. 더불어 자신이 세운 식이 옳다고 생각하는 이유를 문항별로 분석하였지만 '그냥 그렇게 하면 되기 때문' 과 같은 기타 의견이 주를 이루었다.

둘째, 면담 대상자들이 사용하는 피제수와 제수 선택의 방법이 가지는 한계를 확인할 수 있었다. 배율인수를 파악하여 피제수와 제수를 선택하고 그 이유에 대해서도 정당화할 수 있는 A2도 이러한 방법을 알기까지 상당한 시행착오를 겪은 것으로 확인되었다. 특히 A2가 사용한 최초의 방법은 시행착오에 기초하였기에 근본적으로 피제수와 제수를 왜 그렇게 선택하는지 설명할 수 없다는 한계가 있었다. 또한 패턴에 따른 A3의 방법은 맥락이 바뀌어 상황 해석이 강조될 경우 식을 올바르게 세우지 못할 가능성이 있다는 한계가 있었다. 이들의 사례를 통해 피제수와 제수 선택의 방법에 대한 지도와 더불어 왜 그렇게 되는지도 함께 강조할 필요가 있다는 것을 알 수 있었다.

셋째, 표현된 식의 의미를 해석하는 것에 어려움이 있음을 확인할 수 있었다. A1은 주어진 쇠막대를 조건에 맞게 등분하여 상황에 맞게 피제수와 제수를 선택하였다. 하지만 세운 식에 대한 의미를 상황에 맞게 설명하는 것에 어려움이 있음을 확인하였다. A3와 같이 패턴에 따라 대상을 선택하는 사례에서도 표현된 식의 의미를 설명하는 것에 상당한 어려움이 있음을 확인하였다. 표현된 식을 해석하는 것이 문제해결 과정을 수정하는 데 도움을 줄 수 있다는 C1의 사례를 고려한다면 식을 상황에 비추어 해석하는 것을 함께 강조할 필요가 있다는 것을 알 수 있었다.

넷째, 피제수와 제수 선택에 관한 지도에서 반영할 필요가 있는 몇 가지 유의미한 내용을 확인할 수 있었다. A2는 자신의 방법을 구체화 시키는 데 관계있는 두 대상 중 하나가 변화함에 따라 다른 하나가 어떻게 변화하는지 주목하도록 한 담임교사의 지도가 도움이 되었다고 하였다. 이를 통해 교사가 실물로 한 대상이 변화함에 따라 다른 대상이 어떻게 변화하는지에 대해 생각해 볼 기회를 제공할 필요가 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 D1의 사례를 통해 불특정한 비율로 제시되는 단위비율 결정 맥락에서 관련이 있는 두 대상을 찾고 이들의 관계를 파악하여 그 결과를 나눗셈식으로 나타낼 수 있도록 도울 필요가 있다는 것도 알 수 있었다.

다섯째, 학습방법의 한계에 대해서도 확인할 수 있었다. C2는 피제수와 제수를 선택하는 방법을 교사의 풀이 방법에서 귀납적으로 학습하였다. 즉, 교사가 어떻게 문제를 해결하는지를 자세히 보고 일관적인 방법을 찾아내 나름의 방법을 습득하였다. 하지만 학생이 질문을 하기 전까지는 왜 그렇게 피제수와 제수를 선택하는지에 대해서는 알기 어렵다는 제한점이 있음을 확인할 수 있었다.

단위비율 결정 맥락 문제를 식으로 표현할 때 피제수와 제수 선택에서 보이는 반응과 그에 따른 인지적 특징을 분석한 결과를 통해 다음과 같은 교수학적 시사점을 얻었다.

첫째, 관계에 대한 근본적인 지도가 필요하다. 단위비율 결정 맥락은 근본적으로 두 대상의 관계에 기초한다. 즉, 두 대상 중 하나가 줄어들 때, 다른 대상이 어떻게 줄어드는지 찾는 것이다. 하지만 교과서 지면의 제한 등으로 인해 불특정한 비율로 제시되는 모든 대상과 그 관계를 다루는 것에는 한계가 있을 수 있다. 따라서 주어진 조건에서 관계를 찾고 이를 표현하는 힘을 길러주어 다른 문제에서도 적용할 수 있는 전이력을 향상시키는 방향으로 지도할 필요가 있다.

둘째, 단위비율 결정 맥락 문제에서 피제수와 제수를 알맞게 선택할 수 있도록 돕는 지도방안 마련이 요구된다. 단위비율 결정 맥락 문제에서는 비교하는 양과 기준량의 선택에 따라 그 식의 의미가 달라지기 때문에 적절한 피제수와 제수를 선택하여 단위비율 결정 맥락 문제의 의미를 올바르게 이해할 필요가 있다. 그럼에도 불구하고 다수의 연구 대상자들은 이에 어려움을 겪고 있는 것으로 보인다. 또 각자 나름의 피제수와 제수 선택의 방법을 가지고 있는 경우에도 그 이해는 견고하지 않음을 확인할 수 있었다. 따라서 지도방안을 마련할 때 피제수와 제수의 선택과 관련해 그 방법과 더불어 왜 그렇게 되는지를 함께 강조할 필요가 있다.

셋째, 표현된 식이 의미하는 바가 무엇인지 설명하도록 요구할 필요가 있다. C1의 사례를 통해 표현된 식을 해석하는 것이 문제해결에서 강력함 힘이 있음을 확인하였다. 하지만 앞서 A1, C1을 제외한 면담 대상자들에게서도 확인할 수 있었듯 자신이 세운 식에 대해 정당화하는 것은 쉬운 일이 아닌 듯 보인다. 그런데 정당화 과정은 반성이라는 측면에서 중요하다 할 것이다. 따라서 이를 지도하는 교사가 학생에게 정당화를 요구할 필요가 있는데 이는 학습자의 나눗셈 연산에 대한 이해를 더욱 견고하게 할 수 있을 것이다.

도출한 시사점을 바탕으로 피제수와 제수의 선택에 관한 지도방안을 다음과 같이 제안할 수 있다. 만약 '페인트 1.8L로 $14.4\mathrm{m}^2$의 벽의 넓이를 칠할 수 있습니다. 이때 1L로 칠할 수 있는 벽의 넓이는 얼마입니까?' 라는 문제가 있을 때, 피제수와 제수 선택을 다음과 같은 단계에 따라 지도해 볼 수 있을 것이다.

[1단계] 대상 및 관계 파악 단계

이 단계는 조건을 해석하여 대상과 관계를 파악하는 단계이다. 여기에서는 학생들은 문제에서 대상들이 어떤 관계가 있는지에 대해 파악해야 한다. 이를 위해 교사는 페인트 양과 칠할 수 있는 벽의 넓이 사이의 관계를 파악하도록 붙임딱지를 활용하여 하나의 조건이 변화함에 따라 다른 조건이 어떻게 변화하는지를 파악할 수 있도록 도와야 한다. 이때 교사는 "(붙임딱지를 붙이며)만약 사용하는 페인트의 양이 늘어난다면 칠할 수 있는 벽면의 넓이는 어떻게 될까요?", "(붙임딱지를 떼며)만약 사용하는 페인트 양이 줄어든다면 칠할 수 있는 벽면의 넓이는 어떻게 될까요?" 와 같은 발문을 통해 두 대상이 함께 줄어들거나 늘어나는 관계가 있음을 파악할 수 있는 기회를 제공해야 한다.

[2단계] 배율인수를 파악하고 적용하는 단계

이 단계는 배율인수를 파악하고 다른 대상에게 적용하는 단계이다. 여기에서 학생들은 먼저 조건과 비교했을 때 구하고자 하는 목표에 어떤 변화가 있는지 파악해야 한다. 이때 교사는 "만약 사용할 페인트의 양이 1L라면 조건과 비교해 몇 배 줄어들었습니까?" 와 같

은 발문을 통해 조건에 제시된 1.8L와 구하고자 하는 1L의 관계에 주목시킬 필요가 있다. 이에 대해 학생들은 "1.8L는 1L보다 1.8배 더 많습니다." 혹은 "1L는 1.8보다 1.8배 더 적습니다." 와 같이 설명할 수 있을 것이다.[10] 하지만 일부 학생은 "0.8만큼 작습니다." 와 같이 가법적 관계에 근거하여 설명할 수도 있을 것이다. 이를 도와주기 위해 교사는 [1단계]의 실물 조작을 상기 시키며 두 대상의 제법적 관계에 집중할 수 있도록 도와야 한다. 교사는 이러한 점을 고려하여 "3.6L의 페인트로 칠할 수 있는 벽면의 넓이는 얼마일까?" 와 같은 예시들을 제시하여 두 대상이 제법적 관계가 있다는 사실을 발견할 수 있는 기회를 제공해야 한다.

다음으로 학생들은 파악한 배율인수를 다른 대상인 칠할 수 있는 벽면의 넓이에도 똑같이 적용해야 한다. 이때 교사는 "1L로 칠할 수 있는 벽면의 넓이는 얼마만큼 줄어들까요?" 와 같은 발문을 통해 칠할 수 있는 벽면의 넓이에도 앞서 파악한 배율 인수를 그대로 적용할 수 있도록 도와야 한다. 이에 대해 학생은 "칠할 수 있는 넓이도 마찬가지로 1.8배 줄어듭니다." 와 같이 답할 수 있을 것이다.

[3단계] 관계를 식으로 표현하는 단계

이 단계는 [1단계]와 [2단계]에서 파악한 관계를 수식으로 표현하는 단계이다. 여기에서 학생은 앞서 [2단계]에서 파악한 관계를 식으로 표현해야 한다. 이때 교사는 "앞서 파악한 관계를 식으로 표현해 봅시다." 와 같이 발문하여 1L로 칠할 수 있는 벽면의 넓이를 구하는 식을 '$14.4m^2 \div 1.8$' 과 같이 표현할 수 있도록 해야 한다.

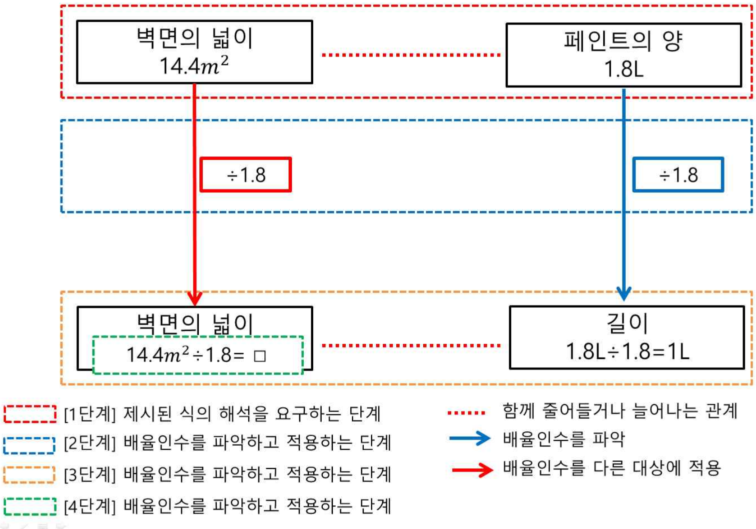
[4단계] 표현된 식에 대해 설명을 요청하는 단계

이 단계는 [3단계]에서 표현된 식에 대해 설명을 요청하여 나눗셈식에 대한 이해를 더욱 견고하게 하는 단계이다. 여기에서 학생들은 자신이 세운 식이 의미하는 바가 무엇인지 정당화해야 한다. [3단계]에서 피제수와 제수를 적절하게 선택할 수도 있지만 1.8L÷14.4와 같이 식을 세울 수도 있을 것이다. 이때 교사는 "자신이 세운 식이 의미하는 바가 무엇인지 설명해 봅시다.", "왜 그렇게 되나요?" 와 같이 정당화를 요청함으로써 자신의 피제수와 제수 선택에 대해 반성할 기회를 제공할 필요가 있다.

단위비율 결정 맥락은 몫이 분수가 되는 분수 나눗셈의 경우에도 어색하지 않다는 점, 제수의 역수 의미가 분명하게 된다는 점과 같은 상대적 장점으로 인해 2015개정 교육과정에서 도입되었다(조용진, 홍갑주, 2013; 교육부, 2018b). 이와 관련하여 장혜원 외(2018)는 일본, 대만, 싱가포르 교과서의 이중수직선 활용 사례를 분석하여 우리나라 초등학교 수학교과서에 반영할 수 있는 방안을 마련하고 실제 적용하는 등 다양한 측면에서 기초 연구가 진행된 것으로 보인다.

하지만 새로운 것을 도입하게 되면 기존에 등장하지 않았던 새로운 문제가 부각되기 마련이다. 이 연구에서는 단위비율 결정 맥락 문제에서 등장할 수 있는 피제수와 제수 선택의 문제와 그에 대한 지도방안을 다루었다. 제안된 피제수와 제수의 선택에 관한 지도방안을 시각화하면 [그림 5]와 같다.

10) 배율 인수를 파악할 때 '1L보다 1.8L는 1.8배 많습니다.' 와 같이 해석하여 배율인수를 ×1.8으로 택하는 경우와 '1.8L는 1L보다 1.8배 적습니다.' 와 같이 해석하여 배율인수를 ÷1.8으로 택하는 경우를 모두 생각해 볼 수 있다. 여기에서는 나눗셈이라는 이 연구의 초점에 맞춰 후자를 중점적으로 다룬 것이다.



[그림 5] 시각화된 지도방안

이상 연구 대상자의 반응 분석을 통해 교수학적 시사점을 얻었다. 이를 바탕으로 다음과 같은 내용을 제언하고자 한다. 먼저 피제수와 제수라는 대상 선택은 나눗셈 상황 전반에 나타날 수 있는 문제이다. 그러나 이 연구에서는 다양한 나눗셈 상황 중 단위비율 결정 맥락에 한정하여 학생들의 피제수와 제수 선택에 관해 살펴보았다. 다른 나눗셈 상황에서는 피제수와 제수 선택에 관한 반응이 다르게 나타날 수 있는바, 이에 대한 후속연구를 제안한다. 다음으로 단위비율 결정 맥락 문제는 해석하는 방법에 따라 나눗셈식뿐만 아니라 비례식, 단위측면의 비율 해석 등이 모두 가능하다. 이 연구에서는 단위비율 결정 맥락 문제에 대한 해석을 나눗셈 상황으로 한정하였다. 따라서 학생들이 단위비율 결정 맥락 문제를 어떻게 해석하는지에 대해서는 별도의 연구를 통해 확인해야 할 필요가 있다. 나아가 피제수와 제수 선택에 관해 제안된 지도 방안을 적용하여 그 효과를 실증적으로 밝히는 후속연구를 제안한다.

참 고 문 헌

강흥규 (2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. **한국초등수학교육학회지, 18**(2), 319-339.

교육과학기술부 (2014). **초등학교 교사용 지도서 3-1.** 서울: 천재교육

교육부 (2015). **초등학교 수학 익힘책 6-2.** 서울: 천재교육

교육부 (2018a). **초등학교 교사용 지도서 3-1.** 서울: 천재교육

교육부 (2018b). **초등학교 5-6학년군 교과용도서활용 연수 교재.** 충남: 공주교육대학교 교육연수원.

김경미, 강완 (2008). 초등학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 분석. **초등수학교육, 11**(1), 1-19.

김경미, 황우형 (2011). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석. **수학교육, 50**(3), 339-356.

김영아, 김동화, 노지화 (2016). 초등수학영재의 분수 나눗셈의 이해에 관한 연구. **East Asian Math. J., 32**(4), 565-587.

김창수, 전영배, 노은환 (2011). 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘(Division algorithm). **수학교육, 50**(3), 309-327.

노은환, 정상태, 김민정 (2015). 초등 수학에서 자연수와 분수의 사칙연산에 대한 개념 익히기 및 연산 사이의 연결 분석. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 563-588.

박교식, 권석일 (2011). 예비초등교사들이 분수 포함제의 몫과 나머지 구하기에서 범하는 오류에 대한 분석. **초등수학교육, 14**(3), 317-328.

박교식, 권석일 (2012). 우리나라 초등학교 수학 교과서의 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지 취급에서 나타나는 부적절한 관념과 그 개선에 관한 연구. **수학교육학연구, 22**(4), 445-458.

박교식, 송상헌, 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. **학교수학, 6**(3), 235-249.

박현미, 강완 (2006). 자연수의 나눗셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식. **한국초등수학교육학회지, 10**(2), 221-242.

방정숙, 김수정 (2007). 십진블록을 활용한 소수의 나눗셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정 분석. **수학교육학연구, 17**(3), 233-251.

안소현, 최창우 (2016). 분수의 곱셈과 나눗셈 오류 유형 진단 및 지도방안 연구. **한국초등수학교육학회지, 20**(3), 457-477.

임근광 (2010). 자연수의 나눗셈 오답사례 분석 및 지도방안에 대한 연구. **수학교육, 49**(2), 267-279.

임재훈, 김수미, 박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구 : 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **수학교육학연구, 7**(2), 103-121.

임재훈 (2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. **수학교육학연구, 9**(1), 13-28.

임재훈 (2013). 포함제와 등분제 맥락에서 자연수 나눗셈 계산법 지도의 문제. **한국초등수학교육학회지, 17**(3), 395-411.

임재훈 (2017). 확대 상황 포함나눗셈에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 21**(1), 115-134.

장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙, 이화영 (2018). 초등학교 수학 지도를 위한 이중수직선의 활용 방안 탐색. **학교수학, 20**(1), 227-249.

정상태 (2016). 소수 나눗셈에서 몫과 나머지에 관한 소고. **초등수학교육, 19**(3), 193-210.

조용진, 홍갑주 (2013). 분수 나눗셈의 지도에서 단위비율 결정맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구. **초등수학교육, 16**(2), 93-106.

하미현, 장혜원 (2016). 나머지가 있는 나눗셈 문장제에 대한 초등학교 6학년 학생들의 해결 전략 및 오류 분석. **한국초등수학교육학회지, 20**(4), 717-735.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates. Mahwah, NJ. 신현용 (역) (2002). **초등학교 수학 이렇게 가르쳐라.** 서울: 승산

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith. N. L. (2015). *Helping children learn mathematics,* 11th edition. John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 (역) (2017). **초등교사를 위한 수학과 교수법.** 서울: 경문사

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.153-161). Reston, VA: NCTM.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston, VA: NCTM. 방정숙 (역) (2013). **효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행.** 서울: 경문사.

<Abstract>

A Study on Selection of Dividend and Divisor in Context of Determination of a Unit Rate Problem

Kim, Jung Hoon[11]; & Jeong, Sangtae[12];
& Roh, Eun Hwan[13]; & Kim, Seon Yu[14]

Researchers have observed one student who had difficulty in formulating a division equation. In the context of determination of a unit rate problem based on one student's case and previous research, we tried to examine in detail how students expressed the division formula, how to select the dividend and the divisor, and how they learned about those. First, a questionnaire was developed to analyze student's reactions and applied to the research participants. Interviews were conducted to discover how the participants choose the dividends and divisors derived from their cognitive characteristics corresponding to their selection method. The research exposed that the majority of the participants had difficulty in deciding the dividends and divisors. Moreover, the research indicated information that teaching methods need to be reformed. Finally, we obtained suggestions to place emphasis on how to decide a dividend and a divisor, why they made such selection and what the equation means. We proposed a learning method for the research above.

Key words: Divide Status, Dividend and Divisor Selection, Division Formula, Context of Determination of a Unit Rate

논문접수: 2019. 04. 15
논문심사: 2019. 05. 09
게재확정: 2019. 05. 22

11) kjh2451@naver.com
12) hwarang0130@naver.com
13) ehroh9988@gmail.com
14) sykim@cue.ac.kr