한국초등수학교육학회지 23(3) 273-288.
2019. 8. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 23(3) 273-288.
August 31. 2019.

비례식 $a:b=c:d$의 의미 분석과 학습 지도에의 시사점

임재훈[1)]

본 연구의 목적은 식 $a:b=c:d$의 의미 구조를 분석하고 학습 지도에의 시사점을 확인하는 것이다. 분석 결과, 식 $a:b=c:d$는 다음과 같은 다중의 의미를 지니고 있다. 한 상황에 내재된 다른 비 구조, 다른 상황에 내재된 공통된 비 구조, 다른 상황에 내재된 제3의 수량의 같음. 식 $a:b=c:d$의 의미 학습 지도에서 단위를 유연하게 설정하여 한 상황에서 다른 구조 보기와 다른 상황에서 같은 구조 보기, 이중테이프 모델 사용, 양의 속성의 차이에 따른 비율의 의미와 그 중요성이 강조될 필요가 있다. $a:b=c:d$의 전체 의미 구조에 비추어 보면, 우리나라에서 이루어져 온 비례식 의미 학습 지도는 식 $a:b=c:d$의 의미의 한정된 부분을 제한된 방식으로 다루고 있다.

주제어: 비례 추론, 비례식, 비, 비율, 비례상수

Ⅰ. 서 론

본 연구의 주제는 식 $a:b=c:d$의 의미이다. 우리나라 교과서에서 이 식은 비례식이라고 불린다. 비례식 이해의 어려움을 야기하는 한 요인은 알고리즘 중심의 형식적인 학습 지도이다(정은실, 2013; 정영옥, 2015). 비례식을 세운 후 내항의 곱과 외항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 활용하면 미지값 문제라고 불리는 비례 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 그래서 교사나 학생들의 관심이 비례식을 문제 해결의 도구로 활용하는 것을 향하고 그 의미를 이해하는 것은 상대적으로 소홀히 될 우려가 있다.

비례 학습 지도에 관한 여러 연구가 지속적으로 이루어져 왔고, 이를 통해 곱셈적 사고 및 비례 추론에 적절한 다양한 상황과 문제를 사용할 것, 비례식의 성질을 이용한 형식적 절차 도입 전에 비형식적 전략을 강조할 것, 비례 추론에 도움이 되는 다양한 시각적 모델을 활용할 것과 같은 거시적인 지도 방향이 제안되었다(권미숙, 김남균, 2009; 김용익, 2009; 서은미, 방정숙, 이지영, 2017; 서은미, 2019; 임재훈, 이형숙, 2015; 장혜원, 박혜민, 김주숙, 임미인, 유미경, 이화영, 2017; 정은실, 2013; 정영옥, 2015; 정유경, 정영옥, 2015). 본 연구의 관심은 비례 학습 지도의 거시적인 고찰보다, 식 $a:b=c:d$의 의미에만 좁게 맞추어져 있다. 우리나라에서 비례 학습 지도에 대한 여러 연구가 이루어졌지만, 식 $a:b=c:d$에만 주목하여 그 의미를 분석하고 우리가 비례식을 가르쳐 온 방식을 그에 비

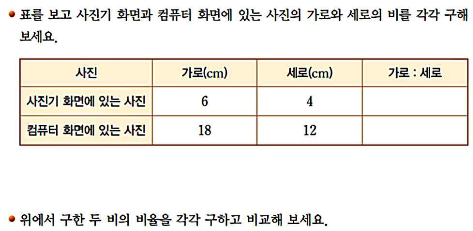
1) 경인교육대학교, 교수

추어 보는 작업은 이루어지지 않았다. 이에 본 연구에서는 식 $a:b=c:d$의 개념적 의미 구조를 분석하고, 이것을 틀로 삼아 우리나라 교과서에서 이 식의 의미를 다루어 온 방식을 반성적으로 고찰하며, 학습 지도에의 시사점을 확인한다.

Ⅱ. 우리나라의 비례식 도입 방식

우리나라 초등 수학에서 $a:b=c:d$ 꼴의 식은 비례식이라고 불린다. 비례식이라는 용어에서 짐작할 수 있듯이, 이 식은 비례식 단원[2]에서 도입되고, 그 이전 이후에 다른 단원에서 다른 방식으로 다루어지지 않는다. 그러므로 $a:b=c:d$ 꼴의 식의 의미 학습 지도는 비례식 단원에서 이루어지는 것이 전부라 해도 과언이 아니다.

비례식 단원에서 $a:b=c:d$ 꼴의 식이 도입되는 방식에는 두 가지 특징이 있다. 첫째, 서로 다른 두 상황으로부터 등식의 좌변과 우변에 오는 두 비를 얻는다. 예를 들어, [그림 1]의 2015 개정 교과서의 비례식 도입 상황에서, 사진기 화면에 있는 사진의 가로와 세로의 길이, 컴퓨터 화면에 있는 사진의 가로와 세로의 길이로부터 두 비 $6:4$와 $18:12$를 얻는다.



• 표를 보고 사진기 화면과 컴퓨터 화면에 있는 사진의 가로와 세로의 비를 각각 구해 보세요.

사진	가로(cm)	세로(cm)	가로 : 세로
사진기 화면에 있는 사진	6	4	
컴퓨터 화면에 있는 사진	18	12	

• 위에서 구한 두 비의 비율을 각각 구하고 비교해 보세요.

[그림 1] 비례식 도입 상황 (교육부, 2019c, p. 76)

둘째, 비율의 상등에 의존하여 비의 상등을 정의한다. 앞의 예에서라면, 사진기 화면에 있는 사진과 컴퓨터 화면에 있는 사진에서 얻은 두 비 $6:4$, $18:12$에서 각각 구한 비율이 같음을 확인하게 한다. 그리고 비율이 같은 두 비를 어떻게 식으로 나타내면 좋을지 생각해 보게 하고, "비율이 같은 두 비를 기호 '$=$'를 사용하여 $6:4=18:12$와 같이 나타낼 수 있습니다. 이와 같은 식을 비례식이라고 합니다(p, 77)."와 같이 두 비를 등호로 연결한 식을 도입한다.

이와 같은 비례식 도입 방식은 이전부터 이어져 온 것이다. <표 1>은 5차 교육과정부터 2009 개정 교육과정까지 우리나라 초등 수학 교과서에서 $a:b=c:d$ 꼴의 식이 비례식이라는 이름으로 도입되어 온 양상을 요약해 보여 준다. 사용된 구체적인 상황이나 수치, 비의 값이라는 용어를 사용하는가 비율이라는 용어를 사용하는가, 등식으로 나타낸 식이라는 표현을 쓰는가 등호를 사용하여 나타낸 식이라는 표현을 쓰는가와 같은 세부적인 점에서 차이는 있지만, 비율의 상등에 의존하여 비의 상등을 정의하는 것에서는 차이가 없다.

<표 1> 비례식의 정의 (장혜원 외, 2017, p. 236 <표 Ⅳ-2>에서 발췌)

	비례식
5차	1 : 2와 2 : 4의 비의 값은 같다. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \leftrightarrow 1:2=2:4$ 이와 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라 한다.
6차	5차와 동일 (수치만 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \leftrightarrow 2:3=4:6$으로 변경)
7차	2 : 3 = 4 : 6과 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라 한다.
2007 개정	7차와 동일 (수치만 3 : 2 = 60 : 40으로 변경)
2009 개정	비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 2 : 3 = 4 : 6과 같이 나타낸 식을 비례식이라 한다.

2) 2015 개정 교과서에서 이에 해당하는 단원은 6학년 2학기 4단원 비례식과 비례배분이다. 이 논문의 관심은 비례식에 한정되어 있으므로, 이를 비례식 단원이라고 줄여 부르기로 한다.

비율의 상등에 의존하여 두 비의 상등을 정의하는 것은 비단 우리나라만은 아니다. 일본도 비율의 상등에 의존하여 두 비를 등호로 연결한 식을 정의한다. 예를 들어, 東京書籍의 6-上 수학 교과서(藤井斉亮, 飯高茂 외, 2013c, p. 64)는 “비의 값이 같을 때 그것들의 「비는 같다」고 하고, 등호를 사용하여 다음과 같이 나타냅니다. $2:3=4:6$”과 같이 두 비를 등호로 연결한 식[3]을 도입한다. 중국의 초등 교과서(人民教育出版社课程教育研究所, 2012, p. 33)도 크기가 다른 두 국기의 가로와 세로의 길이에서 얻은 두 비 $2.4:1.6$, $60:40$의 비율이 $\frac{2.4}{1.6}=\frac{60}{40}$으로 같은 것을 바탕으로 두 비를 등호로 연결한 식 $2.4:1.6=60:40$을 도입한다.[4]

두 다른 상황에서 두 비를 구하고 비율의 상등에 의존하여 $a:b=c:d$ 꼴의 식을 도입하는 방법 자체에 내용상 오류나 형식상 결함이 있지는 않지만, 이것은 $a:b=c:d$ 꼴의 식이 지닌 의미를 종합적으로 취급하는 것은 아니다. $a:b=c:d$는 등식의 일종이다. 등식 A=B에서 좌변과 우변의 A와 B는 무엇인가가 다름을 나타내며, 가운데의 등호는 무엇인가가 같음을 나타낸다. 그러므로 등식의 이해에서는 좌변과 우변 그리고 등호를 어떻게 해석하고 그에 어떤 의미를 부여하는가가 중요하다. 우리나라의 비례식 도입에서 $a:b=c:d$의 좌변과 우변은 크기가 다른 닮은 두 사진과 같이 두 상황을, 등호는 두 다른 상황에서 나온 어떤 값이 같음을 나타낸다. 다음 장에서 논의하겠지만, $a:b=c:d$의 좌변과 우변, 등호는 이와 다르게 해석될 수 있다.

Ⅲ. 식 $a:b=c:d$의 의미 분석

본 장에서는 식 $a:b=c:d$의 의미 구조를 분석한 결과를 제시한다. 분석 결과, 식 $a:b=c:d$는 다음과 같은 다중의 의미를 지니고 있다: 한 상황에 내재된 서로 다른 비의 구조, 두 비가 나타내는 두 상황에 동일한 비의 구조, 두 상황 속에 내재된 제3의 수량의 같음. 다음에서는 이 각각에 대해 그 교육적 함의를 같이 논의한다.

1. $a:b=c:d$의 첫째 의미: 한 상황에 내재된 서로 다른 비 구조

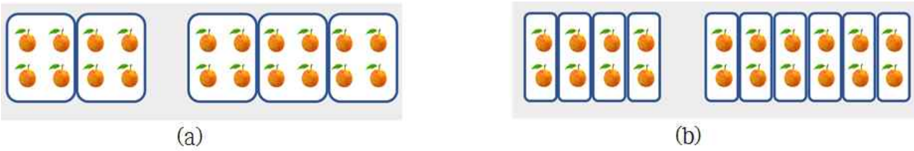
비례는 서로 다른 두 상황을 전제하는 것이 보통이다. 그래서 $a:b=c:d$를 비례식이라고 하면 이 식이 서로 다른 두 상황을 전제하는 것으로 여겨질 수 있다. 그러나 식 $a:b=c:d$는 두 비를 전제하지 두 상황을 전제하지는 않는다.

$a:b=c:d$는 두 양으로 이루어진 한 상황에 내재된 두 비의 구조를 나타내는 것으로 해석될 수 있다. 이때 등호는 상황의 동일함을, 좌변과 우변의 $a:b$와 $c:d$는 서로 다른 구조를 나타낸다. 예를 들어, $2:3=4:6$을 오렌지 (8개, 12개)로 이루어진 한 상황에 부여할 수 있는 두 구조를 나타내는 것으로 볼 수 있다. 오렌지 4개를 단위로 하면 (8개, 12개)는 2부분, 3부분의 구조를 지니고 이것은 $2:3$으로 표현할 수 있다([그림 2](a)). 오렌지 2

3) 우리나라와 달리, 일본 초등 교과서에서는 이런 식을 비례식이라고 부르지 않는다.

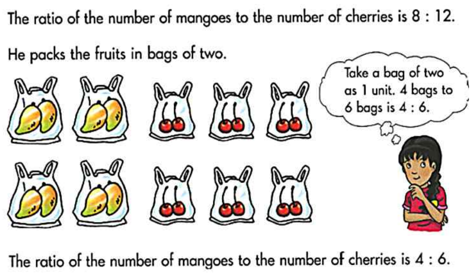
4) 본 연구의 수행 과정에서 7차 이후 우리나라 교과서와 일본, 중국, 대만, 싱가포르, 미국과 같은 해외 교과서의 $a:b=c:d$ 꼴의 식 도입을 살펴보았다. 그러나 본 연구의 목적은 교과서 비교나 소개에 있지 않으므로 이에 대해 따로 논의하지 않고, 본 연구의 초점인 식 $a:b=c:d$의 의미와 관련된 일부 사례만 논의에 보조적으로 사용하였다.

개를 단위로 하면 (8개, 12개)는 4부분, 6부분의 구조를 지니고 이것은 $4:6$으로 나타낼 수 있다([그림 2](b)).



[그림 2] (8개, 12개) 상황의 $2:3$ 구조와 $4:6$ 구조

식 $a:b=c:d$의 이러한 의미를 교재로 구현한 예를 싱가포르의 교과서에서 볼 수 있다([그림 3]). (망고 8개, 체리 12개)로 된 한 상황에서, 2개를 한 단위로 하여 망고의 수와 체리의 수의 비를 $4:6$으로 나타낼 수 있음을 알아보는 활동을 통해 $8:12=4:6=2:3$과 같은 식을 도입한다. 이와 같은 싱가포르 교과서의 $a:b=c:d$ 꼴의 식 도입 방식은 국내에 이미 소개된 바 있다. 장혜원 외(2017)는 2015 개정 교과서의 비례식 단원 구성의 시사점을 얻기 위한 교과서 비교 연구에서 싱가포르 교과서의 구체적 사례를 소개하였다. 선행 연구들에서 이 방식에 대한 평가는 긍정적이다. 정은실(2013)은 우리나라의 비례식 지도 방식이 알고리즘에 의해 결측치를 구하는 데 치중하고 있음을 지적하면서, 싱가포르 교과서와 같은 방식으로 비례식을 도입한다면 동치인 비의 의미를 보다 확실하게 알 수 있을 것이라고 하였다. 임경화(2007)도 싱가포르의 방식은, 비의 복잡함을 줄이려고 비를 비의 값으로 강등시켜 비에 대한 통찰을 줄이는 방식이 아니라, 분수에 의존하지 않고도 a대 b와 c대 d가 같음을 말할 수 있게 하는 비의 진정한 의미에 대한 접근이라고 평가하였다.



[그림 3] 싱가포르 교과서의 $a:b=c:d$ 도입(Collars, Koay, Lee, Ong, & Tan, 2014, p. 96)

이러한 긍정적 평가에도 불구하고 이 방식은 2015 개정 교과서에 반영되지 않았다. 이것은 이 방식의 도입이 기존의 도입 방식을 삭제하고 그 자리를 대체하는 식으로 간단히 될 것이 아님을 시사한다. 비례식 단원에서 $a:b=c:d$는 두 다른 상황을 나타내는 두 비를 전제로 하는 것이 보통이므로, 한 상황에서 단위를 바꾸어 가면서 비의 상등을 도입하는 이 방식으로 대체되기 곤란하다. 이 방식은 두 상황을 다루는 비례식 단원보다는 한 상황을 나타내는 비를 다루는 비와 비율 단원에서 구현하기에 편리해 보인다. 그런데 $a:b=c:d$를 비례식이라고 칭하면서 비례식 단원에서 취급해 온 전통에 비추어볼 때, $a:b=c:d$를 그 이전의 비와 비율 단원에서 취급하는 것은 작은 변화는 아닐 것이다.

앞에서 살펴본 바와 같이, 한 상황에서 서로 다른 비의 구조를 보기 위해서는 단위를 다르게 설정해야 한다. 이것은 단위에 대한 유연한 사고를 강화하는 데 도움이 될 수 있다. 또, $a:b=c:d$를 한 상황에 내재된 서로 다른 구조의 표현으로 보는 경험은 동일한 대상이 주체의 해석에 따라 상이한 구조로 파악될 수 있다는 인식의 일반적인 구성적 원리를 경험하는 기회도 될 수 있다.

2. $a:b=c:d$의 둘째 의미: 다른 상황에 공통된 비 구조

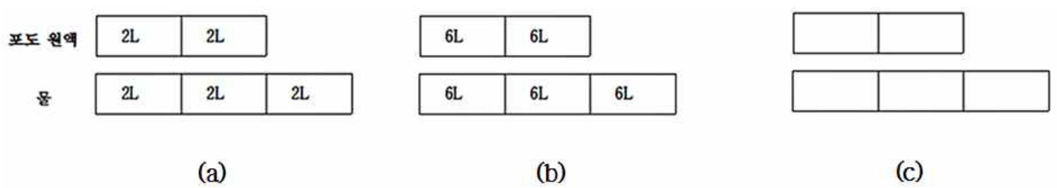
식 $a:b=c:d$는 다른 상황에 공통된 한 비의 구조를 나타낸다. 예를 들어, 포도 원액 4L와 물 6L를 섞어 음료를 만드는 (상황1)과 포도 원액 12L와 물 18L를 섞어 음료를 만드는 (상황2)가 있다고 하자. $a:b=c:d$의 첫째 의미, 즉 한 상황에 내재된 서로 다른 비의 구조를 파악하는 학습을 잘 한 아동이라면, 이 각 상황을 다양한 비로 나타낼 수 있을 것이다. 단위를 무엇으로 설정하는가에 따라 (상황1)과 (상황2)에서 포도 원액의 양과 물의 양의 비는 다르게 표현된다(<표 2>).

<표 2> (4L, 6L), (12L, 18L) 두 상황에 공통된 여러 비

상황1 (4L, 6L)	단위(L)	1	2	4	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	…
	비	$4:6$	$2:3$	$1:1.5$	$\frac{2}{3}:1$	$6:9$	$12:18$	…
상황2 (12L, 18L)	단위(L)	1	2	3	6	12	18	…
	비	$12:18$	$6:9$	$4:6$	$2:3$	$1:1.5$	$\frac{2}{3}:1$	…

<표2>의 상단과 하단에서 볼 수 있듯이, (상황1)과 (상황2)는 모두 같은 비들($2:3$, $4:6$, $6:9$, $1:1.5$, $\frac{2}{3}:1$, ...)로 나타낼 수 있다. 예를 들어, (상황1)에서 단위를 2L로, (상황2)에서 단위를 6L로 설정하면, 두 상황의 구조는 모두 $2:3$으로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 (상황1)에서 단위를 1L로, (상황2)에서 단위를 3L로 설정하면, 두 상황의 구조는 모두 $4:6$으로 나타낼 수 있다. 즉, 두 상황에는 공통된 구조가 존재하며, 이 공통된 구조는 $2:3$, $4:6$, $6:9$, $1:1.5$, $\frac{2}{3}:1$, ... 중 어느 것으로 나타낼 수 있다.

이제 이들 비 중에서 가장 간단한 자연수로 나타내어진 비인 $2:3$을 이 모든 비들의 일종의 대표로 삼고, $2:3$이 나타내는 구조에 대해 살펴보자. [그림 4]의 (a), (b)는 (상황1)과 (상황2)의 $2:3$ 구조를 이중테이프 모델로 나타낸 것이다.

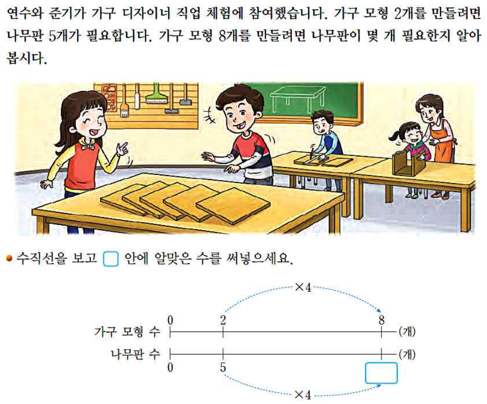


[그림 4] ⒜ (상황1)의 $2:3$ 구조, ⒝ (상황2)의 $2:3$ 구조
⒞ 일반적인 $2:3$ 구조의 이중테이프 표현

단위가 2L인가 6L인가만 다를 뿐, 그 단위가 어느 상황에서든 각각 2단위, 3단위 있다는 것은 같다. $4:6=12:18$에서 등호는 포도 원액 4L와 물 6L를 섞어 음료를 만드는 (상황1)과 포도 원액 12L와 물 18L를 섞어 음료를 만드는 (상황2)에 이와 같은 공통 구조가 존재함을 나타낸다. [그림 5]의 (a), (b)의 각 상황에서 취한 단위의 구체적인 특정한 양인 2L, 6L를 사상해 버리면, 포도 원액 2부분, 물 3부분으로 된 [그림 4](c)를 얻는다. 이때 네

모 한 칸은 어떤 특정한 양도 나타낼 수 있다. 이중테이프 모델에서 한 부분을 나타내는 한 칸은 일종의 변수로 기능하므로, [그림 4](c)는 포도 원액이 2단위, 물이 3단위 있는 임의의 상황을 잠재적으로 모두 나타낸다.

비례에 관한 선행 연구들은 비례 학습 지도에 다양한 시각적 모델을 적극적으로 사용할 것을 제안하였다(서은미, 2019; 임재훈, 이형숙, 2015; 장혜원 외, 2017; 정영옥, 2015). 장혜원 외(2017)는 이전 초등 수학 교과서들의 비례식 단원에서 시각적 모델 사용을 분석하고 이전 교과서가 다양한 시각적 표현의 부족으로 인해 학생들의 이해를 돕는 데 한계가 있다고 지적하였다. 이와 같은 제안을 반영하여, 2015 개정 교과서는 시각적 표현을 더 사용하고자 시도하였고, [그림 5]와 같이 비례식의 성질을 다루는 장면에 이중수직선 모델이 도입되었다. 그러나 $a:b=c:d$를 도입하고 그 의미를 다룰 때에는 시각적 모델이 여전히 사용되지 않고 있다. $a:b=c:d$의 둘째 의미의 도입은 이중테이프 모델의 사용과 같이 묶어 고려될 사항으로 보인다.



[그림 5] 비례식 단원에 도입된 이중수직선 (교육부, 2019c, p. 78)

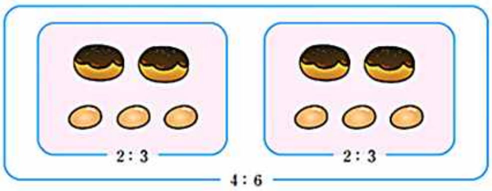
[그림 6] 이중테이프를 이용한 비례 문제 해결

이중테이프 모델을 활용하여 $a:b=c:d$의 의미를 지도하면, 비례식 관련 문제들을 현재보다 다양한 방식으로 다룰 수 있고 이는 비례 추론 신장에 도움이 될 수 있다. 예를 들어, 쌀 42kg과 잡곡 18kg을 섞어서 밥을 지었을 때 쌀과 잡곡의 양의 비가 7:3인지를 알아보는 문제를 이중테이프 모델을 사용하여 [그림 6]과 같이 다룰 수 있다.

두 상황에 공통된 비 구조의 존재라는 $a:b=c:d$의 둘째 의미를 어디에서 취급할지에 대해서 살펴보자. 두 상황에 공통된 비의 구조를 다루려면 두 상황이 전제되어야 한다. 그러므로 우선 고려할 수 있는 단원은 비례식 단원이다. 비와 비율 단원이 주로 한 상황의 탐구에 초점이 맞추어져 있다면, 비례식 단원은 두 상황의 탐구에 초점이 맞추어져 있기 때문이다.

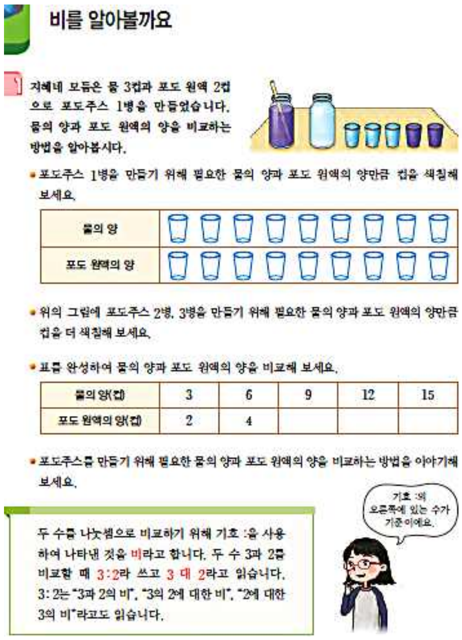
예를 들어, (빵 2개, 달걀 3개), (빵 4개, 달걀 6개)와 같은 상황을 생각해 보자. 이것은 7차 초등 교과서에서 비례식 도입에 사용되었던 것으로, 전형적인 비례 상황의 한 예이다. 7차 교과서에서는 (빵 2개, 달걀 3개), (빵 4개, 달걀 6개) 사이의 관계를 [그림 7]과 같이 빵 2개, 달걀 3개가 두 번 반복되어 빵 4개, 달걀 6개가 되는 것으로 묘사하였다. 이때 2:3의 2, 3이나 4:6의 4, 6은 모두 특정한 빵의 개수, 달걀의 개수를 뜻한다. 이와 같은

해석은, 비례 추론의 중요한 한 관점을 따른 것이지만, 본 연구의 초점인 식 $a:b=c:d$의 둘째 의미와는 거리가 있는 해석이다. 그렇지만, 이 문제 맥락 자체는, 위와 다르게 해석을 하면, 식 $a:b=c:d$의 둘째 의미의 학습 지도를 위한 맥락으로 사용될 수 있다, 예를 들어, (빵 4개, 달걀 6개)는 2개를 단위로 하면 (2부분, 3부분)의 구조가 되고, 이 2:3 공통 구조는 앞의 [그림 4]와 같은 방식으로 이중테이프로 표현될 수 있다.



[그림 7] 2:3의 반복으로서 4:6 (교육인적자원부, 2004, p. 100)

$a:b=c:d$의 둘째 의미를 비례식 이전 단원인 비와 비율 단원에서 취급하는 것도 가능해 보인다. 비와 비율에서는 한 상황에 대한 탐구가 주된 초점이므로 $a:b=c:d$의 둘째 의미를 다룰 수는 없을 것이라고 생각할 수 있다. 그런데 초등 수학 교과서에는 [그림 8]과 같이 비와 비율 단원에서 비를 도입할 때 두 가지 이상의 상황을 제시하고 있다. 비를 도입할 때 이와 같이 둘 이상의 상황을 제시한 것은 비가 두 양의 덧셈적 관계를 보는 절대적 비교를 위한 것이 아니라 곱셈적 관계를 보는 상대적 비교를 위한 도구임을 강조하려는 의도에 기인한 것으로 보인다. 이전 7차 교과서에는 (남학생 3명, 여학생 5명)이라는 한 상황이 주어지고 남학생 수와 여학생 수를 비교하는 과제가 제시되었는데, 정은실(2003a)은 이러한 과제는 곱셈적 비교의 필요성과 타당성을 아동들이 인식하기에 적절하지 않다고 비판하였다. 이후 곱셈적 비교가 덧셈적 비교보다 타당하게 느껴지는 맥락을 비 도입 시 제공하려는 시도가 이루어져 왔고, 최근에는 [그림 8]처럼 표를 사용하여 여러 상황을 같이 제시하기에 이르렀다. 이같이 복수의 상황이 제시된 것은 이 단원에서도 $a:b=c:d$의 둘째 의미의 학습 지도를 시도할 수 있는 가능성을 열어 준다.


비를 알아볼까요

지혜네 모둠은 물 3컵과 포도 원액 2컵으로 포도주스 1병을 만들었습니다. 물의 양과 포도 원액의 양을 비교하는 방법을 알아봅시다.

- 포도주스 1병을 만들기 위해 필요한 물의 양과 포도 원액의 양만큼 컵을 색칠해 보세요.

물의 양	
포도 원액의 양	

- 위의 그림에 포도주스 2병, 3병을 만들기 위해 필요한 물의 양과 포도 원액의 양만큼 컵을 더 색칠해 보세요.
- 표를 완성하여 물의 양과 포도 원액의 양을 비교해 보세요.

물의 양(컵)	3	6	9	12	15
포도 원액의 양(컵)	2	4			

- 포도주스를 만들기 위해 필요한 물의 양과 포도 원액의 양을 비교하는 방법을 이야기해 보세요.

두 수를 나눗셈으로 비교하기 위해 기호 :을 사용하여 나타낸 것을 비라고 합니다. 두 수 3과 2를 비교할 때 3:2라 쓰고 3 대 2라고 읽습니다. 3:2는 "3과 2의 비", "3의 2에 대한 비", "2에 대한 3의 비"라고도 읽습니다.

[그림 8] 비의 도입(교육부, 2019b, p. 76)

$a:b=c:d$의 둘째 의미를 어디서 지도하든, 추구하는 것은 비의 의미의 깊은 이해이다. 처음에 아동은 비 2:3을 예를 들어, 포도 원액 2L, 물 3L만을 지시하는 것으로만 생각할 수 있고, 이러한 생각은 2:3에 대한 이해의 출발점으로는 괜찮다. 그러나 2:3을 계속 포도 원액 2L, 물 3L인 특정한 한 상황의 표현으로만 본다면 이것은 비에 대한 매우 제한된 이해이다. 포도 원액의 양과 물의 양의 비가 2:3이라는 것에서, 구체적인 포도 원액과 물의 양은 알 수 없다는 것, 단위가 몇 L든 간에 포도 원액의 양은 그것의 2배이고 물의 양은 그것의 3배라는 것, 단위가 정해지면 비로소 그 구체적인 양이 정해진다는 것을 아는 것이 중요하다. 아동이 $a:b=c:d$의 둘째 의미를 이해하게 되면, 비 2:3은 단순히 포도 원액 2L, 물 3L만을 지시하는 것이 아니라,

포도 원액 2부분, 물 3부분으로 이루어진 모든 상황에서 두 양의 관계를 일반적으로 나타내는 표현임을 알게 된다.

정영옥(2015)에 의하면, 비는 두 대상의 곱셈적인 관계를 나타내는 표현이고 비례는 두 비가 같음을 나타내는 표현이라는 식으로 구분되기도 하지만, “비의 개념에 대한 진정한 이해가 비의 동치관계를 파악하는 것이라면, 비와 비례는 그 뿌리는 하나이며, 두 순서쌍의 비에 한정되지 않는다(p. 24).” 비와 비례 개념의 진정한 의미는 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는 데에 있다(정은실, 2003b). Freudenthal(1983)은 두 양의 관계를 나타내는 비를 하나의 수로 나타내지 않고도 비의 같음에 대해 a가 b에 대한 것은 c가 d에 대한 것과 같다고 말할 수 있는 것이 비의 의미라고 하였다. 서로 다른 상황에서 공통된 비의 구조를 보는 $a:b=c:d$의 둘째 의미의 학습 지도는 이와 같은 이해를 추구한다.

3. $a:b=c:d$의 셋째 의미: 다른 상황에 내재된 제3의 수량의 같음

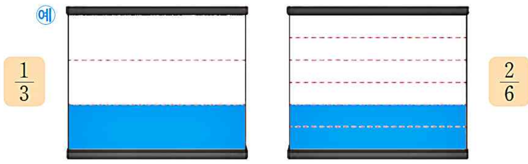
식 $a:b=c:d$의 첫째 의미와 둘째 의미는 등호가 나타내는 같음을, 한 상황의 다른 구조든 다른 상황의 공통 구조든, 제3의 수량을 개입시키지 않고 비의 표현 영역 내에서 해석한다. 이와는 달리 $a:b=c:d$의 셋째 의미는 등호가 나타내는 같음을 제3의 수량을 개입시켜 해석한다. 우리나라에서 이전부터 해온 비율이 같은 두 비를 매개로 $a:b=c:d$를 정의하는 것은 이에 해당한다. 이 방식은 비의 상등을 비율의 상등으로 환원하는 것이므로 비율 개념의 이해와 연결되어 있다. 다음에서는 먼저 비의 상등을 비율의 상등으로 환원하는 것과 관련된 이슈를 하나 논의하고, 두 상황 속에 내재된 제3의 수량의 같음이라는 $a:b=c:d$의 의미의 학습 지도에서 양의 속성의 차이에 주목할 필요가 있음을 논의한다.

가. 분수와 비례

비율은 (비교하는 양)÷(기준량)이며, 비례식을 도입할 때 대개 분수 형태로 표현된 비율이 사용된다. 그러므로 비율의 상등에 의존하여 비례식을 도입한다는 것을 동치분수에 의존하여 비례식을 도입한다고 바꾸어 말해도 무리가 없다. 그런데 주어진 상황에서 비율이 지니는 의미를 온전히 드러내지 못한 채 두 비 $a:b$와 $c:d$의 같음을 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$의 같음에 의존하여 정의하면, $a:b=c:d$는 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$를 단지 비라는 새로운 표현 형식으로 바꾸어 쓴 것에 불과하게 된다.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$는 아동들이 비를 학습하기 전에 크기가 같은 분수를 학습하면서 이미 배운 표현이다. 그러므로 아동들은 크기가 같은 분수를 학습하면서 형성한 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$의 의미 덩어리를 $a:b=c:d$를 학습하는 새로운 상황에 가지고 올 개연성이 있다. 초등수학에서 동치분수는 대개 [그림 9]와 같이 다루어진다. $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$에서 좌변과 우변의 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$는 무엇인가 다름을 나타낸다. $\frac{1}{3}$은 3등분하고 한 부분을 취하는 것을, $\frac{2}{6}$는 6등분하고 두 부분을 취하는 것을

나타내는데, 이때 등분하는 횟수도 다르고 취하는 부분의 개수도 다르다. $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$에서 등호는 무엇인가 같음을 나타낸다. 이때 같은 것은 무엇인가? [그림 9]의 좌우에 색칠된 영역은 동일한 한 대상을 나타낸다. 그러므로 동치분수를 학습하면서 아동들은 두 동치분수가 동일한 대상의 다른 표현이라는 관념을 형성하게 된다.



[그림 9] $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ (교육부, 2019a, p.224)

그런데 이러한 관념은 비례식 단원에서 분수의 상등에 의존하여 비의 상등을 이해하려 할 때 어려움을 낳을 수 있다. 분수의 상등에서는 대상이 동일하지만, 비례식 단원에서 비례식이 도입될 때에는 대상이 달라진다. 예를 들어, (농축액 1L, 물 3L) 상황과 (농축액 2L, 물 6L) 상황은 서로 다른 두 상황이고, 두 상황에서 농축액의 양, 물의 양이 서로 다르다. 이렇게 보면, 분수의 상등에 의존하여 비의 상등을 도입하는 것은 한 대상의 다른 구조를 나타내는 표현($\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$)에 의존하여 다른 두 대상에 공통 구조가 존재함을 나타내는 표현($1:3=2:6$)을 정의하는 것으로 보인다. 한 대상에서 다른 구조를 보는 것과 다른 두 대상에서 공통 구조를 보는 것은 다르다. 아동들이 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$에서 [그림 9]와 같은 관념을 떠올린다면, 한 대상의 다른 구조를 나타내는 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$가 어떻게 다른 두 대상을 나타내는 $1:3$과 $2:6$을 등호로 연결하는 근거가 되는지 이해하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 분수의 상등에 기초하여 비의 상등을 도입할 때, 이전의 학습에서 형성된 아동들의 관념이 가져올 수 있는 어려움에 주의할 필요가 있다.

나. 양의 속성의 차이에 따른 $\frac{a}{b}$의 의미와 중요성

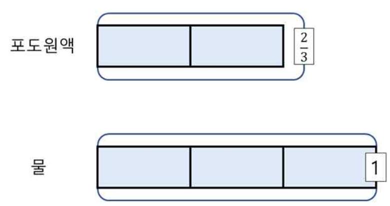
식 $a:b=c:d$의 셋째 의미의 학습 지도와 관련하여, 김수미(2015)와 이정은, 김지원, 박교식(2015)의 연구를 살펴볼 필요가 있다. 김수미(2015)는 수학용어에 대한 논쟁을 통해 본 비에 대한 미국과 한국의 관점차를 분석하였다. 그는 우리나라의 비, 비율, 비의 값, 미국의 ratio, rate과 같은 용어의 의미 비교를 바탕으로, 우리나라는 관계(비)와 그 관계를 표현한 수량(비율)을 구분함으로써 수학의 논리성이나 치밀함을 추구하지만 양의 속성이나 단위의 종류와 같은 비의 본질적 속성을 놓치고 있다고 지적하였다. 비는 두 양의 관계에 주목하는 개념이므로 양의 속성에 주목하는 것이 중요한데, 비와 비율이라는 용어는 외적 형태, 즉 $a:b$는 비, $\frac{a}{b}$는 비율이라는 식의 구분을 강화하여 비의 본질적 속성인 양에 대한 탐색을 놓치게 만들 수 있다는 것이다. 그는 이에 대한 개선 방안으로, 우리나라 수학과 교육과정에 제시된 비 관련 용어로는 비에 내재된 본질적 속성을 다루기에 부족하므로, 별도의 용어를 개발하여 두 양의 속성이 동질적인 경우와 이질적인 경우를 명확히 구분할 것을 제안하였다.

한편, 이정은, 김지원, 박교식(2015)은 우리나라와 일본의 초등 수학 교과서에 제시된 비율의 정의를 비교하고, 비율을 내적 비율을 의미하는 것으로 한정하여 사용할 필요가 있

다고 하였다. 이것은 비율이라는 용어를 비교하는 양이 기준량의 몇 배인지를 나타내는 상황, 즉 동질적인 두 양을 다룰 때만 사용하고, 속력이나 밀도가 나오는 이질적인 두 양을 다룰 때는 사용하지 말자는 제안으로 보인다. 이들의 연구의 기초가 된 일본 초등 교과서들을 보면, 동질적인 양 사이의 비율을 와리아이(割合)라고 부르고, 이질적인 양 사이의 비율은 와리아이라 부르지 않고 단위량당의 크기라고 하고 있다. 또 이 두 가지 비율을 별도의 단원으로 분리하여 다룬다. 예를 들어, 東京書籍의 교과서에서는 동질적인 양 사이의 비율(와리아이)은 5학년 2학기에, 이질적인 양 사이의 비율(단위량당의 크기)은 5학년 1학기에 각각 별도의 단원에서 다룬다(藤井斉亮, 飯高茂 외, 2013a, 2013b). 우리나라가 이 두 가지를 모두 비율이라고 부르며 한 단원에서 다루는 것과는 다르다.

양의 속성의 차이를 드러내는 새로운 용어의 개발, 양의 속성의 차이에 따른 분리 취급과 같이 세부 주장에서는 차이가 있지만, 이 두 연구는 공통적으로 양의 속성의 차이, 즉 동질적인 양 사이의 비 또는 비율인지 이질적인 양 사이의 비 또는 비율인지가 비와 비율의 이해에 매우 중요하다는 견해를 표명하고 있다. 이 견해는 식 $a:b=c:d$의 셋째 의미인 두 상황 속에 내재된 제3의 수량의 같음의 학습 지도와 관련해서 매우 중요하다. 두 상황 속에 내재된 제3의 수량의 의미와 중요성이 부각되지 않으면, 비의 상등이 단지 형식적으로 두 분수의 수치적인 상등으로 환원되어 버리기 때문이다.

$a:b=c:d$의 셋째 의미의 핵심을 이루는 두 상황에 내재된 제3의 수량의 의미는 동질적인 두 양의 비 맥락과 이질적인 두 양의 비 맥락에서 다르다. 동질적인 두 양의 비 맥락에서 비율은 배율을 뜻한다. 2015 개정 교과서에서도 “연수네 모둠은 도넛 20개 중에서 10개를 팔았습니다. 판매한 도넛 수는 처음에 있던 도넛 수의 몇 배인지 알아봅시다.(교육부, 2019b, p. 78)” 와 같이 몇 배를 나타내는 비율의 의미를 강조하고 있다. 그러나 이것으로는 $\frac{a}{b}$가 지닌 배율의 의미를 온전히 드러내지 못한다. 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 할 때, 비율을 구하려면 기준량을 단위 곧 1로 삼아 비교하는 양을 재어야 하며 이때 비교하는 양의 크기는 비율과 같다. 그런데 교사는 기준량이라는 표현에서 단위 또는 수 1을 읽어낼 수 있더라도, 아동들은 단위 또는 수 1을 읽어내지 못할 수 있다. 이것은 ‘6의 $\frac{2}{3}$는 4’ 라는 분수 개념에서 6을 1로 보지 못하고 $\frac{2}{3}$를 단지 3등분하고 2부분 취하는 조작의 의미로만 제한되게 이해하는 아동들이 있는 것과 유사하다. 기준량이 수 1로 명확히 표현될 때, 그에 대비하여 $\frac{2}{3}$가 지닌 수로서의 위상이 부각될 수 있다. [그림 10]과 같이 기준량이 단위 또는 수 1이라는 것을 드러내어 다룰 필요가 있다. 이러한 이해에는 등식 $a:b=c:d$의 첫째 의미가 관련되어 있다. [그림 10]에 묘사된 상황은 네모 한 칸을 단위로 하면 $2:3$, 네모 세 칸을 한 단위로 하면 $\frac{2}{3}:1$로 표현된다.

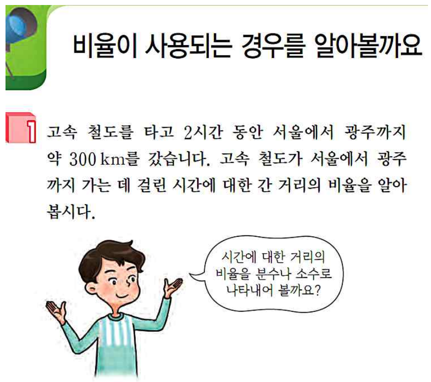


[그림 10] $2:3=\frac{2}{3}:1$

네모 한 칸이 나타내는 양의 크기가 달라짐에 따라 포도 원액과 물의 양이 달라지고, 포도 원액의 양을 y, 물의 양을 x라고 하면, 이 두 양 사이의 관계는 $y=\frac{2}{3}x$로 나타내어진다. 이때 비례상수 $\frac{2}{3}$는 x, y의 구체적인 수치가 무엇인가에 상관없이 y는 x의 $\frac{2}{3}$배라

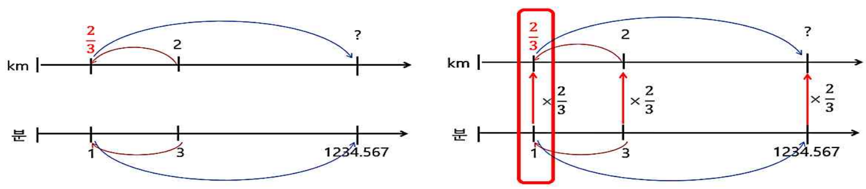
는 것, 즉 x를 단위로 보면 y는 언제나 그것의 $\frac{2}{3}$라는 것을 나타낸다.

이제 이질적인 두 양 사이의 비와 비율에 대해 살펴보자. 2015 개정 교과서의 비와 비율 단원에서 비와 비율이 도입되는 맥락은, 알뜰 시장을 준비하는 사람 수와 판매하는 사람 수, 나무의 길이와 그림자의 길이, 물의 양과 포도 원액의 양, 판매 금액과 기부 금액, 처음에 있던 도넛 수와 판매한 도넛 수, 액자의 가로의 길이와 세로의 길이와 같이 모두 동질적인 두 양이 주어지는 상황이다(pp. 74-79). 그런데 그에 바로 이어지는 비율의 활용에는 시간과 거리, 인구와 넓이와 같은 이질적인 두 양으로 이루어진 상황들이 나온다([그림 11]). 앞부분에서 비율을 도입하고 그 의미를 학습할 때에는 동질적인 두 양을, 뒷부분에서 비율을 활용할 때에는 이질적인 두 양을 사용하고 있다. 앞부분에서 비율을 정의할 때는 동질적인 두 양 사이의 배율로서의 의미만 다룬다는 점을 고려하면, 뒷부분의 이질적인 두 양으로 이루어진 상황을 앞부분에서 학습한 비율의 활용 상황으로 보는 것이 타당한가라는 의문이 제기될 수 있다. 이질적인 두 양으로 된 상황은 형식상으로는 한 양을 다른 한 양으로 나누어 얻은 값(비율)의 활용 상황으로 볼 수 있다. 그러나 의미상으로는 앞에서 학습한 배율과는 구분되는 비율의 새로운 의미를 학습하는 장으로 보아야 한다. 여기서 비율의 이 새로운 의미의 학습이 충실히 이루어지는가가 관건이 된다.



[그림 11] 비율의 활용 (교육부, 2019b, p. 80)

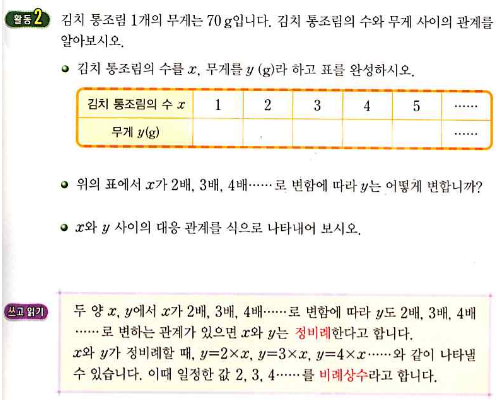
이질적인 두 양으로 된 한 상황을 넘어, 이질적인 두 양으로 된 두 상황, 예를 들어 3분에 2km 달리는 차가 12분간 달리는 거리 구하기와 같은 상황을 생각해 보자. 이 문제는 3분을 4번 더하면 12분이 되고 마찬가지로 2km를 네 번 더하면 8km가 된다는 식으로 해결할 수 있다. 그러나 이런 방법으로는 예를 들어 1234.567분과 같이 복잡한 수치로 시간이 주어졌을 때 그에 대응하는 거리를 구하기 어렵다. 이러한 문제의 일반적 해결을 위해서는 단위량에 대응하는 양을 알아내는 것이 중요하다. 3분에 2km 달리는 차가 1분 동안 간 거리는 $\frac{2}{3}km$이다. 그러면 x분 동안 간 거리는 $\frac{2}{3}x$가 되어, 임의의 시간이 복잡한 수치로 주어져도 그 시간 동안 간 거리를 바로 구할 수 있다([그림 12]). 이와 같이 단위량당의 크기 또는 단위율을 알아내는 것이 이러한 문제를 일거에 해결하는 열쇠가 된다는 것을 아동들이 인식하게 하는 것이 중요하다.



[그림 12] (2km, 3분) 상황에서 비율 $\frac{2}{3}$

우리나라 교과서의 비례식 단원에서는 이질적인 두 양으로 된 비례 문제를 여럿 다룬다. 12분 동안 충전하면 150km를 달릴 수 있는 전기 자동차가 500km를 달리려면 몇 분 동안 충전해야 하는지, 손수건에 천연 염색을 하기 위해 양파 껍질 100g에 물 4L가 필요할 때 양파 껍질 25g에는 물 몇 L가 필요한지, 김밥 2인분을 만드는 데 필요한 밥의 양이 400g일 때 5인분을 만드는 데 필요한 밥의 양은 몇 g인지와 같은 문제들이 나온다(교육부, 2019c). 그런데 이와 같은 문제들은 비례식 활용 문제로 취급되어 비례식의 성질을 써서 해결하는 것이 그 주요 내용이 되고, 단위량에 대응하는 양을 구하는 것이 이러한 문제의 일반적 해결에 중요하다는 생각은 부각되지 않고 있다. 이질적인 두 양으로 된 비례 상황에서 비율이 지니는 의의와 중요성이 아동들에게 의식될 수 있도록 하는 학습 지도 방안을 모색할 필요가 있다.

3분 동안 $2km$ 달리는 자동차 상황에서, $\frac{2}{3}$는 1분간 달린 $\frac{2}{3}km$라는 거리나 $\frac{2}{3}km/$분이라는 물리량(속력)뿐 아니라, [그림 12]의 오른쪽 그림에서 볼 수 있듯이, 시간 공간에서 거리 공간으로의 함수를 뜻한다. 시간을 x, 거리를 y라고 하면, $y=\frac{2}{3}x$이다. $y=kx$ 꼴의 정비례 관계식은 우리나라에서 초등에서 다루어질 때도 있고 중등에서 다루어질 때도 있다. [그림 13]은 2009 개정 교과서에서 비례상수를 정의하는 방식을 보여준다. 통조림의 수와 무게라는 이질적인 두 양으로 된 상황에서, 통조림의 수를 변화시키면서 표를 완성하고 그로부터 정비례 관계식을 끌어내는 활동을 한 후 비례상수를 정의한다. 그런데 $y=2\times x$, $y=3\times x$, $y=4\times x$,..에서 일정한 값 2, 3, 4, ...를 비례상수라고 한다고 정의할 뿐, 이 수가 어떤 의미를 지니고 있으며 왜 중요한지는 명시적으로 다루어지지 않는다.


활동 2 김치 통조림 1개의 무게는 70 g입니다. 김치 통조림의 수와 무게 사이의 관계를 알아보시오.

- 김치 통조림의 수를 x, 무게를 y (g)라 하고 표를 완성하시오.

김치 통조림의 수 x	1	2	3	4	5	……
무게 y(g)						……

- 위의 표에서 x가 2배, 3배, 4배……로 변함에 따라 y는 어떻게 변합니까?
- x와 y 사이의 대응 관계를 식으로 나타내어 보시오.

쓰고 읽기 두 양 x, y에서 x가 2배, 3배, 4배……로 변함에 따라 y도 2배, 3배, 4배……로 변하는 관계가 있으면 x와 y는 정비례한다고 합니다.
x와 y가 정비례할 때, $y=2\times x$, $y=3\times x$, $y=4\times x$……와 같이 나타낼 수 있습니다. 이때 일정한 값 2, 3, 4……를 비례상수라고 합니다.

[그림 13] 정비례와 비례상수 (교육부, 2015a, p. 139)

정비례 단원은 그 이전의 비와 비례의 학습을 종합, 정리하는 최종 단계이다. 비와 비율이 $a:b$로 표현되는 한 상황, 비례식이 $a:b$, $c:d$로 표현되는 두 상황을 다룬다면, 정비례는 그 관계가 $y=\frac{a}{b}x$로 표현되는 두 양 x, y가 임의로 변하는 모든 상황을 다룬다고 할 수 있다. 이전의 비, 비례 학습을 바탕으로 정비례 학습 지도에서 비례상수 $\frac{a}{b}$의 의미 이해가 충실히 이루어지도록 할 필요가 있다.5)

5) 교육과정에 따라 정비례 관계식과 비례상수를 초등에서 다루기도 하고 중등에서 다루기도 한다. 현재 정비례 관계식과 비례상수는 중학교 1학년에 나온다. 그러나 비례 상황에서 나오는 제3의 수량인 $\frac{a}{b}$의 의미와 중요성, 예를 들어 $\frac{a}{b}$가 이질적인 두 양으로 된 비례 상황에서 단위량당의 크기 또는 단위율을 뜻하며, 이것을 알아내는 것이 비례 문제의 일반적 해결의 중요한 열쇠라는 것은 초등에서 비례 문제를 다루면서 지도될 수 있다.

Ⅳ. 결 론

우리나라 교육과정(교육부, 2015b)에서 비례는 규칙성 영역에 속하고, 비례를 명시적으로 다루는 단원으로는 비와 비율, 비례식, 정비례가 있다. 비례에 대한 명시적인 학습이 초등 고학년에서 시작된다고 해서 비례 추론의 발달이 그때 시작되는 것은 아니다. 초등학교 고학년에서 시작되는 명시적인 비례 학습 지도는, 그 이전부터 진행되어 온 비례 추론 능력을 본격적으로 신장하면서, 비례 상황을 $a:b=c:d$, 나아가 $y=kx$와 같은 식으로 표현하고 이 식의 의미를 이해하고 사용할 수 있게 하는 것을 지향한다. Lamon(2007)은 비례 추론(proportional reasoning)과 비례성(proportionality) 사이에 어떤 관련이 있으며 무엇이 비례성의 이해를 구성하는지를 연구할 문제의 하나로 제안한 바 있다. 비례성은 식 $a:b=c:d$이나 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$로 쓸 수 있는 특별한 관계를 가리키며 $y=kx$ 꼴의 선형함수로 표현될 수 있다(Lanius & Williams, 2003). 본 연구에서 수행한 식 $a:b=c:d$에 대한 의미 분석 작업은 비례 추론에서 비례성으로의 연결성 문제를 다룬 것으로도 볼 수 있다.

본 연구에서 $a:b=c:d$의 의미를 분석한 결과는 <표 3>과 같이 정리할 수 있다.

<표 3> 식 $a:b=c:d$의 의미 분석 결과

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">상황</th><th colspan="2">등식</th><th rowspan="2">특징</th></tr>
<tr><th>좌변, 우변</th><th>등호</th></tr>
<tr><td>의미①</td><td>단일 상황</td><td>다른 비 구조</td><td>상황의 동일함</td><td rowspan="2">• 비의 표현 영역 내에서 식 해석
• 단위의 유연한 설정과 사용
-한 상황에서 다른 비의 구조 보기
-다른 상황에서 같은 비의 구조 보기
• 이중테이프 모델 (의미②)</td></tr>
<tr><td>의미②</td><td>복수 상황</td><td>상황의 다름</td><td>공통인 비 구조의 존재</td></tr>
<tr><td>의미③</td><td>복수 상황</td><td>상황의 다름</td><td>상황에 내재한 제3의 수량의 같음</td><td>• 제3의 수량을 나타내는 분수 표현 도입
• 양의 속성 차이 중요
-동질적인 두 양 상황
배율 (기준량 → 수 1)
-이질적인 두 양 상황
단위량당의 크기, 단위율
(미지값 비례 문제의 일반적 해결의 열쇠)
• 정비례 관계식 $y=kx$의 비례상수 k와 연결성</td></tr>
</table>

이상과 같은 $a:b=c:d$의 전체 의미 구조에 비추어 보면, 우리나라에서 이루어져 온 비례식의 의미 학습 지도는 식 $a:b=c:d$의 의미의 한정된 부분을 제한된 방식으로 취급하는 것으로 보인다. 또, 비례식 학습 지도에서 단위의 유연한 설정과 사용으로 한 상황에서 다른 비의 구조 보기와 다른 상황에서 같은 비의 구조 보기, 이중테이프 모델, 양의 속성의 차이에 따른 비율의 의미 및 그 중요성에 그다지 주목하지 않는다. 이와 같은 점에 주목하여 식 $a:b=c:d$의 의미 이해를 도모하는 교재 개발과 수업 연구가 이루어지길 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2015a). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015b). **2015 개정 수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

교육부 (2019a). **수학 5-1 교사용 지도서**. 서울: 천재교육.

교육부 (2019b). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2019c). **수학 6-2 (심의본)**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2004). **수학 6-가**. 대한교과서주식회사.

권미숙, 김남균 (2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 211-229.

김수미 (2015). 수학용어에 대한 논쟁을 통해 본 비 (比) 에 대한 미국과 한국의 관점차. **수학교육학연구, 25**(3), 431-448.

김용익 (2009). **비례상황에 기초한 비의 지도 방법 연구**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

서은미 (2019). **초등학교 수학 수업을 위한 이중 척도 모델의 활용 방안 탐색**. 한국교원대학교 박사학위논문.

서은미, 방정숙, 이지영 (2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석: 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 중심으로. **수학교육학연구, 27**(4). 791-810.

이정은, 김지원, 박교식 (2015). 우리나라와 일본의 초등학교 수학 교과서에 제시된 비율의 정의 비교 연구. **한국초등수학교육학회지, 19**(4) 485-499.

임경화 (2007). **한국과 싱가포르의 수학교과서 비교연구-비와 비례 단원을 중심으로**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

임재훈, 이형숙 (2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구, 25**(2), 189-209.

장혜원, 박혜민, 김주숙, 임미인, 유미경, 이화영 (2017). 비례식과 비례배분에 대한 초등 수학 교과서 비교 분석. **학교수학, 19**(2). 229-248.

정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구, 25**(1), 21-58.

정유경, 정영옥 (2015). 초등학생들의 비례 추론 전략 분석 -6학년을 중심으로-. **한국초등수학교육학회지, 19**(4) 457-484.

정은실 (2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

정은실 (2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

정은실 (2013). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014). *Shaping maths coursebooks 5A*. Marshall Cavendish Education.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). National Council of Teachers of Mathematics, Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lanius, C. S., & Williams, S. E. (2003). Proportionality: A unifying theme for the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(8), 392.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013a). 新しい算數 5-上. 東京: 東京書籍.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013b). 新しい算數 5-下. 東京: 東京書籍.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013c). 新しい算數 6-上. 東京: 東京書籍.

人民教育出版社课程教材研究所 (2012). 义务教育教科书教师数学用书数学六年级下册. 北京: 人民教育出版社.

<Abstract>

Meaning of the Expression $a:b=c:d$ and Implications for Teaching

Yim, Jaehoon[6)]

This study focuses on understanding proportionality, in particular, what constitutes relational understanding of $a:b=c:d$, which is called proportional expression. The meanings of $a:b=c:d$ are analyzed and some suggestions are offered for improving the teaching and learning of it.

The equation $a:b=c:d$ has three different meanings. First, it represents two different structures in one proportional situation. Second, it represents a common structure in two different proportional situations. Finally, it represents a number or a quantity underlying in different proportional situations.

It is important to choose and use a unit flexibly to understand the first and the second meanings of $a:b=c:d$, Double strip diagram and double number line are useful to visualize the meanings of $a:b=c:d$. In addition, what a number or a quantity in the third meaning of $a:b=c:d$ refers to in proportional situations should be emphasized in teaching and learning of $a:b=c:d$.

Key words: proportional reasoning, proportion, ratio, rate, constant of proportionality

논문접수: 2019. 07. 15
논문심사: 2019. 08. 03
게재확정: 2019. 08. 22

6) jhyim@ginue.ac.kr