

Block Matrix Preconditioner와 IE-FFT를 이용한 침투 가능한 구조물의 전자기 산란해석에 관한 연구

A Study on Electromagnetic Scattering Analysis of Penetrable Objects Using Block Matrix Preconditioner(BMP) and IE-FFT

강 주 환^{*}

Ju-Hwan Kang^{*}

Abstract

In this paper, we presents the integral equation-fast Fourier transform(IE-FFT) and block matrix preconditioner (BMP) to solve electromagnetic scattering problems of penetrable structures composed of dielectric or magnetic materials. IE-FFT can significantly improve the amount of calculation to solve the matrix equation constructed from the moment method(MoM). Moreover, the iterative method in conjunction with BMP can be significantly reduce the number of iterations required to solve the matrix equations which are constructed from electrically large structures. Numerical results show that IE-FFT and block matrix preconditioner can solve electromagnetic scattering problems for penetrable objects quickly and accurately.

요 약

본 논문은 integral equation-fast Fourier transform(IE-FFT)과 block matrix preconditioner(BMP)를 이용하여 침투 가능한 구조물의 전자기 산란 문제를 다룬다. IE-FFT는 모멘트 법(the method of Moments : MoM)에 의해 형성된 행렬방정식의 해를 계산하기 위하여 반복법의 연산량을 상당히 개선할 수 있다. 또한 전기적으로 커다란 구조물로부터 형성된 행렬방정식에 BMP가 적용된 반복법을 적용하면 반복 횟수를 크게 줄여 행렬방정식의 해를 빠르게 계산할 수 있다. 수치해석 결과는 IE-FFT와 BMP를 적용하여 침투 가능한 구조물의 전자기 산란 문제를 빠르고 정확하게 계산할 수 있음을 보여준다.

Key words : Method of Moments(MoM), IE-FFT, Electromagnetic Scattering, Preconditioner, BMP

1. 서론

표면 적분방정식(surface integral equation)은 도체, 유전체로 구성된 구조물의 전자기 문제를 해석하는데 널리 사용되고 있다[1-6]. 표면 적분방정식은 구조물

표면 위에 유기된 전류(electric current) 및 자류(magnetic current)를 이용한 등가원리(equivalent principle)와 경계조건(boundary condition)을 적용하여 공식화하고, 표면에 유기된 등가 전류를 계산함으로써 구조물에 의한 전자기 문제를 분석한다

* Defense Agency of Technology and Quality, 2nd Aeronautical systems team

★ Corresponding author

E-mail : jhkang88@dtaq.re.kr, Tel : +82-55-279-4081

※ This work was supported by the 2019 research fund of Defense Agency for Technology and Quality

Manuscript received, May. 29, 2019; revised, Jun. 24, 2019; accepted Jun. 26, 2019.

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

[1, 2]. 또한 표면 적분방정식 내에 존재하는 그린 함수(Green's function)로 인하여 자동적으로 방사 조건(radiation condition)을 만족하기 때문에 다른 수치해석 기법에서 발생하는 분산(dispersion) 등과 같은 수치적 오차를 줄일 수 있다. 게다가 표면 적분방정식은 구조물에 대해서만 이산화(discretization) 하기 때문에 전자기 방사 및 산란과 같은 문제를 효율적으로 분석할 수 있다[2].

표면 적분방정식을 이용하여 침투 가능한(penetrable) 구조물의 전자기 현상을 분석하기 위한 방법으로 combined tangential formulation(CTF) 등과 같이 많은 방법들이 존재한다[1, 3, 4]. 표면 적분 방정식은 모멘트 법(the method of moments : MoM)을 이용하여 행렬방정식으로 변환하고, 행렬방정식을 계산함으로써 전류와 자류를 구할 수 있다. 모멘트 법에서 형성된 행렬방정식의 크기가 $N \times N$ 일 때 행렬 요소들을 저장하기 위한 메모리와 반복법에서 필요한 행렬 벡터 곱(matrix-vector multiplication) 연산은 각각 $O(N^2)$ 을 필요로 한다. 따라서 행렬방정식의 크기가 증가할수록 필요한 저장 공간과 계산량이 급격히 증가하는 단점이 존재한다. 본 논문에서는 모멘트 법의 단점을 보완하기 위한 가속화 방법 중 integral equation-fast Fourier transform (IE-FFT)을 적용하였다. IE-FFT 알고리즘은 그린 함수의 Toeplitz 특성을 이용하여 행렬 곱 연산 시 FFT를 적용할 수 있고, 이로 인하여 반복법에 필요한 행렬 벡터 곱 연산을 $O(N^{1.5} \log N)$ 으로 개선할 수 있다[5, 6]. 따라서 본 논문에서는 기존 완전도체(perfect electric conductor)로 구성된 산란체의 전자기 산란 해석을 위하여 전계적분방정식(electric field integral equation)에 적용된 IE-FFT 알고리즘을 CTF에 적용하였다. 그 결과 IE-FFT 알고리즘을 이용하여 유전체 또는 자성체로 구성된 구조물의 전자기 산란 해석이 가능하도록 하였다.

하지만 위에서 언급한 반복법은 행렬 방정식의 특성에 따라 해를 계산 시 원하는 해로 수렴하는데 많은 반복 횟수를 필요로 하는 수렴속도 문제가 존재한다. 따라서 본 논문에서는 반복법의 수렴속도 문제를 개선하기 위한 방법으로 IE-FFT로부터 형성된 근접영역(near zone)의 행렬요소들을 이용하여 block matrix preconditioner(BMP)를 생성하여 반복법에 적용하였다[7]. 또한 모멘트 법을 이용하여 형성된 행렬방정식의 특성과 희소행렬 reordering

방법을 적용하여 BMP 계산에 필요한 저장공간 및 계산량의 효율성을 향상시켰으며, 형성된 BMP를 반복법에 결합하여 행렬방정식의 해를 계산하는데 필요한 수렴속도 문제를 상당히 개선하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 침투 가능한 구조물의 전자기 산란 해석을 위한 표면적분방정식에 대한 방정식과 IE-FFT 방법을 기술하였고, 반복법의 단점인 수렴속도 문제를 개선하기 위한 BMP에 대하여 다루었다. 3장에서는 2장에서 언급한 방법을 바탕으로 한 시뮬레이션 결과를 다룬다. 끝으로 4, 5장에서는 본 논문의 결론과 향후 연구방향에 대하여 나타내었다.

II. 본론

1. 침투 가능한 구조물 해석을 위한 적분방정식

그림 1과 같이 입사파(incident wave)가 자유공간(free space)에 유전체 또는 자성체로 구성된 구조물에 입사할 때 생성되는 산란파(scattered wave)는 등가원리와 경계조건을 이용하여 계산할 수 있다[1, 2, 8]. 구조물에 의해 발생하는 산란파는 식 (1), (2)과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{E}^{scat} = -\eta_0 L_0(\vec{J}) - K(\vec{M}) \tag{1}$$

$$\vec{H}^{scat} = K(\vec{J}) - \eta_0^{-1} L_0(\vec{M}) \tag{2}$$

여기서 η_0 는 자유공간의 임피던스를 의미하며, 윗첨자 scat는 산란파를 나타낸다. \vec{J} , \vec{M} 은 각각 구조물 표면 위에 유기된 등가 전류와 자류이다. 연산자 L 과 K 연산자는 식 (3), (4)와 같다.

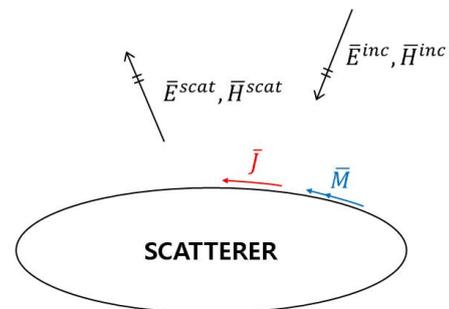


Fig. 1. Principle of Surface Equivalent.

그림 1. 표면 등가 원리

$$L_i(\vec{X}) = jk_i \left[\iint_{S'} \left(\vec{X}(\vec{r}') + \frac{\nabla}{k_i^2} \nabla' \cdot \vec{X}(\vec{r}') \right) G_i(\vec{r}, \vec{r}') dS' \right] \tag{3}$$

$$K(\bar{X}) = \nabla \times \iint_{S'} \bar{X}(\bar{r}') G(\bar{r}, \bar{r}') dS' \quad (4)$$

식 (3), (4)의 적분은 구조물 표면에 대한 적분을 의미한다.

본 논문에서는 time convention $e^{j\omega t}$ 를 사용하였으며 j 는 허수($\sqrt{-1}$), ∇ 벡터 미분연산자(gradient), $G_i(\bar{r}, \bar{r}')$ 는 각 매질에 해당하는 그린함수는 $e^{-jk_i|\bar{r}-\bar{r}'|}/4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|$ 이며, k_i 는 각 매질의 파수(wave number)를 나타낸다. \bar{r} , \bar{r}' 은 각각 관측위치(observation position), 소스위치(source position)를 의미한다.

식(1), (2)와 경계조건 및 그림 1 (a)에서 나타낸 것과 같이 러브의 정리(Love's theorem)을 이용하면 구조물 외부에 대한 적분방정식은 식 (5), (6)과 같다.

$$[\eta_0 L_0(\bar{J}) + K_0(\bar{M})]_{\tan} + \frac{1}{2} \hat{n} \times \bar{M} = \bar{E}_{\tan}^{inc} \quad (5)$$

$$[-K_0(\bar{J}) + \eta_0^{-1} L_0(\bar{M})]_{\tan} + \frac{1}{2} \hat{n} \times \bar{M} = \bar{H}_{\tan}^{inc} \quad (6)$$

\hat{n} 은 표면에 수직한 법선단위벡터(normal unit vector)이다.

식 (5), (6)에서 윗 첨자 inc는 입사파를 나타내며 아래첨자 tan은 필드의 접선성분을 의미한다. 마찬가지로 구조물 내부에 대한 적분방정식은 식 (7), (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$[\eta_1 L_1(\bar{J}) + K_1(\bar{M})]_{\tan} + \frac{1}{2} \hat{n} \times \bar{M} = 0 \quad (7)$$

$$[-K_1(\bar{J}) + \frac{1}{\eta_1} L_1(\bar{M})]_{\tan} + \frac{1}{2} \hat{n} \times \bar{M} = 0 \quad (8)$$

여기서 η_1 은 매질의 임피던스이다. 식 (5)에 η_0^{-1} 를 곱하고 식 (7)에 η_1^{-1} 를 곱한 후 더하면 식 (9)를 얻을 수 있으며, 식 (6)에 η_0 를 곱하고 식 (8)에 η_1 를 곱한 후 더하면 식 (10)을 얻을 수 있다.

$$[L_0(\bar{J}) + L_1(\bar{J})]_{\tan} + \frac{1}{2} \hat{n} \times \bar{M} [\eta_0^{-1} - \eta_1^{-1}] + [\eta_0^{-1} K_0(\bar{M}) + \eta_1^{-1} K_1(\bar{M})]_{\tan} = \eta_0^{-1} \bar{E}_{\tan}^{inc} \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} \hat{n} \times \bar{J} [\eta_0 - \eta_1] - [\eta_0 K_0(\bar{J}) + \eta_1 K_1(\bar{J})]_{\tan} + [L_0(\bar{M}) + L_1(\bar{M})]_{\tan} = \eta_0 \bar{H}_{\tan}^{inc} \quad (10)$$

식 (9), (10)로부터 얻어진 적분방정식 내에 존재하는 미지함수 \bar{J} , \bar{M} 은 식 (11), (12)와 같이 알고

있는 기저함수(basis function)으로 표현하여 근사화 할 수 있다.

$$\bar{J}(\bar{r}') \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \bar{f}_n(\bar{r}') \quad (11)$$

$$\bar{M}(\bar{r}') \approx \sum_{n=0}^{N-1} b_n \bar{f}_n(\bar{r}') \quad (12)$$

식 (11), (12)에서 N 은 기저함수의 수를 나타내며 a_n, b_n 은 기저함수의 미지 계수(unknown coefficient)를 의미한다. 본 논문에서는 등가 전류(\bar{J})와 자류(\bar{M})를 근사화하기 위하여 Rao-Wilton-Glisson RWG 기저함수를 이용한다[7]. 식 (13)과 같은 행렬방정식은 갤러킨 방법(Galerkin's method)을 적용하여 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (13) Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} 행렬의 각 요소(entry)는 식(14)~(16)와 같으며, V_1 , V_2 벡터의 요소들은 식 (17), (18)과 같다. 또한 식 (13)의 a, b는 식 (11)과 식 (12)의 미지 계수에 대한 벡터표현이다.

$$[Z_{11}]_{mn} = [Z_{22}]_{mn} = \langle \bar{f}_m, L_1(\bar{f}_n) + L_2(\bar{f}_n) \rangle \quad (14)$$

$$[Z_{12}]_{mn} = -\langle \bar{f}_m, \frac{K_1(\bar{f}_n)}{\eta_0} + \frac{K_2(\bar{f}_n)}{\eta_1} \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1} \right) \langle \bar{f}_m, \hat{n} \times \bar{f}_n \rangle \quad (15)$$

$$[Z_{21}]_{mn} = -\langle \bar{f}_m, \eta_0 K_1(\bar{f}_n) + \eta_1 K_2(\bar{f}_n) \rangle + \frac{1}{2} (\eta_0 - \eta_1) \langle \bar{f}_m, \hat{n} \times \bar{f}_n \rangle \quad (16)$$

$$[V_1]_m = \langle \bar{f}_m, \eta_0^{-1} \bar{E}_{\tan}^{inc} \rangle \quad (17)$$

$$[V_2]_m = \langle \bar{f}_m, \eta_0 \bar{H}_{\tan}^{inc} \rangle \quad (18)$$

식 (14)~(18)에서 $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ 은 내적 $\iint \bar{x} \cdot \bar{y} dS$ 을 나타낸다.

2. IE-FFT에 의한 행렬방정식 계산

식 (13)은 $O(N^2)$ 의 메모리와 반복법을 이용하여 행렬방정식을 계산할 때 $O(N^2)$ 의 행렬 벡터 곱(matrix-vector multiplication)을 필요로 한다. 따라서 행렬방정식이 크기가 증가하면 많은 메모리와 계산량이 급속히 증가하는 단점이 존재한다. 이를 해결하기 위하여 integral equation-fast Fourier

transform(IE-FFT) 등과 같은 가속화 방법(fast method)을 적용하면 반복법에서 요구되는 행렬 곱 연산량을 줄일 수 있다[5, 6].

모멘트 법의 가속화 방법들은 식 (19)와 같이 행렬 벡터 곱 계산 시 근거리 영역(near zone)과 원거리 영역(far zone)으로 나누어 계산을 수행한다[5, 6]. 근거리 영역에 해당하는 행렬의 요소들은 식 (14)~(16)을 직접 계산하며 이때 형성된 행렬은 희소행렬(sparse matrix)이다. 원거리 영역에 해당하는 요소들은 근사화하여 행렬 곱 연산을 수행한다.

$$ZI = Z^{near}I + Z^{far}I \tag{19}$$

IE-FFT의 핵심은 보간(interpolation)을 이용하여 그린함수(Green's function)를 소스격자(source grid)와 관측격자(observation grid)로 맵핑하는 것이다.

IE-FFT 방식을 모멘트법에 적용하기 위하여 그림 2와 같이 해석 대상을 내부에 포함할 수 있는 크기의 직육면체를 형성한다. 형성된 직육면체를 일정한 크기의 셀(cell)로 나누고 보간법을 이용하여 그린함수를 각 격자위로 근사화 하여 표현한다. 근사화된 그린함수는 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(\bar{r}, \bar{r}') \approx \sum_{l=0}^{N_y-1} \sum_{l'=0}^{N_y-1} \beta_l^p(\bar{r}) g_{l,l'} \beta_{l'}^p(\bar{r}') \tag{20}$$

N_y 는 전체 격자의 갯수를 나타낸다. l 과 l' 은 \bar{r} , \bar{r}' 을 포함하는 셀의 격자를 나타낸다. 소스 격자와 관측격자의 인덱스는 $l=(i,j,k)$, $l'=(i',j',k')$ 로 표현하며 $0 \leq i, i' \leq N_x$, $0 \leq j, j' \leq N_y$, $0 \leq k, k' \leq N_z$ 이다. 여기서 N_x, N_y, N_z 는 x, y, z 축 방향으로의 격자의 갯수를 나타낸다. β_l^p 와 $\beta_{l'}^p$ 는 식 (21)과 같이 관측 및 소스 셀에 해당하는 l, l' 격자들을 이용한 p 차 라그랑지 보간(Lagrange interpolation)을 나타

낸다. 또한 $g_{l,l'}$ 은 l 번째 격자와 l' 번째 사이의 그린함수 값(라그랑지 계수)이다.

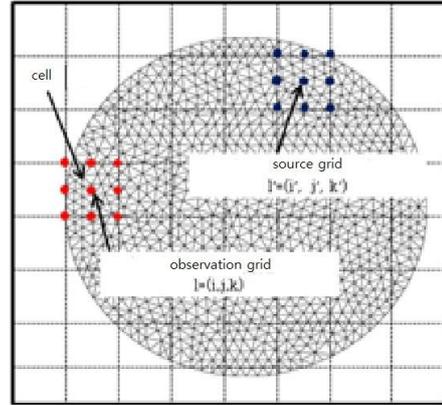


Fig. 2. Cells and grids constructed on the structures to be analyzed.

그림 2. 해석 대상이 되는 구조물 위에 생성된 셀과 격자

$$\beta_{l(i,j,k)}^p(\bar{r}) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^{p-1} \frac{(x-x_s)}{(x_i-x_s)} \prod_{\substack{t=0 \\ t \neq j}}^{p-1} \frac{(y-y_t)}{(y_j-y_t)} \prod_{\substack{u=0 \\ u \neq k}}^{p-1} \frac{(z-z_u)}{(z_k-z_u)} \tag{21}$$

식 (20)과 같이 소스영역과 관측영역이 분리된 그린함수를 이용하여 앞 장의 행렬 방정식의 원거리 영역에서의 행렬 방정식은 식 (22), (23)과 같이 근사화할 수 있다. 또한 근거리 영역에서는 원거리 영역을 통하여 계산된 값을 보정(correction)하여 식 (24)와 같이 표현할 수 있다.

$$Z_{mn}^{near} = \begin{cases} Z_{mn} - \hat{Z}_{mn}, & \text{if } d_{mn} \leq d_{near} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{24}$$

식 (24)에서 d_{mn} 은 m 번째 요소와 n 번째 요소 사이의 거리를 의미하고 d_{near} 는 근접영역을 결정짓는 파라미터이다. 또한 Z_{mn} 은 근거리 영역에 해당하는 요소들의 상호 작용은 식 (14)~(16)을 직접 계산한 것을 나타내며 \hat{Z}_{mn} 은 식 (22), (23)을 이용

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}_m, L_i(\bar{f}_n) \rangle &\approx jk_i (A^A G A^A) - j/k_i (A^D G A^D) \\ &= jk_i \sum_{l=0}^{N_y-1} \sum_{l'=0}^{N_y-1} g_{l,l'} \left(\iint \bar{f}_m(\bar{r}) \beta_l^p(\bar{r}) dS \right) \left(\iint \bar{f}_n(\bar{r}') \beta_{l'}^p(\bar{r}') dS' \right) \\ &\quad - j/k_i \sum_{l=0}^{N_y-1} \sum_{l'=0}^{N_y-1} g_{l,l'} \left(\iint \nabla \cdot \bar{f}_m(\bar{r}) \beta_l^p(\bar{r}) dS \right) \left(\iint \nabla' \cdot \bar{f}_n(\bar{r}') \beta_{l'}^p(\bar{r}') dS' \right) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}_m, K_i(\bar{f}_n) \rangle &\approx A^K G A^A \\ &= \sum_{l=0}^{N_y-1} \sum_{l'=0}^{N_y-1} g_{l,l'} \left(\iint \bar{f}_m(\bar{r}) \times \nabla \beta_l^p(\bar{r}) dS \right) \left(\iint \bar{f}_n(\bar{r}') \beta_{l'}^p(\bar{r}') dS' \right) \end{aligned} \tag{23}$$

하여 계산한 것을 의미한다.

근거리 영역과 원거리 영역의 상호작용을 이용하여 형성된 행렬 방정식의 행렬 벡터 곱은 식 (19)와 같이 계산할 수 있다. 식(25)에서 근접영역에 대한 행렬 곱은 희소행렬의 행렬 벡터 곱이 되고 원거리 영역에 대한 행렬 곱은 그린함수의 Toeplitz 특성 및 고속이산푸리에변환(fast fourier transform : FFT)를 이용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} ZI &= Z^{near}I + Z^{far}I \\ &\approx Z^{near}I \\ &\quad + jk_i A^A [FFT_{3D}^{-1} FFT_{3D}(G) FFT_{3D}(A^A I)] \\ &\quad - j/k_i A^D [FFT_{3D}^{-1} FFT_{3D}(G) FFT_{3D}(A^D I)] \\ &\quad + A^K [FFT_{3D}^{-1} FFT_{3D}(G) FFT_{3D}(A^K I)] \end{aligned} \quad (25)$$

원거리 영역에 대한 상호작용은 각 격자에 해당하는 그린함수의 Toeplitz 특성 및 고속이산푸리에 변환(fast fourier transform : FFT)을 이용하여 계산할 수 있다. 원거리 상호작용에 대한 행렬 벡터 곱은 식 (26)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,N} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,1} & g_{N,2} & \cdots & g_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{1-N} \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{2-N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\bar{Y} = \bar{G} \bar{X}$$

식 (26)에서 \bar{Y} 와 \bar{X} 는 벡터를 의미한다. 또한 \bar{G} 는 Toeplitz 행렬이다. 식 (25)의 행렬-곱 연산 시 행렬 \bar{G} 를 식 (27)과 같이 cyclic 행렬로 변환할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \\ Y_{N+1} \\ \vdots \\ Y_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{1-N} & 0 & g_{N-1} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{2-N} & g_{1-N} & 0 & \cdots & g_2 \\ g_2 & g_1 & \cdots & g_{3-N} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{-1} & & & & & & & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} M_{sparse}^{-1} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}_{sparse}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & -Z_{11}^{-1}Z_{12} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (Z_{22} - Z_{21}Z_{11}^{-1}Z_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -Z_{21}Z_{11}^{-1} & I_2 \end{bmatrix} \\ \approx \begin{bmatrix} I_1 - Z_{11}^{-1}Z_{12} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Z_{11}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -Z_{21}Z_{11}^{-1} & I_2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_{sparse} \end{aligned} \quad (29)$$

Cyclic 행렬-벡터 곱 연산은 고속푸리에 변환을 이용하여 식 (28)과 같이 표현할 수 있다[8].

$$Y = FFT^{-1}[FFT(\bar{g})FFT(X)] \quad (28)$$

여기서 $\bar{g} = [g_0 g_{-1} g_{-2} \cdots g_1]^T$ 이며, 고속푸리에 변환을 이용하게 되면 행렬-곱에 소요되는 연산량을 대폭 줄일 수 있다.

3. Block Matrix Preconditioner(BMP)

반복법은 행렬방정식의 조건 수(condition number)에 크게 의존하는 단점이 존재한다. 즉 행렬방정식의 조건 수가 높다면 반복법을 이용하여 해를 구할 때 많은 반복횟수가 필요하거나 발산하는 경우가 존재한다[9]. 본 논문에서는 반복법이 가진 문제를 보완하기 위하여 기존 PEC 구조물에서 저주파 문제에 적용하였던 BMP를 적용하였다[10]. 식 (13)과 같이 형성된 2×2 블록 행렬의 역행렬은 식 (29)과 같다.

식 (29)에서 Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} 들은 식(24)의 근접영역에 해당하는 원거리 영역의 요소(\hat{Z})들로 보정되지 않은 요소들을 나타내며 각각 희소행렬이다. 식 (29)의 첫 번째 식은 Z_{11} , $Z_{22} - Z_{21}Z_{11}^{-1}Z_{12}$ 의 역행렬을 포함한다. 계산 단순화를 위하여 $Z_{22} - Z_{21}Z_{11}^{-1}Z_{12} \approx Z_{22} = Z_{11}$ 으로 근사화하면 위의 행렬은 Z_{11} 블록의 역행렬과 비대각 블록 요소로 표현할 수 있다. 따라서 BMP 형성을 위하여 Z_{11}^{-1} 의 역행렬만 계산하면 된다. Z_{11} 의 근사 역행렬 계산을 위하여 다양한 방법이 존재하지만 본 논문에서는 incomplete LU threshold(ILUT)를 적용하였다[9]. 또한 approximate minimum degree(AMD)을 적용하여 ILU 분해 시 발생하는 채워넣는(fill-in) 요소를 줄였다[11]. ILUT 계산 시 임계레벨(threshold level)은 식 (28)과 같이 설정하였다.

$$|Z_{mn}^{-1}| > 10^{-3} \sqrt{|Z_{mm}Z_{nn}|} \quad (30)$$

이러한 특성들을 이용하여 식 (29)과 같이 형성된 BMP는 각각의 순차적인 행렬 곱을 통하여 적용되며 반복법에서 필요한 반복횟수를 대폭 줄일 수 있다.

III. 해석결과

BMP가 적용된 IE-FFT를 이용하여 구(sphere), 콘스피어(cone-sphere), 큐브(cube)에 대하여 전자기 산란을 분석하였다. 해석대상은 삼각형의 각 변의 길이가 평균적으로 자유공간에서 해석 주파수에 해당하는 파장(λ_0)의 1/10이 되도록 매쉬를 형성하였고, IE-FFT를 적용하기 위한 격자 간격은 $\lambda_1/6$ 으로 설정하였다. 여기서 λ_1 은 매질내에서 해석 주파수에 해당하는 파장을 의미한다. β^p 는 2차 라그랑지 보간법을 이용하였다. 또한 근거리 영역에 해당하는 d_{near} 는 $0.25\lambda_0$ 으로 설정하였다.

IE-FFT로부터 형성된 행렬방정식을 계산하기 위하여 GMRES(50) [12]을 적용하였으며 상대오차(Relative error)가 10^{-4} 이하이거나 반복 횟수가 1,000번을 넘으면 중단하도록 하였다. 해석에 사용된 컴퓨터의 CPU(Central Processing Unit)는 I5 2.3 GHz이고, RAM은 16 GB를 이용하였다.

첫 번째 대상은 매질이 $\epsilon_r = 4.4 - j0.2$, $\mu_r = 1.5 - j0.1$ 이고 반경이 $5\lambda_0$ 인 구에 대한 전자기 산란을 분석하였다. 생성된 삼각형의 갯수는 86,862개이며 미지수는 260,586개이다. 입사파의 입사 방향은 $-z$, 전계의 편파는 x 방향인 평면파가 구에 입사하였을 때, $\phi=0$ 인 $x-z$ 평면에서 각도의 변화에 따라 계산한 바이스테틱 레이더 단면적(bistatic radar cross section)은 그림 2와 같다. 계산 결과의 정확도를 확인하기 위하여 분석 해인 Mie-series와 비교하였다[12]. 그림 2에서 본 것처럼 IE-FFT를 이용한 계산 결과는 분석해와 비교하였을 때 일치함을 확인할 수 있다.

두 번째는 $\epsilon_r = 8.0 - j0.16$, $\mu_r = 1.0$ 인 콘스피어이다. 해석주파수는 750 MHz이며 콘스피어의 크기는 반경이 1 m이고 전체 길이가 11 m이다. 생성된 삼각형의 갯수는 30,134개이며 미지수는 129,990개이다. 입사 방향은 $-z$ 방향, 전계는 x 방향인 평면파가 입사하였을 때, $\phi=0$ 인 $x-z$ 평면에서 각도의 변화에 따라 계산한 바이스테틱 레이더 단면적은

그림 3과 같다. IE-FFT를 이용하여 콘스피어의 산란 해석결과를 Poggio, Muller, Chang, Harrington, Wu Tasi-multilevel fast multipole method(PMCHWT-MLFMM)[1]으로부터 계산한 결과와 비교하였을 때 패턴 및 레벨이 유사함을 확인할 수 있다.

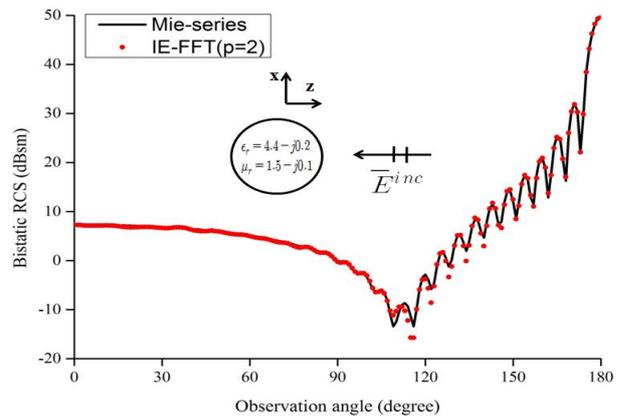


Fig. 3. The bistatic RCS pattern of a sphere with 5λ radius.
그림 3. 구성된 5λ 반경을 가진 구의 바이스테틱 레이더단면적 패턴

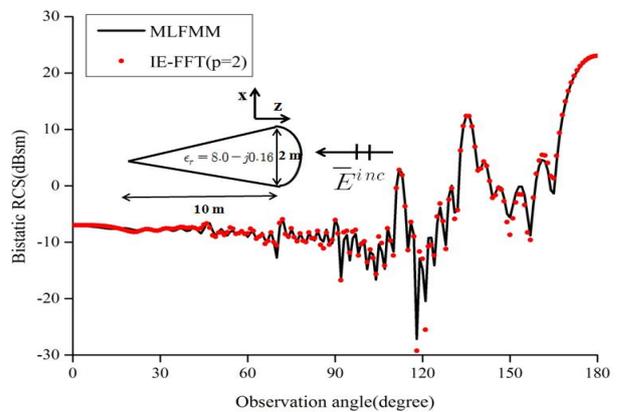


Fig. 4. The bistatic RCS pattern of a cone-sphere with 1m radius and the total length of 11m.
그림 4. 반경 1m, 전체길이 11m인 콘스피어의 바이스테틱 레이더단면적 패턴

세 번째는 $\epsilon_r = 4.0$, $\mu_r = 1.0$ 인 큐브이다. 해석주파수는 1.2 GHz이며 큐브는 각 변의 길이가 1 m이다. 생성된 삼각형의 갯수는 26,576개이며 미지수는 79,728개이다. 입사 방향은 $-z$ 방향, 전계는 x 방향인 평면파가 입사하였을 때, $\phi=0$ 인 $x-z$ 평면에서 각도의 변화에 따라 계산한 바이스테틱 레이더 단면적은 그림 4와 같다. 이전과 마찬가지로 IE-FFT를 이용하여 큐브의 산란해석 결과를 PMCHWT-MLFMM으로부터 계산한 결과와 비교

하였을 때 전반적으로 레이더단면적 패턴 및 레벨이 유사하나 60~120도 사이에서 패턴이 상이함을 확인할 수 있다.

두 결과의 차이는 K 연산자의 singularity로 인한 것으로 판단된다. PMCHWT에서는 $1/2\hat{n} \times \bar{X}$ 이 포함되어 있지 않으나, CTF 공식에서 $1/2\hat{n} \times \bar{X}$ 이 포함되어 있다. $1/2\hat{n} \times \bar{X}$ 은 매끄러운 구조물(구, 원형 등)에 대해서는 오차가 작으나 모서리가 존재하는 구조에 대해서는 오차가 발생된다[1, 13, 14].

끝으로 위 3가지 구조물에 대하여 IE-FFT와 BMP가 결합되어 계산한 속도와 IE-FFT 단독으로 계산하였을 때의 계산 결과를 표 1에 나타내었다. 표 1에서 첫번째열의 괄호는 미지수의 갯수이다. 또한 두번째열은 preconditioner를 형성하는데 필요한 용량을 나타낸 것이다. 세 번째(number of iteration)와 네 번째(solution time) 열은 GMRES(50)을 적용하여 해를 계산하는데 필요한 반복횟수와 preconditioner 형성시간을 포함하여 행렬방정식을 계산하는데 소요된 시간을 나타낸다.

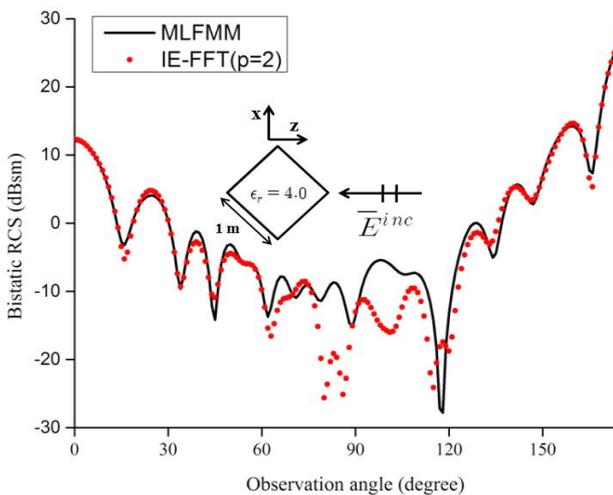


Fig. 5. The bistatic RCS pattern of a cone-sphere with 1m length.

그림 5. 길이가 1 m인 큐브의 바이스테틱 레이더단면적 패턴

BMP 없이 GMRES만 이용하여 콘스피어와 큐브에 대한 해석을 수행하였을 때 1,000번의 반복횟수에도 해가 수렴하지 않음을 확인할 수 있다. 또한 구에 대한 구조물에 대해 확인한 결과 BMP가 적용되었을 때 약 6배 빠르게 계산할 수 있음을 확인할 수 있다.

Table 1. Comparison of GMRES, BMP-GMRES for the scattering problems of penetrable objects.

표 1. 침투 가능한 구조물의 산란 문제를 위한 GMRES, BMP-GMRES의 비교

Object	N	M^{-1} (MB)	Number of iterations	Solution time (min)
Sphere (260,586)	None	-	137	245.95
	BMP	612.22	22	40.5
Cone-sphere (129,990)	None	-	>1,000	>269.7
	BMP	1,190	135	47.6
cube (79,728)	None	-	>1000	>46.6
	BMP	484.8	204	14.35

IV. 결론

본 논문은 IE-FFT와 BMP를 이용한 침투 가능한 구조물의 전자기 산란 해석에 관하여 다루었다. IE-FFT는 모멘트 법의 단점인 저장 공간 문제와 계산량 문제를 개선할 수 있다. 반복법은 전기적으로 커다란 구조물로부터 형성된 행렬 방정식의 해를 찾기 위하여 많은 반복 횟수를 필요로 수렴문제가 존재한다. 따라서 본 논문에서는 BMP를 이용하여 반복법에 존재하는 수렴문제를 개선하였다. 수치해석 결과를 통하여 침투 가능한 구조물의 전자기 산란해석은 IE-FFT와 BMP를 이용하여 효율적으로 계산할 수 있음을 확인할 수 있었다.

References

[1] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, CRC Press, 2015.
 [2] W. C. Chew, M. S. Tong and B. Hu, *Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves*, Morgan & Claypool Publishers, 2008.
 [3] P. Y. Oijala and M. Taskinen "Application of combined field integral equation for electromagnetic scattering by dielectric and composite objects," *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol.53, no.3, pp.1168-1173, 2005.
 DOI: 10.1109/TAP.2004.842640
 [4] O. Ergul and L. Gurel, "Comparison of integral equation formulations for the fast and accurate

- solution of scattering problems involving dielectric objects with the multilevel fast multipole algorithm,” *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol.57, no.1, 2009. DOI: 10.1109/TAP.2008.2009665
- [5] S. M. Seo and J. F. Lee, “A fast IE-FFT algorithm for solving PEC scattering problems,” *IEEE Trans. Magnetics*, vol.41, no.5, 2005. DOI: 10.1109/TMAG.2005.844564
- [6] S. M. Seo, C. F. Wang and J. F. Lee “Analyzing PEC scattering structure using an IE-FFT algorithm,” *ACES Journal*, vol.24, no.2, pp.116-128, 2009.
- [7] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,” *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol.30, pp. 409-418, 1982. DOI: 10.1109/TAP.1982.1142818
- [8] www.netlib.org “Fast matrix-vector multiplication for structured matrices”
- [9] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS, pp.321-335, 1996.
- [10] H. Yeom, H. C. Chin, H. T. Kim and K. T. Kim “Block matrix preconditioner method for the electric field integral equation (EFIE) formulation based on loop-star basis functions,” *Progress in Electromagnetics Research*, vol.134, pp.543-558, 2013. DOI: 10.2528/PIER12092403
- [11] P. R. Amestoy, T. A. Davis and I. S. Duff “An approximate minimum degree ordering algorithm,” *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, vol.7, no4, pp.886-905, 1996. DOI: 10.1137/S0895479894278952
- [12] Y. Saad and M. H. Schultz “GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems,” *SIAM J. Scientific Statistical Computing*, vol.7, no.3, pp.856-869, 1986. DOI: 10.1137/0907058
- [13] J. M. Jin, *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*, IEEE Press, 2010.
- [14] O. Ergul and L. Gurel, “Investigation of the inaccuracy of the MFIE discretized with the RWG basis functions,” *IEEE Trans. Antenna and Propagation Society and symposium*, Monterey, CA, 2004. DOI: 10.1109/APS.2004.1332108

BIOGRAPHY

Ju-Hwan Kang (Member)

2013 : BS degree in Electrical Engineering, KAIST.

2013~2016 : Engineer, Hyundai Heavy Industries Co., Ltd

2016~ : Researcher, Defense Agency for Technology and Quality