

코사인 법칙과 3차원 좌표 변환을 이용한 단사진의 후방교회법 Single Photo Resection Using Cosine Law and Three-dimensional Coordinate Transformation

홍승표¹⁾ · 최한승²⁾ · 김의명³⁾

Hong, Song Pyo · Choi, Han Seung · Kim, Eui Myoung

Abstract

In photogrammetry, single photo resection is a method of determining exterior orientation parameters corresponding to a position and an attitude of a camera at the time of taking a photograph using known interior orientation parameters, ground coordinates, and image coordinates. In this study, we proposed a single photo resection algorithm that determines the exterior orientation parameters of the camera using cosine law and linear equation-based three-dimensional coordinate transformation. The proposed algorithm first calculated the scale between the ground coordinates and the corresponding normalized coordinates using the cosine law. Then, the exterior orientation parameters were determined by applying linear equation-based three-dimensional coordinate transformation using normalized coordinates and ground coordinates considering the calculated scale. The proposed algorithm was not sensitive to the initial values by using the method of dividing the longest distance among the combinations of the ground coordinates and dividing each ground coordinates, although the partial derivative was required for the nonlinear equation. In addition, since the exterior orientation parameters can be determined by using three points, there was a stable advantage in the geometrical arrangement of the control points.

Keywords : Single Photo Resection, Exterior Orientation Parameters, Cosine Law, Three-Dimensional Coordinate Transformation, Normalized Coordinate

초 록

사진측량에서 단사진의 후방교회법은 이미 알고 있는 카메라의 내부표정요소, 지상좌표, 사진좌표를 이용하여 촬영당시 카메라의 위치와 자세에 해당하는 외부표정요소를 결정하는 방법이다. 본 연구에서는 코사인 법칙과 선형방정식의 3차원 좌표변환식을 이용하여 카메라의 외부표정요소를 결정할 수 있는 단사진의 공간후방교회법 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 먼저 렌즈왜곡이 보정된 정규좌표를 코사인 법칙을 이용하여 지상좌표와 이에 대응되는 정규좌표간의 축척을 계산하였다. 그리고 나서 축척을 고려한 정규좌표와 지상좌표를 이용하는 선형방정식 기반의 3차원 좌표변환식을 적용하여 외부표정요소를 결정하였다. 제안한 알고리즘은 비선형방정식으로 편미분이 필요하나 지상좌표의 조합 중 가장 긴 거리를 구하여 각 지상좌표에 나누는 방법을 이용하여 초기값에 민감하지 않은 장점이 있었다. 또한, 세 점을 이용하여도 외부표정요소를 결정할 수 있기 때문에 기준점의 기하학적 배치에 안정적인 장점이 있었다.

핵심어 : 단사진의 후방교회법, 외부표정요소, 코사인 법칙, 3차원 좌표변환, 정규좌표

Received 2019. 06. 03, Revised 2019. 06. 20, Accepted 2019. 06. 26

1) Department of GIS Engineering, Namseoul University (E-mail: bbcuco@gmail.com)

2) Member, GIS Research Center, Geospatial Information Technology Co., Ltd (E-mail: hseung@git.co.kr)

3) Corresponding Author, Member, Department of Spatial Information Engineering, Namseoul University (E-mail: kemyoung@nsu.ac.kr)

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서론

사진측량에서 단사진의 후방회합(SPR: Single Photo Resection)이란 이미 알고 있는 카메라의 내부표정요소(IOP: Interior Orientation Parameters), 지상좌표, 지상좌표가 영상에 투영된 사진좌표를 이용하여 카메라의 위치와 자세에 해당하는 외부표정요소(EOP: Exterior Orientation Parameters)를 결정하는 것을 뜻하며 6개의 매개변수로 구성되어 있다 (Mikhail *et al.*, 2001). SPR을 통하여 카메라의 EOP가 결정되면, 두 장 이상의 중복영상에서 취득된 공액점(conjugate point)을 이용하여 3차원 위치를 결정하는 공간전방회합(spatial intersection)이 가능하다.

전통적으로 사진측량에서 사용되는 SPR은 오일러(euler) 각 기반의 공선조건식을 이용한 비선형 방정식을 편미분하여 외부표정요소를 결정하며 6개의 미지수에 대한 초기값 및 수치적 반복법이 필요하다(Luhmann *et al.*, 2011). 또한 카메라의 자세에 해당하는 오일러 회전각을 직접적으로 결정할 경우에는 짐벌락(gimbal lock)현상이 발생할 수 있는 단점이 있다 (Kim and Choi, 2018). 이에 사진측량에서는 공선조건식에서의 오일러 회전을 쿼터니언(quaternion) 회전으로 변환하여 비선형 방정식의 안정성을 향상시킨 연구(Jiang *et al.*, 2007), 4점의 관측점을 이용하여 지상좌표와 이에 대응되는 사진좌표의 축척을 계산하고 이를 쿼터니언 회전을 이용한 선형방정식 기반의 외부표정요소를 결정하는 연구(Guan *et al.*, 2008), 3점 이상의 지상좌표와 영상좌표간의 공면조건 및 쿼터니언 회전을 이용한 선형방정식 기반의 외부표정요소를 결정하는 연구(Mazaheri and Habib, 2015)등이 수행되었다.

컴퓨터 비전 및 로봇틱스에서는 이러한 SPR을 PnP (Perspective n Point)문제라고 한다(Lepetit *et al.*, 2009). 이와 관련된 연구로는 n 개 관측점 중에서 4점을 랜덤하게 선택하여 선형방정식을 구성하고 RANSAC (RANDOM Sample Consensus)을 이용하여 카메라의 외부표정요소를 결정하는 방법 등이 수행되었다(Fischler and Bolles, 1981; Gao *et al.*, 2003; Lepetit *et al.*, 2009).

비선형의 공선조건식을 이용하여 회전각을 직접적으로 결정하는 SPR은 초기값이 좋지 못하면 해를 구할 수 없는 경우가 발생하며(Lim, 2018), 공면조건 및 쿼터니언 회전을 이용한 SPR의 경우에는 초기값을 동적으로 결정하여 일종의 선형방정식으로 구성되나 기준점 배치에 다소 민감할 수 있으며 반복횟수가 많은 경향이 있다(Mazaheri and Habib, 2015; Kim and Choi, 2018).

또한 RANSAC기반의 PnP의 경우에는 신속한 자료처리가

가능하지만 3점 이상을 사용하는 SPR기법과 달리 4점 이상이 필요하고 RANSAC의 임계값에 따라 외부표정요소를 결정하지 못하는 경우가 발생할 수 있다.

이에 본 연구에서는 최소 3점 이상을 이용하여 초기값 및 기하학적 배치에 안정적이고 신속한 자료처리가 가능한 SPR 방법을 제안하는 것을 목적으로 하였다.

2. 연구방법

본 연구에서 제안한 방법은 크게 두 단계로 구분된다. 첫째 렌즈왜곡이 보정된 정규좌표를 코사인 법칙을 이용하여 지상좌표와 이에 대응되는 정규좌표간의 축척을 계산한다. 두 번째 지상좌표와 이에 대응되는 축척이 적용된 정규좌표를 선형방정식 기반의 3차원 좌표변환 알고리즘을 적용하여 카메라의 위치와 자세에 해당하는 외부표정요소를 결정한다.

Eq. (1)은 지상좌표계에서 픽셀좌표계로의 변환식을 동차좌표(homogeneous coordinate)로 나타낸 것이며, Eq. (2)는 픽셀좌표를 카메라 내부행렬의 역행렬을 이용하여 정규좌표로 변환한 식을 나타낸다. 여기서 카메라의 초점거리(f_x, f_y), 주점위치(x_p, y_p)는 픽셀좌표계에서 정의된다.

$$\lambda \begin{bmatrix} x_{pix} \\ y_{pix} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & x_p \\ 0 & f_y & y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & x_t \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & y_t \\ m_{31} & m_{33} & m_{33} & z_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\lambda \mathbf{x}_{pix} = K [M_{(\kappa, \varphi, \omega)} | \mathbf{x}_t] \mathbf{x}_w$$

where, \mathbf{x}_{pix} is a homogeneous pixel coordinate, \mathbf{x}_w is a homogeneous ground coordinate, \mathbf{x}_t is a translation vector, λ is a scale factor, $M_{(\kappa, \varphi, \omega)}$ is a rotation matrix from ground to camera coordinate system, and K is a intrinsic camera matrix.

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x_{pix} \\ y_{pix} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_n = K^{-1} \mathbf{x}_{pix}$$

where, \mathbf{x}_n is a normalized coordinate, K^{-1} is a inverse of intrinsic camera matrix, and \mathbf{x}_{pix} is a homogeneous pixel coordinate.

2.1 코사인 법칙을 이용한 축척계수 결정

Fig. 1에서 A, B 는 지상좌표를 나타내고 a, b 는 지상좌표에 대응되는 렌즈왜곡이 보정된 정규좌표를 나타내며, Eq. (3)

과 같이 정규좌표를 코사인 법칙을 이용하여 사이각(θ)을 계산한다(Grafarend and Shan, 1997).

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{oa}^2 + \overline{ob}^2 - \overline{ab}^2}{2\overline{oa} \overline{ob}} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + 1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + 1} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + 1}} \quad (3)$$

where, \overline{oa} is a distance from o to a in normalized coordinate system, \overline{ob} is a distance from o to b in normalized coordinate system, \overline{ab} is a distance from a to b in normalized coordinate system, $a = [x_a \ y_a \ 1]^T$, $b = [x_b \ y_b \ 1]^T$, and $o = [0 \ 0 \ 0]^T$.

지상좌표와 정규좌표간의 코사인 값은 수치적으로 동일하므로 Eq. (4)와 같이 오차에 대한 함수로 나타낼 수 있다. 여기서 코사인 값 및 A, B 점 간의 거리(\overline{AB})는 이미 알고 있는 상수 값이고, 카메라의 위치(O)는 알 수 없기 때문에 \overline{OA} 와 \overline{OB} 는 구하고자 하는 미지수가 된다.

$$f(\Delta) = \overline{AB}^2 - \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 + 2\overline{OA} \overline{OB} \cos(\theta) = e \quad (4)$$

where, $\Delta = [\overline{OA} \ \overline{OB}]^T$.

비선형 방정식을 최소제곱법에 적용하기 위해 Eq. (4)를 Eq. (5)와 같이 구하고자하는 미지수에 대하여 편미분하여 Eq. (6)과 같은 자코비안(jacobian) 행렬을 구성한다.

$$\frac{\partial f(\Delta)}{\partial \overline{OA}} = 2\overline{OB} \cos(\theta) - 2\overline{OA} \quad (5)$$

$$\frac{\partial f(\Delta)}{\partial \overline{OB}} = 2\overline{OA} \cos(\theta) - 2\overline{OB}$$

$$J(\Delta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\Delta)}{\partial \overline{OA}} & \frac{\partial f(\Delta)}{\partial \overline{OB}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

where, $J(\Delta)$ is a jacobian matrix for unknowns.

자코비안 행렬이 구성되면 Eq. (7)과 같은 관측방정식을 구성할 수 있다.

$$J(\Delta) \Delta = f(\Delta) \quad (7)$$

이때 2점당 1개의 방정식이 구성되며, 미지수는 두 점의 축척계수를 구해야 하므로 2개가 된다. 즉 점의 개수와 미지수의 개수는 같다. 이 경우에는 방정식의 개수(m)가 미지수의 개수(n)보다 적기 때문에 방정식의 해를 결정할 수 없다. 따라서

Eq. (8)과 같이 n 개의 점 중에 2개를 선택할 조합공식을 이용하면 방정식의 개수(m)를 구할 수 있으며, 방정식의 해를 구하기 위해서는 최소 3점이 필요한 것을 알 수 있다.

$$m = {}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad (8)$$

where, m is the number of equations, n is the number of unknowns and the number of corresponding point.

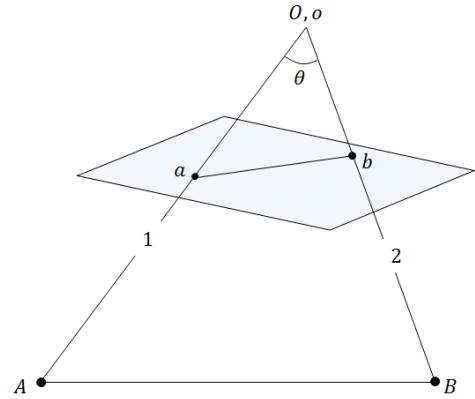


Fig. 1. Geometric constraints at two corresponding points.

예를 들어 Fig. 2와 같이 3점이 존재한다면 Eq. (9)와 같은 관측방정식을 구성할 수 있다. Eq. (10)에서 Eq. (13)은 3점 중 2점을 선택할 모든 조합에 대한 미지수, 오차함수, 편미분의 계산 결과를 나타낸 것이다.

$$J(\Delta) \Delta = f(\Delta)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\Delta_{AB})}{\partial \overline{OA}} & \frac{\partial f(\Delta_{AB})}{\partial \overline{OB}} & 0 \\ \frac{\partial f(\Delta_{AC})}{\partial \overline{OA}} & 0 & \frac{\partial f(\Delta_{AC})}{\partial \overline{OC}} \\ 0 & \frac{\partial f(\Delta_{BC})}{\partial \overline{OB}} & \frac{\partial f(\Delta_{BC})}{\partial \overline{OC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{OA} \\ \overline{OB} \\ \overline{OC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\Delta_{AB}) \\ f(\Delta_{AC}) \\ f(\Delta_{BC}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta = [\overline{OA} \ \overline{OB} \ \overline{OC}]^T$$

$$\Delta_{AB} = [\overline{OA} \ \overline{OB}]^T$$

$$\Delta_{AC} = [\overline{OA} \ \overline{OC}]^T$$

$$\Delta_{BC} = [\overline{OB} \ \overline{OC}]^T$$

(10)

$$\cos(\theta_{AB}) = \frac{\overline{oa}^2 + \overline{ob}^2 - \overline{ab}^2}{2\overline{oa} \overline{ob}} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + 1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + 1} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + 1}}$$

$$\cos(\theta_{AC}) = \frac{\overline{oa}^2 + \overline{oc}^2 - \overline{ac}^2}{2\overline{oa} \overline{oc}} = \frac{x_a x_c + y_a y_c + 1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + 1} \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + 1}} \quad (11)$$

$$\cos(\theta_{BC}) = \frac{\overline{ob}^2 + \overline{oc}^2 - \overline{bc}^2}{2\overline{ob} \overline{oc}} = \frac{x_b x_c + y_b y_c + 1}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + 1} \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + 1}}$$

$$f(\Delta_{AB}) = \overline{AB}^2 - \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 + 2\overline{OA} \overline{OB} \cos(\theta_{AB}) = e_{AB}$$

$$f(\Delta_{AC}) = \overline{AC}^2 - \overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 + 2\overline{OA} \overline{OC} \cos(\theta_{AC}) = e_{AC} \quad (12)$$

$$f(\Delta_{BC}) = \overline{BC}^2 - \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 + 2\overline{OB} \overline{OC} \cos(\theta_{BC}) = e_{BC}$$

$$\frac{\partial f(\Delta_{AB})}{\partial \overline{OA}} = 2\overline{OB} \cos(\theta_{AB}) - 2\overline{OA}$$

$$\frac{\partial f(\Delta_{AB})}{\partial \overline{OB}} = 2\overline{OA} \cos(\theta_{AB}) - 2\overline{OB}$$

$$\frac{\partial f(\Delta_{AC})}{\partial \overline{OA}} = 2\overline{OC} \cos(\theta_{AC}) - 2\overline{OA} \quad (13)$$

$$\frac{\partial f(\Delta_{AC})}{\partial \overline{OC}} = 2\overline{OA} \cos(\theta_{AC}) - 2\overline{OC}$$

$$\frac{\partial f(\Delta_{BC})}{\partial \overline{OB}} = 2\overline{OC} \cos(\theta_{BC}) - 2\overline{OB}$$

$$\frac{\partial f(\Delta_{BC})}{\partial \overline{OC}} = 2\overline{OB} \cos(\theta_{BC}) - 2\overline{OC}$$

만약, n 개의 점이 존재할 경우 n 개 중에 2개를 선택할 조합 순서를 이용하여 관측방정식을 인덱싱할 수 있으며 Eq. (14)와 같이 가우스-뉴턴법(gauss-newton method)을 이용하여 최소제곱의 해를 결정할 수 있다. 여기서 가우스-뉴턴법이란 다변수 벡터 함수로 구성된 비선형 연립방정식의 해를 구하는 최적화 방법이며 초기값 벡터(Δ^0)을 이용하여 수렴할 때까지 반복해야 한다(Nielsen, 2013). 따라서 초기값이 좋지 못하거나 범위가 클 경우에는 해가 수렴하지 못할 경우가 발생한다(Lim, 2018).

이에 본 연구에서는 지상좌표의 조합 중 가장 긴 거리를 구하여 각 지상좌표에 나누어 초기값의 범위를 좁히는 방법을 사용하였다. 따라서 정규화된 지상좌표 간에 거리의 범위는 0 ~ 1 사이가 된다. 본 연구에서 초기값(Δ^0)은 모두 1로 설정하였다.

$$\Delta^{i+1} = \Delta^i - (J(\Delta^i)^T J(\Delta^i))^{-1} J(\Delta^i)^T f(\Delta^i) \quad (14)$$

where, $J(\Delta)$ is a $m \times n$ jacobian matrix, $f(\Delta)$ is a $m \times 1$ error vector, m is the number of equations, n is the number of unknowns and the number of corresponding point, Δ is a unknown vector, and i is a number of iteration.

따라서 가우스-뉴턴법을 적용하면 카메라의 투영중심과 각 지상기준점간의 정규화된 거리(Δ)가 결정되며 이를 이용하여 Eq. (15)와 같이 각 점의 축척계수를 계산할 수 있다 (Guan *et al.*, 2008).

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + 1}} \quad (15)$$

where, λ_i is a i_{th} scale factor for corresponding points, Δ_i is a i_{th} normalized distance from ground coordinates to camera position, and $(x_i, y_i, 1)$ is a i_{th} normalized coordinates.

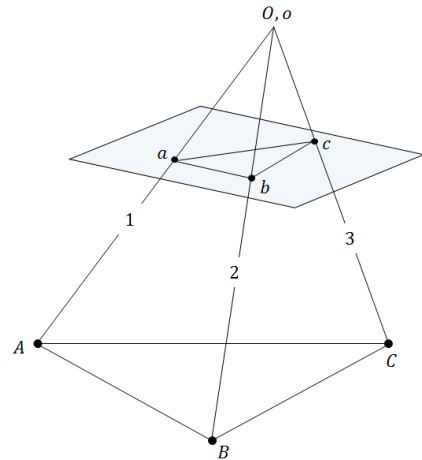


Fig. 2. Geometric constraints at three corresponding points.

2.2 3차원 좌표변환을 이용한 카메라의 외부표정 요소 결정

2.1절에서 축척계수가 계산 되었으면 Eq. (16)과 같이 정규 좌표(\mathbf{x}_{n_i})에 각 축척계수(λ_i)를 곱하여 축척이 고려된 정규 좌표(\mathbf{x}_{s_i})로 복원 시키고 이를 공선조건식에 적용하면 카메라의 자세에 해당하는 회전행렬($M_{(R,\varphi,\omega)}$)과 카메라의 위치에 해당하는 투영중심($\hat{\mathbf{x}}_o$)을 미지수로 하는 3차원 관계식으로 설정할 수 있다.

$$\mathbf{x}_{s_i} = \lambda_i \mathbf{x}_{n_i} = M_{(\kappa_i \varphi_i)}(\hat{\mathbf{x}}_{w_i} - \hat{\mathbf{x}}_o) = M_{(\kappa_i \varphi_i)} \hat{\mathbf{x}}_{w_i} - M_{(\kappa_i \varphi_i)} \hat{\mathbf{x}}_o \quad (16)$$

\mathbf{x}_{s_i} is an i_{th} scaled normalized coordinates, λ_i is an i_{th} scale factor, \mathbf{x}_{n_i} is an i_{th} normalized coordinate, $\hat{\mathbf{x}}_{w_i}$ is an i_{th} normalized ground coordinates, $\hat{\mathbf{x}}_o$ is normalized camera position, and $M_{(\kappa_i \varphi_i)}$ is a rotation matrix from ground to camera coordinate system.

Eq. (16)의 투영중심과 회전행렬의 곱을 Eq. (17)과 같이 치환하여 Eq. (18)과 같은 3차원 좌표변환의 일반식 형태로 나타낼 수 있다(Mikhail *et al.*, 2001). 이때 3차원 좌표변환식에서 축척을 고려하지 않은 이유는 축척계수(λ_i)를 정규좌표에 곱하여 이미 축척을 고려하였기 때문이다.

$$\hat{\mathbf{x}}_t = -M_{(\kappa_i \varphi_i)} \hat{\mathbf{x}}_o \quad (17)$$

where, $\hat{\mathbf{x}}_t$ is a translation vector for normalized ground coordinates.

$$\mathbf{x}_{s_i} = M_{(\kappa_i \varphi_i)} \hat{\mathbf{x}}_{w_i} + \hat{\mathbf{x}}_t \quad (18)$$

3차원 좌표변환에는 다양한 알고리즘이 존재하지만 본 연구에서는 짐벌락 현상이 발생하지 않고 비교적 간단한 선형 방정식으로 구성되어 있는 Kabsch가 제안한 알고리즘을 사용하였다(Kabsch, 1976). 이를 위해 Eq. (19)와 같은 오차(e)에 대한 모델식을 사용하며 $\bar{\mathbf{x}}_{s_i}$ 는 축척이 적용된 정규좌표의 편차벡터를 나타내고, $\bar{\mathbf{x}}_{w_i}$ 는 정규화된 지상좌표의 편차벡터를 나타낸다. 이때 편차벡터를 사용하는 이유는 Eq. (18)의 3차원 좌표변환의 일반식에서의 이동량($\hat{\mathbf{x}}_t$)을 소거하기 위한 것이다.

$$\min(e) = \arg \min_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \sum_{i=1}^n \| M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i} - \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \|^2 \quad (19)$$

where, $\bar{\mathbf{x}}_{s_i}$ is a deviation vector for scaled normalized coordinates, $\bar{\mathbf{x}}_{w_i}$ is a deviation vector for normalized ground coordinates, and n is the number of corresponding point.

Eq. (19)을 전개하면 Eq. (20)과 같은 오차를 최소화하기 위해서는 $\sum_{i=1}^n \{ (M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i})^T \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \}$ 가 최대가 되어야한다 (Hong and Kim, 2019).

$$\begin{aligned} \min(e) &= \arg \min_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \sum_{i=1}^n \| M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i} - \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \| \bar{\mathbf{x}}_{w_i} \|^2 + \sum_{i=1}^n \| \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \|^2 \\ &\quad - 2 \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \sum_{i=1}^n \{ (M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i})^T \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \} \end{aligned} \quad (20)$$

Eq. (20)에서 $\sum_{i=1}^n \{ (M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i})^T \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \}$ 을 대각합(trace)의 연산성질과 특이값 분해(SVD: Singular Value Decomposition)를 이용하여 Eq. (21)과 같이 나타낼 수 있다 (Hong and Kim, 2019).

$$\begin{aligned} \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \sum_{i=1}^n \{ (M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i})^T \bar{\mathbf{x}}_{s_i} \} &= \\ \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \sum_{i=1}^n \text{tr} (M_{(\kappa_i \varphi_i)} \bar{\mathbf{x}}_{w_i} \bar{\mathbf{x}}_{s_i}^T) &= \\ \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \text{tr} \left\{ M_{(\kappa_i \varphi_i)} \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{x}}_{w_i} \bar{\mathbf{x}}_{s_i}^T) \right\} &= \\ \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \text{tr} (M_{(\kappa_i \varphi_i)} C) &= \\ \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \text{tr} \{ M_{(\kappa_i \varphi_i)} \text{svd}(C) \} &= \\ \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \text{tr} (M_{(\kappa_i \varphi_i)} U S V^T) &= \\ \arg \max_{M_{(\kappa_i \varphi_i)}} \text{tr} (S M_{(\kappa_i \varphi_i)} U V^T) & \end{aligned} \quad (21)$$

where, U is a left singular vector matrix of C and orthogonal matrix (3×3), S is a singular values matrix of C and diagonal matrix (3×3), V is a right singular vector matrix of C and orthogonal matrix (3×3), and C is a covariance matrix (3×3).

Eq. (21)에서 $M_{(\kappa_i \varphi_i)} U V^T$ 을 살펴보면 직교행렬(orthogonal matrix)들의 곱이기 때문에 행렬곱의 결과 또한 직교행렬이 되고 놈(norm)을 보존한다. 따라서 S 가 대각행렬이므로 대각합을 최대화하기 위해서는 $M_{(\kappa_i \varphi_i)} U V^T$ 가 단위행렬이 되어야 한다. 이와 같은 성질을 통해서 Eq. (22)와 같이 미지의 3차원 회전행렬을 결정할 수 있다.

$$M_{(\kappa, \varphi, \omega)} UV^T = I \quad (22)$$

$$M_{(\kappa, \varphi, \omega)} = VU^T$$

where, I is a identity matrix (3×3).

이때, 결정된 회전행렬을 오른손 좌표계로 정의하기 위하여 Eq. (23)과 같이 행렬식(determinant)을 이용한다. 오른손 좌표계에서 회전행렬의 행렬식은 1이기 때문이다(Strang, 2016).

$$\alpha = \det(VU^T) = \pm 1$$

$$M_{(\kappa, \varphi, \omega)} = V \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} U^T \quad (23)$$

회전행렬을 결정하였으면 Eq. (24)와 같이 관측점 집합의 평균을 이용하여 3차원 이동량($\hat{\mathbf{x}}_t$)을 결정한다.

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{s_m} - M_{(\kappa, \varphi, \omega)} \hat{\mathbf{x}}_{w_m} \quad (24)$$

where, $\hat{\mathbf{x}}_{s_m}$ is a mean vector for scaled normalized coordinates, $\hat{\mathbf{x}}_{w_m}$ is a mean vector for normalized ground coordinates.

최종적으로 Eq. (17)에서 치환되었던 투영중심을 Eq. (25)와 같이 복원한다. 여기서 d_{\max} 는 지상좌표간의 거리 조합 중 예 가장 긴 거리를 뜻한다.

$$\mathbf{x}_o = -d_{\max} M_{(\kappa, \varphi, \omega)}^T \hat{\mathbf{x}}_t \quad (25)$$

where, \mathbf{x}_o is a camera position, d_{\max} is a maximum distance from ground to ground coordinates.

2.3 알고리즘의 구현절차

제안한 알고리즘의 구현 절차는 Fig. 3과 같고 세부적으로는 네 단계로 구분할 수 있다. 첫 번째, 왜곡이 보정된 정규좌표와 정규화된 지상좌표를 코사인 법칙을 이용하여 투영중심과 정규화된 지상좌표간의 거리를 결정할 수 있는 관측방정식을 구성한다. 두 번째, 구성된 관측방정식을 가우스-뉴턴법을 이용하여 수렴할 때 까지 반복한다. 세 번째, 결정된 거리를 이용하여 정규좌표와 정규화된 지상좌표간의 축척계수를 결정한다. 네 번째, 축척이 고려된 정규좌표와 정규화된 지상좌표를 선형방정식 기반의 3차원 좌표변환에 적용하여 카메라의 자세와 위치에 해당하는 외부표정요소를 결정한다.

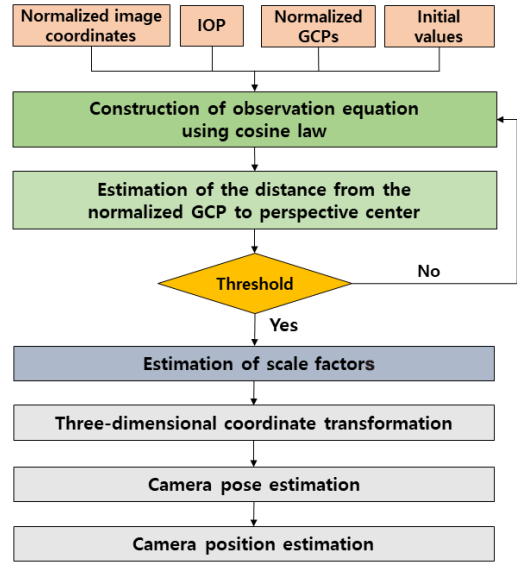


Fig. 3. Implementation procedure of the proposed algorithm

3. 실험

실험을 위하여 먼저 카메라 캘리브레이션을 수행하였다. 이를 위해 칼텍(caltech: california institute of technology)의 컴퓨터 비전 연구실에서 제공하는 18장의 체스보드 영상을 사용하였고, 체스보드는 Fig. 4과 같이 흑백간격은 가로 및 세로가 3cm이다(Bouguet, 2015).

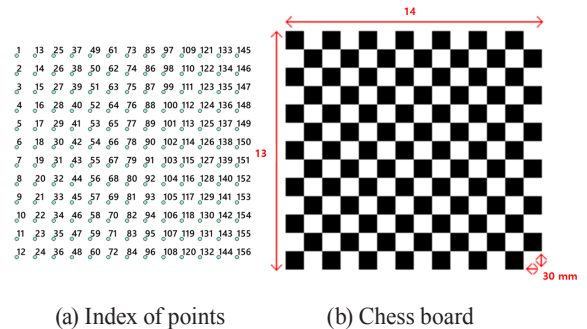


Fig. 4. Calibration target

Table 1은 카메라 캘리브레이션 결과값이며, 방사왜곡(radial distortion)과 접선왜곡(tangential distortion)은 정규좌표에서 정의된다. 또한 평균 재투영(reprojection) 오차는 Fig. 5와 같이 0.16픽셀로 양호하게 나타났다.

Table 1. Camera calibration result

Focal length	f_x	657.4076
	f_y	657.9287
Principal point	x_p	304.1098
	y_p	244.8333
Image size	width	640
	height	480
Radial distortion	k_1	-0.2458
	k_2	0.0555
	k_3	0.1612
Tangential distortion	p_1	3.6736e-06
	p_2	1.6723e-04

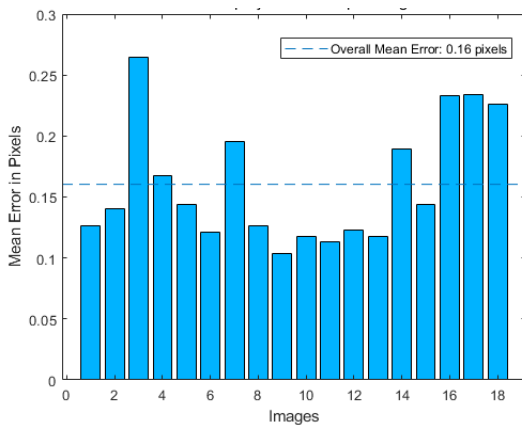


Fig. 5. Mean reprojection error per image

본 연구에서 제안한 단사진의 외부표정요소 결정 방법을 비교적 최근에 개발된 공면조건 및 쿼터니언 회전을 이용한 SPR(Mazaheri and Habib, 2015), 컴퓨터 비전에서 주로 사용되는 RANSAC기반의 PnP(Torr and Zisserman, 2000; Gao *et al.*, 2003)와 비교하였다.

이론상으로는 쿼터니언 기반의 SPR은 3점 이상, RANSAC 기반의 PnP는 4점 이상, 본 연구에서 제안한 방법의 경우 3점이상이 필요하며 일관적인 수치적 결과를 위하여 각 알고리즘들을 Matlab을 이용하여 구현하였다.

Fig. 6는 실험에 사용된 영상을 나타내며 이 영상은 카메라 캘리브레이션에 사용하지 않은 영상이다.



Fig. 6. Used image

3가지 알고리즘을 비교하기 위하여 재투영 오차가 0.16 픽셀 이내로 수렴되는 조건을 사용하였다. 재투영 오차를 수렴 조건으로 한 이유는 각 알고리즘을 일관적으로 비교하기 위해서이며 0.16 픽셀 이내로 한 이유는 카메라 캘리브레이션의 평균 재투영 오차를 참고하였기 때문이다.

Table 2는 자료처리에 사용된 점의 개수 및 인덱스 번호이며, 기하학적 배치는 Fig. 7과 같고 사용된 점의 인덱스 번호는 Fig. 4(a)에서 확인할 수 있다.

Table 2. Point ID used

Point pair	Index numbers
3-1	[1, 12, 145]
3-2	[12, 73, 156]
4	[1, 12, 145, 156]
5	[1, 12, 90, 145, 156]
6	[1, 12, 75, 81, 145, 156]
7	[1, 12, 34, 75, 118, 145, 156]
All	[1 ~ 156]

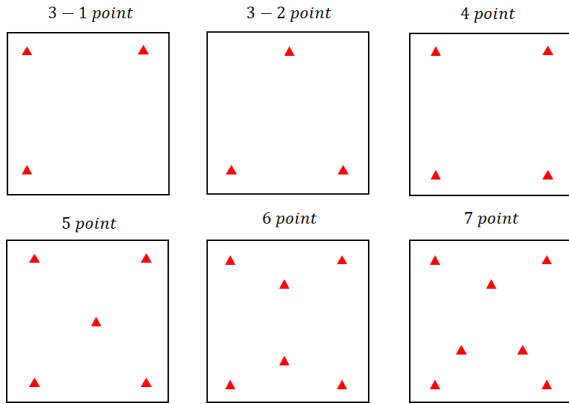


Fig. 7. Layout of point pairs

각 알고리즘의 기준점 배치와 점 개수에 대한 실험결과는 Table 3과 같으며 결정된 외부표정요소를 이용하여 모든 타겟

점(156점)에 대한 평균 재투영 오차를 계산하였다.

실험결과 3점을 이용할 경우, 점의 기하학적 배치가 직각삼각형 형태일 때에는 쿼터니언 기반의 SPR은 발산하였으며 본 연구에서 제안한 방법은 수렴 하였다. 또한 정삼각형 형태일 경우에는 쿼터니언 기반의 SPR은 수렴하였지만 검사점의 평균 재투영 오차가 0.16 픽셀 이상으로 나타났다.

4점 이상의 경우에는 각 알고리즘을 이용한 검사점의 평균 재투영 오차가 모두 0.16 픽셀 이내로 나타났지만 쿼터니언 기반의 SPR은 사용된 점 개수가 증가 할수록 반복횟수가 크게 증가하였지만 본 연구에서 제안한 알고리즘은 반복횟수가 일관적 이었다. 또한 RANSAC기반의 PnP 알고리즘은 반복횟수 및 검사점의 재투영 오차가 랜덤하며, 최대 반복횟수를 감소시킬 경우에는 해를 결정하지 못하는 경우가 간혹 발생하였다.

Table 3. Experimental results

Method	Point pair	Mean reprojection error using check point (unit: pixel)	Iteration
PnP based on RANSAC	3-1	Not solved	
	3-2	Not solved	
	4	0.0755 ~ 0.0810	1 ~ 10
	5	0.0687 ~ 0.0758	10 ~ 100
	6	0.0687 ~ 0.0829	10 ~ 100
	7	0.0687 ~ 0.1563	10 ~ 100
	All	0.0270 ~ 0.0383	10 ~ 100
Quaternion	3-1	Divergence	
	3-2	0.3199	222
	4	0.1042	270
	5	0.0809	450
	6	0.0682	705
	7	0.0613	1050
	All	0.1361	628680
Proposed method	3-1	0.1958	17
	3-2	0.0765	6
	4	0.0794	5
	5	0.0456	4
	6	0.0519	5
	7	0.0358	5
	All	0.0397	6

또한 Table 4와 같이 본 연구에서 제안한 알고리즘의 초기값을 모두 1로 설정한 후에 지상좌표를 정규화한 경우와 그렇지 않은 경우의 반복횟수를 비교한 결과, 정규화를 수행하였을 경우에 반복횟수가 감소하였고, 정규화를 수행하지 않더라도 해가 수렴하는 것을 알 수 있었다.

Table 4. Experiments using normalized coordinate

Point pair	Coordinates	Iteration
3-1	Original coordinate	28
	Normalized coordinate	17
3-2	Original coordinate	14
	Normalized coordinate	6
4	Original coordinate	14
	Normalized coordinate	5
5	Original coordinate	13
	Normalized coordinate	4
6	Original coordinate	14
	Normalized coordinate	5
7	Original coordinate	14
	Normalized coordinate	5
All	Original coordinate	15
	Normalized coordinate	6

따라서 본 연구에서 제안한 방법이 쿼터니언 기반의 SPR보다 점의 기하학적 배치에 안정적이며, 수렴속도 측면에서도 우수한 성능을 보였다. 또한 최소 4점을 이용하는 RANSAC 기반의 PnP에 비해 본 연구에서 제안한 방법은 최소 3점을 사용하는 장점이 있다.

4. 결론

본 연구에서는 코사인 법칙을 이용하여 카메라의 투영중심과 지상기준점간의 축척을 계산하여 3차원 관계를 구축하고 이를 선형방정식 기반의 3차원 좌표변환을 이용하여 카메라의 외부표정요소를 결정하는 연구를 수행하였고 다음과 결론을 도출하였다.

첫째, 본 연구에서 제안한 방법은 일반적으로 사용하는 오일러 회전각을 직접적으로 결정하는 공선조건식 기반의 후방

교회법에 비하여 관측방정식의 구성에 있어 편미분이 매우 간단하고 짐벌락 현상이 발생하지 않는다. 더욱이 오일러 회전각을 이용하는 기존의 방법은 회전각의 정규화가 불가능하지만, 제안한 방법의 경우에는 지상좌표 간의 거리를 이용하기 때문에 정규화가 가능하여 초기값의 영향이 적은 장점이 있었다.

둘째, 점의 기하학적 배치가 직각삼각형 형태일 때에는 쿼터니언 기반의 SPR은 발산하였고 본 연구에서 제안한 방법은 수렴하였으며, 정삼각형 형태일 경우에는 쿼터니언 기반의 SPR은 수렴하였지만 본 연구에서 제안한 방법보다 검사점의 평균 재투영 오차가 크게 나타났다. 또한 쿼터니언 기반의 SPR은 사용된 점의 개수가 증가 할수록 반복횟수가 크게 증가하였고, 본 연구에서 제안한 알고리즘은 반복횟수가 적고 일관적 이었다.

셋째, RANSAC기반의 PnP는 최소 4점이 필요하며 외부표정요소가 랜덤하게 결정되고 최대 반복횟수를 감소시킬 경우에는 해를 결정하는 못하는 경우가 간혹 발생하였다.

따라서 제안한 알고리즘으로 영상기반 실시간 자동추적, 영상을 이용한 자율주행차의 위치 및 자세결정, 공선조건식 기반의 번들조정(bundle adjustment) 및 카메라 캘리브레이션의 초기값 선정 등의 영상을 이용한 다양한 분야에서 활용될 것으로 판단된다.

References

- Bouguet, J.Y. (2015), Camera calibration toolbox for Matlab, *Caltech Vision*, URL: http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc (last date accessed: 22 May 2019).
- Fischler, M.A. and Bolles, R.C. (1981), Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*. Vol. 24, No. 6, pp. 381-395.
- Gao, X.S., Hou, X.R., Tang, J., and Cheng, H.F. (2003), Complete solution classification for the perspective-three-point problem. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, Vol. 25, No. 8, pp. 930-943.
- Grafarend, E.W. and Shan, J. (1997), Closed-form solution of P4P or the three-dimensional resection problem in terms of Möbius barycentric coordinates, *Journal of Geodesy*, Vol. 71, No. 4, pp. 217-231.
- Guan, Y., Cheng, X., Zhan, X., and Zhou, S. (2008), Closed-form solution of space resection using unit quaternion. *In Artigo apresentado no XXI ISPRS Congress*, 3-11 July 2008,

- Beijing, China, Vol. XXXVII, Part B3b, pp. 3-11.
- Jiang, G.W., Jiang, T., Wang, Y., and Gong, H. (2007). Space resection independent of initial value based on unit quaternions, *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, Vol. 36, No. 2, pp. 169–175.
- Hong, S.P. and Kim, E.M. (2019), Comparison of point-based 3d transformation methods, *Proceedings of Journal of Korean Society for Geospatial Information System, Korean Society for Geospatial Information Science*, 31-1 May, Busan, Korea, pp. 19-22. (in Korean)
- Kabsch, W. (1976), A solution for the best rotation to relate two sets of vectors, *Acta Crystallographica Section A: Crystal Physics, Diffraction, Theoretical and General Crystallography*, Vol. 32, No. 5, pp. 922-923.
- Kim, E.M. and Choi, H.S. (2018), Analysis of the accuracy of quaternion-based spatial resection based on the layout of control points, *Journal of the Korean Society of Surveying, Geodesy, Photogrammetry and Cartography*, Vol. 36, No. 4, pp. 255-262. (in Korean with English abstract)
- Lepetit, V., Moreno-Noguer, F., and Fua, P. (2009). EPnP: an accurate $o(n)$ solution to the PnP problem. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 81, No. 2, pp. 155–166.
- Lim, J.H. (2018), *Optimization Theory*, Jang-Hwan Publishing, Goyang.
- Luhmann, T., Robson, S., Kyle, S., and Harley, I. (2011), *Close Range Photogrammetry Principles, techniques and applications*, Whittles Publishing, Caithness.
- Mazaheri, M. and Habib, A. (2015), Quaternion-based solutions for the single photo resection problem, *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, Vol. 81, No. 3, pp. 209-217.
- Mikhail, E.M., Bethel, J.S., and McGlone, J.C. (2001), *Introduction to Modern Photogrammetry*, John Wiley & Sons Inc., New York, N.Y.
- Nielsen, A.A. (2013). Least squares adjustment: linear and nonlinear weighted regression analysis. *Applied Mathematics and Computer Science/National Space Institute*, Technical University of Denmark, URL: http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/2804/pdf/imm2804.pdf (last date accessed: 22 May 2019).
- Strang, G. (2016), *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, M.A.
- Torr, P.H.S. and Zisserman, A. (2000), Mlesac: a new robust estimator with application to estimating image geometry, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 78, No. 1, pp. 138-156.