

https://doi.org/10.7236/IIBC.2019.19.3.173
IIBC 2019-3-23

모드 전송선로 이론의 고유치 문제를 사용한 주기적인 blazed 2D 회절격자의 정확한 분석

Rigorous Analysis of Periodic Blazed 2D Diffraction Grating using Eigenvalue Problem of Modal Transmission-Line Theory

호광춘*

Kwang-Chun Ho*

요 약 Blazed 격자구조에 의한 광 신호의 회절 특성을 분석하기 위하여 처음으로 격자구조의 Toeplitz 유전율 tensor를 2D spatial Fourier 급수로 정의하고 공식화하였다. 그때 각 층에서의 필드들은 고유치 문제에 기초하여 표현하였으며, 완전한 해는 적절한 경계 값 문제에 의존하는 모드 전송선로 이론 (MTLT)을 사용하여 정확하게 유도하였다. 비대칭형 blazed 격자구조의 Toeplitz 유전율 tensor에 기초하여 대칭형과 톱니형 격자구조의 Toeplitz 행렬을 정의하고 각 격자구조에 대한 회절특성을 수치해석 하였다. 수치해석 결과, 비대칭형과 대칭형 구조는 무반사 (anti-reflection) GMR 필터 특성을 나타내었으며, 대칭형 구조가 비대칭형 구조보다 광대역 필터특성을 보였다. 이에 반하여 톱니형 격자구조는 무반사보다 무투과 (anti-transmission) 필터의 특성이 더욱 강하게 나타났다.

Abstract To analyze the diffraction properties of optical signals by periodic blazed 2D diffraction gratings, Toeplitz dielectric tensor is first defined and formulated by 2D spatial Fourier expansions associated with asymmetric blazed grating profile. The characteristic modes in each layer is then based on eigenvalue problem, and the complete solution is found rigorously in terms of modal transmission-line theory (MTLT) to address the pertinent boundary-value problems. Toeplitz matrix of symmetric and sawtooth profiles is derived from that of asymmetric blazed grating profile, and the diffraction properties for each profile are numerically simulated. The numerical results reveal that the asymmetric and symmetric profiles behave as anti-reflection GMR filter while the sawtooth profile works better as anti-transmission one rather than anti-reflection filter.

Key Words : Blazed Diffraction Gratings, Spatial Fourier Expansion, Modal Transmission-Line Theory

I. 서 론

삼각형 모양의 blazed 격자는 격자 주기, 두께, 격자

각도 등의 설계 매개 변수를 최적화하여 주어진 파장에
서 광 회절을 조작하는 데 사용할 수 있는 광학 장치이다
[1-3]. 이 격자 구조는 단색 광원에 입사 되었을 때 특정

*종신회원, 한성대학교 전자정보공학과
접수일자 2019년 3월 16일, 수정완료 2019년 5월 3일
게재확정일자 2019년 6월 7일

Received: 16 March, 2019 / Revised: 3 May, 2019 /
Accepted: 7 June, 2019

*Corresponding Author: kwangho@hansung.ac.kr
Dept. of EI Engineering, Hansung University, Korea

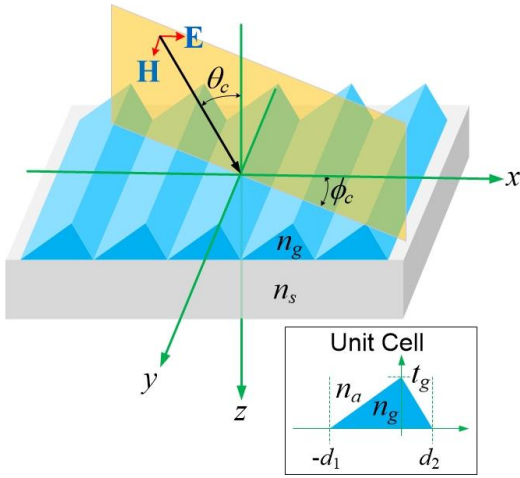


그림 1. 주기적인 blazed 2D 회절격자의 구성도.
Fig. 1. Schematic diagram of periodic blazed 2D diffraction grating.

회절 차수의 주파수 성분을 향상시키도록 설계 할 수 있다. 더욱이, 많은 구조 매개 변수의 유연성과 회절 비율을 향상시키는 특성 때문에 분광계, 단색화 장치 또는 광통신 주변장치와 같은 많은 광학 시스템에 사용되어 오고 있다.

이와 같은 다양한 광학 시스템의 설계에 중요한 광학 특성인 blazed 격자구조에 대한 공간고조파(space harmonics)의 회절특성과 전송모드의 공진특성 (GMR: guide-mode resonance)은 사각형 격자구조의 광학특성을 분석하기 위하여 널리 사용되고 있는 RCWA (rigorous coupled-wave analysis)를 채택하여 해석되어 왔다 [4,5]. 그러나 blazed 격자구조를 다층의 discrete 사각형 (rectangular) 격자구조로 근사화하고 컴퓨터 수치해석을 통하여 그 설계 특성을 분석한 결과를 얻기 위하여 매우 긴 수치해석 시간이 필요하다. 더욱이, 다층의 discrete 사각형 격자구조를 몇 층으로 구성하는지에 의존하여 수치해석의 정확성이 결정되기 때문에 결과의 정확성을 높이기 위하여 가능한 매우 많은 층으로 blazed 격자구조를 나누어야 한다.

이와 같은 기존 해석법의 단점을 개선하기 위하여 본 논문에서는 Fourier 확장 of 고유치 문제에 의존하는 정확한 모드 전송선로 이론 (rigorous modal transmission-line theory) [6,7]을 사용하여 blazed 격자구조의 회절특성과 GRM 특성을 수치 해석적 방법이 아닌 수식에 의존하는 analytic 기법을 적용하여 수치 해석적 오차 없이 정확하게 분석하는 방법을 2장에서 제시하였다. 또한, 3장에

표 1. Blazed 회절격자의 분류.

Table 1. Classification of blazed diffraction grating.

| Scheme | Condition | Grating Profile |
|--------|--------------------|-----------------|
| | $d_1 \neq d_2$ | Asymmetric |
| | $d_1 = d_2 = d/2$ | Symmetric |
| | $d_1 = d, d_2 = 0$ | Sawtooth |

서는 제안한 이론의 타당성을 보이기 위하여 비대칭형 (asymmetric), 대칭형 (symmetric), 그리고 톱니형 (sawtooth) blazed 격자구조의 광학특성을 그래프로 도시하고 그 결과를 자세하게 설명하였다.

II. Eigenvalue Problem에 기초한 모드 전송선로 이론

주기적인 2D 패턴의 blazed 격자 구조로 구성된 구조의 회절 특성을 분석하기 위하여 격자 패턴에 대한 Fourier 확장 특성을 정의해야 한다. 그러나 기존의 Fourier 급수 표현법으로 blazed 격자 구조를 정의할 수 없어서 지금까지 blazed 격자 구조의 회절 특성은 blazed 격자를 discrete한 무한한 개수의 사각형 격자구조로 근사화하여 분석하여 왔다. 본 논문에서 그림 1에서 보듯이, 굴절률 n_g 인 비대칭형 blazed 유전체와 n_a 인 공기층으로 구성된 격자 구조의 굴절률을 새롭게 정의한 2D spatial Fourier 급수로 아래와 같이 정의하였다.

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \sum_n \varepsilon_n e^{i(2n\pi/d)x} \quad (1)$$

여기서, Fourier 계수 ε_n 는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{t_g d} \int_0^{t_g} \int_{-d_1}^{d_2} \varepsilon(x, z) e^{-i(2n\pi/d)x} dx dz \\ &= \frac{\Delta\varepsilon}{(2n\pi)^2} \left(\frac{d}{d_1} + \frac{d}{d_2} \right) \left(1 - e^{i(2n\pi d_1/d)} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

위의 식에서 $\Delta\varepsilon = n_g^2 - n_a^2$, 이고 0-번째 Fourier 계수 ε_0 는

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{g1} + \varepsilon_{g2}) \quad (3)$$

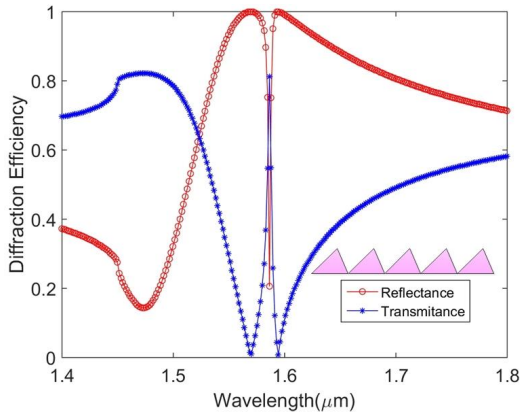


그림 2. 비대칭형 blazed 격자에 직각으로 입사된 기본 모드에 대한 반사도와 투과도의 변화.

Fig. 2. (Color Online) Variation of reflectance and transmittance for fundamental mode incident normally in asymmetric blazed grating.

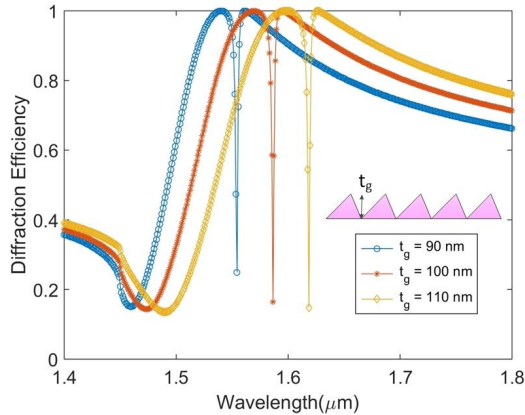


그림 3. 비대칭형 blazed 격자구조의 격자높이에 따른 반사도의 변화.

Fig. 3. (Color Online) Variation of reflectance according to grating height of asymmetric blazed grating profile.

와 같이 정의된다. 이 비대칭 blazed 격자의 Fourier 급수는 표 1에서 보듯이 비대칭을 구성하는 변수 d_1, d_2 에 의존하여 다양한 형태의 blazed 격자구조로 변형될 수 있다. 본 논문에서는 표 1에 주어진 3종류의 blazed 격자구조에 대한 회절특성을 분석하고 상호 연관특성을 비교하였다.

식 (1)에 정의된 격자구조에 대한 Toeplitz 유전율 tensor를 사용하여 MTLT의 고유치 문제 (eigenvalue problem)로부터 z -축을 따라 전파하는 모드들의 전파상수를 결정할 수 있으며, 그로부터 회절 특성을 분석할 수 있다. 그때 주기적인 구조에서 발생하는 일반적인 전계와

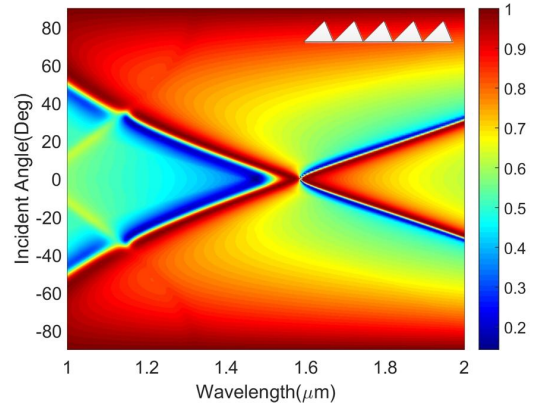


그림 4. 비대칭형 blazed 격자에서 파장과 입사각의 변화에 대한 반사도.

Fig. 4. (Color Online) Reflectance for variation of wavelength and incident angle in asymmetric blazed grating.

자계는 $\pm z$ -방향으로 진행되는 공간 고조파로 구성된 진폭행렬 \mathbf{f}, \mathbf{g} 를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}_x x} \left(e^{i\mathbf{K}_z z} \mathbf{f} + e^{i\mathbf{K}_z (t-z)} \mathbf{g} \right),$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_y \\ -\mathbf{H}_x \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}_x x} \mathbf{Y}_{\mathbf{K}} \left(e^{i\mathbf{K}_z z} \mathbf{f} - e^{i\mathbf{K}_z (t-z)} \mathbf{g} \right) \quad (4)$$

그러므로 식 (4)를 TE, TM 모드 특성을 만족하는 Maxwell 방정식에 대입하면 아래와 같은 고유치 문제의 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_z^2 = \begin{cases} \mathbf{E} - \mathbf{K}_x^2 & , \text{TE mode} \\ \mathbf{E} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x) & , \text{TM mode} \end{cases} \quad (5)$$

여기서, \mathbf{E} 는 식 (1)로 구성된 Toeplitz 행렬을 나타내며, 횡방향 전파상수인 \mathbf{K}_x 는

$$k_{xn} = k_0 n_a \sin \theta_c + \frac{2\pi n}{d} \quad (6)$$

에 의존하는 대각선 행렬로 주어진다.

결국 상용 프로그램인 matlab의 eig 함수를 사용하여 식 (5)의 고유치 문제를 만족하는 eigenvector \mathbf{f}, \mathbf{g} 와 eigenvalue \mathbf{K}_z 를 쉽게 결정할 수 있다. 그때 그림 1에 도시된 blazed 회절 격자구조의 각 층들은 모드 전송선로 이론 (MTLT)의 연속적으로 연결된 전송선로로 등가화 할 수 있다. 식 (5)로부터 결정된 eigenvalue에 의존하는 그 등가 전송 선로의 특성

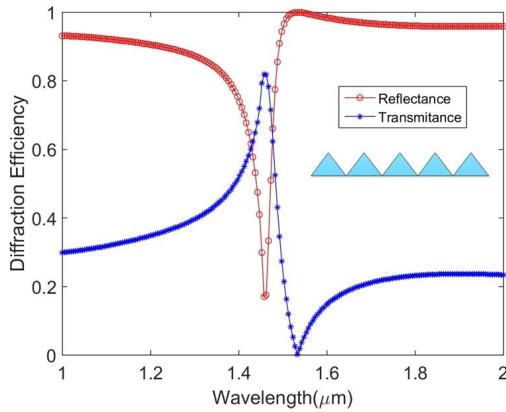


그림 5. 대칭형 blazed 격자에 직각으로 입사된 기본 모드에 대한 반사도와 투과도의 변화.
Fig. 5. (Color Online) Variation of reflectance and transmittance for fundamental mode incident normally in symmetric blazed grating.

admittance 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \mathbf{K}_z / (\omega \mu_0) & , \text{TE mode} \\ (\omega \varepsilon_0) / \mathbf{K}_z & , \text{TM mode} \end{cases} \quad (7)$$

그러므로 식 (7)의 특성 admittance 행렬로 구성된 등가 전송선로에서 전파하는 모드들의 반사도와 투과도를 마이크로파 공학의 개념으로 간단하고 정확하게 분석할 수 있다.

III. 수치해석 및 고찰

그림 1에 도시하였듯이 입사파는 blazed 격자 구조에 수직(normal) ($\theta_c = 0$) 또는 원뿔(conical) ($\phi_c \neq 0$) 형태로 입사될 수 있다. 본 논문에서는 제시한 해석법의 타당성을 조사하기 위하여 방위각 (azimuthal angle) ϕ_c 와 고도각 (elevation angle) θ_c 가 모두 0° 인 TE 모드에 대하여 먼저 분석하였다. 그때 blazed 격자 구조는 $n_s = 1.45$ 의 SiO_2 와 $n_g = 3.5$ 의 Si로 구성하였으며, 격자 두께는 $t_g = 0.1 \mu\text{m}$, 격자 주기는 $d = d_1 + d_2 = 1.0 \mu\text{m}$ 로 선정하였다.

$d_1 = 0.45 \mu\text{m}$ 인 비대칭형 blazed 격자 구조로 구성된 회절격자 구조의 주파수 응답특성을 나타내는 그림 2에서 보듯이, $\lambda \approx 1.586 \mu\text{m}$ 에서 20% 이하의 반사도를 갖는 무반사 (anti-reflection) GMR 필터 특성을 나타내었다. 더욱이 반사도가 20%인 경우에 대

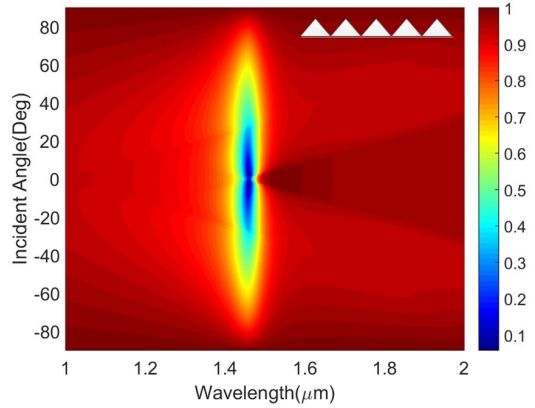


그림 6. 대칭형 blazed 격자에서 파장과 입사각의 변화에 대한 반사도.
Fig. 6. (Color Online) Reflectance for variation of wavelength and incident angle in symmetric blazed grating.

역폭은 약 0.4nm 로 협대역의 필터특성을 보였다.

또한 그림 3에서 보듯이, 격자 두께 t_g 가 증가함에 따라 무반사 GMR 특성이 조금씩 향상되었으며, 각 공진 피크의 sideband가 점진적으로 줄어들어 가는 것을 확인할 수 있었다. 본 논문에서는 제시하지 않았지만 격자 두께 t_g 가 증가함에 따라 공진특성이 주기적으로 발생하였다. 이는 고차 TE 모드들의 무반사 GMR 특성을 나타내는 것으로 격자 두께를 변화시킴으로써 여러 개의 무반사 GMR 특성이 나타내는 공진필터를 쉽게 구성할 수 있음을 제시하는 것이다. 추가적으로 입사 각도와 파장에 따른 반사도의 변화를 그림 4에 도시하였다. 그림에서 보듯이, 고도각 θ_c 가 수직입사가 아닌 경사각으로 입사한 경우 $-90^\circ \leq \theta_c < 0^\circ$ 와 $0^\circ < \theta_c \leq 90^\circ$ 사이에서 두 개의 비반사 공진 특성이 나타났으며, 비대칭성에 기인한 음/양 각도의 반사도 차이는 거의 발생하지 않았다.

다음으로 blazed 격자구조의 구조적 변화에 따른 무반사 GMR 특성을 분석하기 위하여 표 1에 주어진 격자 구조에 대하여 파장의 변화에 따른 반사도와 투과도의 변화를 수치 해석하였다. 비대칭성을 나타내는 변수 d_1 과 d_2 가 $d/2$ 로 서로 같을 때, 즉 blazed 격자구조가 대칭형 구조일 때, 그림 5에서 보듯이 $\lambda \approx 1.46 \mu\text{m}$ 에서 15% 이하의 반사도를 갖는 무반사 GMR 필터 특성을 나타내었다. 특히 반사도가 20%인 경우에 대역폭은 약 7nm 로 비대칭형 격자구조에 비하여 약 17배 정도의 광대역의 필터특성을 보였다. 이는 blazed

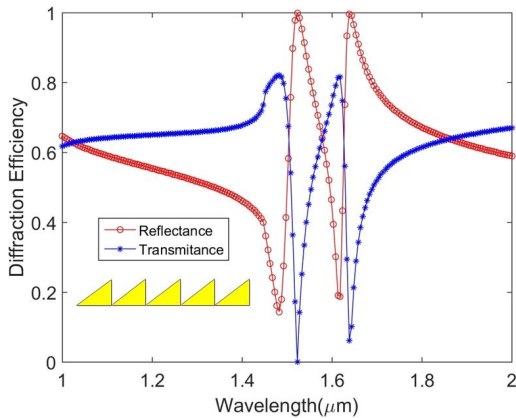


그림 7. 톱니형 blazed 격자에 직각으로 입사된 기본 모드에 대한 반사도와 투과도의 변화.

Fig. 7. (Color Online) Variation of reflectance and transmittance for fundamental mode incident normally in sawtooth blazed grating.

격자구조의 대칭성에 기인하여 수직으로 입사한 모드가 넓은 대역의 범위에서 매우 잘 공진모드로 변환하는 것을 나타낸다. 전통적으로 무반사 GMR 필터로 제작되어 왔던 ‘moth-eye’ 구조의 회절 특성과 잘 일치함을 보여 주고 있다. 더욱이 앞서 분석한 비대칭형 구조와 다르게 대칭형 구조의 경우, 그림 6에서 보듯이 $\pm 30^\circ$ 사이에서 오직 하나의 무반사 공진특성을 나타내었다. 이와 같은 특성은 대칭형 구조의 회절특성은 입사하는 광신호의 파장 변화에 민감하지 않다는 것을 의미한다.

마지막으로, 극단적인 비대칭형 구조인 톱니형 blazed 격자구조에 대한 회절특성을 수치 해석하였다. 그림 7에서 보듯이, 톱니형 구조는 $\lambda \approx 1.48 \mu\text{m}$ 과 $1.61 \mu\text{m}$ 에서 공진특성이 나타났으나 무반사 공진 특성으로 생각하기에는 무리가 있어 보였다. 심지어 공진 피크에 대한 sideband의 특성이 현저하게 좋지 않아 무반사 GMR 공진필터로 부적합한 것으로 분석되었다. 이에 대한 결과는 그림 8의 pseudo-color 지도에서 명확하게 확인할 수 있다. 그림에서 보듯이, 톱니형 구조는 모든 입사각에 대하여 무반사 특성 보다는 전반사의 공진필터 특성을 보여 주었다. 즉, 톱니형 구조는 무투과 회절특성의 공진필터로 설계하는 것이 더 효율적이라 판단된다.

IV. 결 론

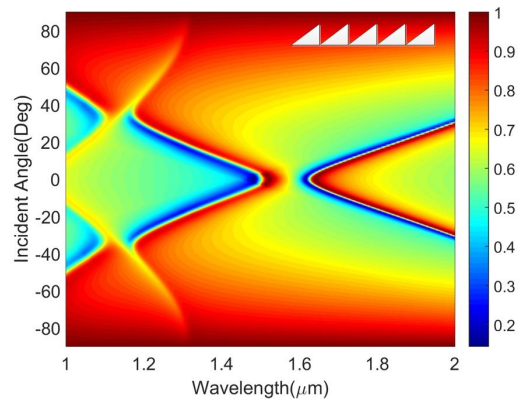


그림 8. 톱니형 blazed 격자에서 파장과 입사각의 변화에 대한 반사도.

Fig. 8. (Color Online) Reflectance for variation of wavelength and incident angle in sawtooth blazed grating.

본 논문에서 SiO_2 로 구성된 균질 층 및 Si의 주기 층을 포함하는 blazed 격자 구조에 의하여 발생하는 평면파의 회절특성을 분석하기 위한 정확한 해석법을 제시하였다. Blazed 격자 구조의 주기적인 유전 층에서 필드 성분을 얻기 위하여 처음으로 2D spatial Fourier 급수를 적용하여 Toeplitz 행렬로 불리는 해석적인 유전율 tensor를 유도한 후에 고유치 문제를 이용하여 원하는 필드 성분을 정확하게 얻었다. 그리고 적절한 경계 조건은 마이크로파공학에서 일반적으로 사용하는 전송선로 형식을 사용하여 취급하였다.

제시한 방법은 blazed 격자를 discrete한 무한한 개수의 사각형 격자구조로 근사화하여 분석한 이전의 논문의 결과들에 비하여 수치 해석적 오류가 발생하지 않으며 다양한 형태의 blazed 격자구조의 회절특성을 정확하게 분석할 수 있다.

결국, 본 논문에서 제시한 해석법은 다양한 범위의 형태를 갖는 다층 및 격자를 포함한 회절특성을 다루기 위하여 수치적 과정보다는 기본적으로 해석적인 방법을 제공하기 때문에 복잡한 구조의 blazed 격자구조에 의한 회절을 연구하기 위한 강력한 도구로 제공 될 수 있을 것으로 기대한다.

References

[1] Mizutani A, Kikuta H, Iwata K and Toyota H, "Guided-mode resonant grating filter with an antireflection structured surface," J. Opt. Soc. Am. A

19, pp. 1346-1351, 2002.

DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.19.001346>

- [2] G. J. Olson, H. W. Mocker, N. A. Demma, and J. B. Ross, "Coherent CO₂ laser communication system with modulable retroreflectors," *Appl. Opt.* 34, pp. 2033-2044, 1995.

DOI: <https://doi.org/10.1364/AO.34.002033>

- [3] J. Yuan, S. Chang, S. Li, and Y. Zhang, "Design and fabrication of micro-cube-corner array retroreflectors," *Opt. Commun.* 209, pp. 75-83, 2002.

DOI: [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(02\)01630-9](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(02)01630-9)

- [4] L. Li, "Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings," *J. Opt. Soc. Am. A* 13, pp. 1024-1035, 1996.

DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.13.001024>

- [5] Brundrett D L, Glytsis E N, Gaylord T K and Bendickson J M, "Effects of modulation strength in guided-mode resonant subwavelength gratings at normal incidence," *IJ. Opt. Soc. Am. A* 17, pp. 1221-1230, 2000.

DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.17.001221>

- [6] M. Jiang, T. Tamir, and S. Zhang, "Modal theory of diffraction by multilayered gratings containing dielectric and metallic components," *J. Opt. Soc. Am. A* 18, 807-820 (2001).

DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.18.000807>

- [7] K. C. Ho, "Diffraction Analysis of Multi-layered Grating Structures using Rigorous Equivalent Transmission-Line Theory," *The J. of IIBC*, Vol. 15, No. 1, pp. 261-267, 2015.

DOI: <http://dx.doi.org/10.7236/JIIBC.2015.15.1.261>

- [8] Y. J. Choi, I. S. Choi, S. W. Oh and Y. H. Jung, "Analysis of Diffraction Interference for Integrated Mast Using Uniform Theory of Diffraction," *The Journal of KIIT*, Vol. 17, pp. 51-58, 2019.

DOI: <http://dx.doi.org/10.14801/jkiit.2019.17.3.51>

- [9] I. T. Kim, K. M. Lim and Y. S. Yu, "Reflectance and Transmittance Properties of Holographic Polymer Dispersed Liquid Crystal Gratings," *The Journal of KIIT*, Vol. 5, pp. 196-204, 2007.

저자 소개

호 광 춘(중신회원)



- 1996, NYU School of Engineering (Ph.D. in EE)
- 1998~1999, 한국통신 연구개발본부
- 2000 ~ 현재, 한성대학교 기계전자공학부 전자트랙 교수
- 주관심분야 : Optical Electromagnetics, Design and Analysis of Photonic Devices, Optical Biosensors and Bioelectronics

※ 본 연구는 한성대학교 교내연구비 지원과제입니다.