

Comparison of Phase-Screen-Generation Methods for Simulating the Effects of Atmospheric Turbulence

Dung T. Ha, Vuong V. Mai, and Hoon Kim[†]

School of Electrical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology (KAIST),
291 Daehak-ro Yuseong-gu, Daejeon 34141, Korea

(Received February 8, 2019; Revised April 28, 2019; Accepted April 30, 2019)

Phase screens are widely used to simulate the effects of atmospheric turbulence on the phase fluctuations of a light beam. We compare three sampled-based phase-screen-generation methods (the fast-Fourier-transform, subharmonic, and covariance-matrix methods), in terms of accuracy and simulation time. We show that the covariance method generates the phase screens most accurately, with simulation time comparable to the other sampled-based methods.

Keywords: Atmospheric turbulence, Phase screen

OCIS codes: (010.1330) atmospheric turbulence; (010.1300) atmospheric propagation

대기 외란을 모사하는 위상판 생성 방법 비교

Dung T. Ha · Vuong V. Mai · 김 훈[†]

한국과학기술원 전기및전자공학부
Ⓞ 34141 대전광역시 유성구 대학로 291

(2019년 2월 8일 받음, 2019년 4월 28일 수정본 받음, 2019년 4월 30일 게재 확정)

대기를 매개로 사용하는 광학 시스템에서 대기의 난류가 빛의 위상에 미치는 영향을 모사하기 위하여 위상판이 널리 사용된다. 본 논문에서는 위상판을 생성하는 3가지 방법을 정확성과 위상판 생성 시간 측면에서 비교 분석한다. 비교에 사용된 샘플 기반 위상판 생성 방법은 FFT, 저조파, 공분산 행렬 방법이다. 공분산 행렬 방법으로 생성된 위상판의 경우 구조 함수 값이 이론치에 매우 가까웠으며, 위상판 생성 시간도 다른 두 방법보다 크게 오래 걸리지 않았다.

Keywords: 대기 난류, 위상판

OCIS codes: (010.1330) atmospheric turbulence; (010.1300) atmospheric propagation

I. 서 론

대기를 매개로 사용하는 광학 시스템의 경우 대기의 유동적인 움직임에 그 성능이 크게 좌우된다. 공기의 움직임과 밀도의 변화는 미세한 굴절률의 변화를 야기하므로 대기를 통과하는 빛의 전파 특성에 영향을 미친다. 따라서 대기를 전파하는 빛 신호는 빔살 원더링(*beam wandering*)과 신타레이션(*scintillation*) 등에 의하여 전파 경로가 변화하거나 공간·시간적으로 빛의 세기가 변한다. 이러한 현상은 무선 광통신 시스템에서 수신되는 빛의 세기를 감소시키므로 전송 성능을 열화시킨다^[1]. 또한 천문학 및 원거리 광학적 이미지 센서에서 관측 또는 감지하고자 하는 상의 선명도를 떨어뜨린다^[2].

대기 채널은 물리적으로 매우 길고 클 뿐만 아니라 지역마다 시간마다 대기의 특성이 변하므로 대기를 매개로 하는 광학 시스템의 특성을 실험을 통하여 연구하고 평가하기가 매우 까다롭다. 또한 대기 채널을 임의로 제어할 수 없으므로 실험 결과가 다양한 대기 채널의 특성을 나타낸다고 볼 수도 없다. 따라서 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 성능 특성이 널리 활용된다. 컴퓨터의 강력한 계산력을 활용하여 대기 난류를 모사함으로써 실제 실험을 대신하여 대기를 통과하는 빛 신호의 왜곡을 분석할 수 있다. 대기 채널의 굴절률 변화가 야기하는 빛 신호의 위상 변화는 위상판(*phase screen*)을 활용하여 모사할 수 있다. 위상판은 대기에 의한 빛 신호의 랜덤(*random*) 위상변화를 압축해 놓은 판으로서, 5 km의 대기 채널

[†]E-mail: hoonkim@kaist.ac.kr, ORCID: 0000-0001-7395-3695

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

널도 1개의 위상판으로 모사할 수 있다¹³.

위상판을 생성하는 방법은 크게 모드 방법(modal method)과 샘플(sample) 방법으로 구분된다⁴. 모드 방법은 위상판의 위상을 모드의 중첩으로 표시하는 방법으로서 Zernike 다항식 방법이 대표적인 예이다⁵. 샘플 방법은 위상판을 격자 형태로 촘촘히 나눈 후 격자점 위치마다 위상 값을 부여하는 방법이다. 이 방법은 크게 고속 푸리에 변환(fast Fourier transform, FFT) 방법과 공분산 행렬(covariance matrix) 방법으로 구분된다. FFT 방법은 2차원 위상판을 랜덤 계수를 가진 2차원 푸리에 급수로 표현하는 방식이다⁶. 그러나 이 방법은 공간적 저대역 통과 특성을 갖는 대기 난류의 저주파 성분을 제대로 표현하지 못하는 단점이 있다. 이를 해결하기 위하여 저해상도 대형 위상판을 생성한 후, FFT 방법으로 생성된 고해상도 위상판에 더해 줌으로써 저주파 성분을 보상하는 저조파(subharmonic) 방법도 널리 활용된다^{6,7}. 공분산 행렬 방법은 FFT 방법에서 표현되지 못하는 공간적 저주파 성분에 대한 자기상관 함수(autocorrelation function)를 상관 행렬(correlation matrix) 방법으로 계산하고 이로부터 저주파 위상판을 생성한 후, 이를 FFT 방법으로 생성된 위상판에 더해준다^{8,9}.

오래전부터 위상판을 생성하는 다양한 방법이 제안되어 컴퓨터 시뮬레이션 및 실내 개념 실험(proof-of-concept experiment) 등에서 폭넓게 활용되고 있으나, 위상판 생성 방법을 직접적으로 비교한 문헌은 찾아보기 어렵다. 본 논문에서는 샘플 기반 위상판 생성 방법을 정확성과 생성 시간 측면에서 비교 분석한다. 무선 광통신 시스템과 같이 대기 채널의 시변 움직임에 비하여 고속 신호를 전송하는 경우 대기 매질을 준정적(quasi-static) 채널로 간주할 수 있다¹⁰. 본 논문에서는 시변하지 않는 대기 채널을 위상판을 활용하여 모사하는 방법을 비교한다. 공정한 비교를 위하여 위상판의 크기를 일정하게 설정하였으며, 생성된 위상판이 의도한 구조 함수 값을 얼마나 정확하게 나타내는가를 측정한 후 이론값과 비교하였다. 또한 동일 컴퓨터를 활용하여 서로 다른 방법으로 위상판을 생성함으로써 상대적인 위상판 생성 시간을 비교하였다.

II. 구조 함수와 굴절률 변화의 공간 전력 스펙트럼

공간적으로 특정 위치의 대기 온도나 굴절률을 확률 과정(random process)으로 볼 수 있다. 그러나 이들의 평균 값이 짧은 시간 동안만 상수이므로 정상 과정(stationary process)으로 볼 수 없다¹¹. 그럼에도 불구하고 이러한 확률 과정은 대체적으로 정상 증분(stationary increment)을 가진다고 할 수 있으므로 확률 과정 $x(t)$ 대신 증분인 $x(t+t_1)-x(t_1)$ 를 다루는 것이 용이하다. 따라서 공분산 함수(covariance function) 대신 구조 함수(structure function)로 이들을 기술할 수 있다.

확률 과정 $x(t)$ 는 평균인 $m(t)$ 와 평균이 0인 확률 과정 $x_1(t)$ 의 합으로 표현 가능하다(식 (1)).

$$x(t) = m(t) + x_1(t) \tag{1}$$

이 때 확률 과정 $x(t)$ 의 구조 함수는 다음 식 (2)와 같이 표현된다.

$$D_x(t_1, t_2) = \langle [x(t_1) - x(t_2)]^2 \rangle \approx \langle [x_1(t_1) - x_1(t_2)]^2 \rangle \tag{2}$$

여기서 $\langle \rangle$ 는 앙상블 평균(ensemble average)이다. 위상판 위의 두 점 ρ 와 $\rho+r$ 에 대하여 위상판의 위상을 $\phi(\rho)$ 와 $\phi(\rho+r)$ 라고 하면 구조 함수는 다음 식 (3)과 같이 기술된다.

$$D(r) = \langle [\phi(\rho+r) - \phi(\rho)]^2 \rangle \tag{3}$$

대기의 굴절률 변화는 습도와 기압의 변화보다는 온도의 작은 변동에 의하여 주로 결정된다. 따라서 굴절률 변화의 공간 전력 스펙트럼(spatial power spectrum)은 온도의 그것과 유사한 형태를 갖는다¹¹. 콜모고로프(Kolmogorov) 난류 이론에 따르면 굴절률 변화의 공간 전력 스펙트럼은 관성 아영역(inertial subrange)의 외부 규모(outer scale) L_0 와 내부 규모(inner scale) l_0 에 대하여 다음 식 (4)와 같이 표현된다¹¹.

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}, 1/L_0 \ll \kappa \ll 1/l_0 \tag{4}$$

여기서 κ 는 공간 파수(spatial wave number)이며, C_n^2 는 굴절률 구조 상수 값이다. 이 공간 전력 스펙트럼은 관성 아영역에서만 정의되므로 모든 공간 파수에 대하여 사용하기 위하여 다음 식 (5)와 같이 수정된 공간 전력 스펙트럼이 사용되기도 한다¹¹.

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)}, 0 \leq \kappa < \infty \tag{5}$$

여기서 $\kappa_0 = 2\pi/L_0$, $\kappa_m = 5.92/l_0$ 이다. 이 공간 전력 스펙트럼은 수정된 본 카르만(modified von Karman) 전력 스펙트럼이라고 불리운다. 이 공간 전력 스펙트럼에 대하여 구조 함수는 다음 식 (6)과 같이 기술된다¹².

$$D_\phi(r) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \times \frac{2^{1/6} \Gamma(11/6)}{\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} \times \left[\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - \left(\frac{2\pi r}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi r}{L_0}\right)\right] \tag{6}$$

여기서 Γ 와 K 는 각각 감마 함수(gamma function)와 수정 베셀 함수(modified Bessel function)이다. 또한 r_0 는 프라이드 파라미터(Fried parameter)이며, 굴절률 구조 함수 상수와 다음 식 (7)과 같은 관계가 있다¹³.

$$r_0 = 0.185 \left[\frac{\lambda^2}{\int_z^{z+\Delta z} C_n^2(\xi) d\xi} \right]^{3/5} \quad (7)$$

여기서 λ 는 빛의 파장이며, z 는 빛의 진행 방향이다.

III. 샘플 기반 위상판 생성 방법

3.1. FFT 방법

FFT 방법은 공간 전력 스펙트럼 특성을 역 FFT하여 위상판을 생성하는 방법이다. 그림 1에 구현 방법을 도시하였다. 먼저 식 (5)로 주어진 공간 전력 스펙트럼을 빛의 진행방향에 대하여 적분하면 다음 식 (8)과 같이 2차원 위상판의 전력 스펙트럼을 얻을 수 있다.

$$F_\phi(\kappa_r) = 0.49r_0^{-5/3} \frac{\exp(-\kappa_r^2/\kappa_m^2)}{(\kappa_r^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} \quad (8)$$

여기서 κ_r 은 2차원 공간 파수로서 x 축 공간 파수를 κ_x , y 축 공간 파수를 κ_y 라고 표기하면 $\kappa_r = (\kappa_x^2 + \kappa_y^2)^{1/2}$ 이다. 위상판의 2차원 위치 (x, y) 에서의 위상값은 전력 스펙트럼의 제곱근의 크기를 갖는 백색 가우시안 과정(white Gaussian process)을 필터링한 후 역 FFT 변환하여 얻을 수 있다. 즉,

$$\phi(x, y) = \sum_{\kappa_x} \sum_{\kappa_y} h(\kappa_x, \kappa_y) \sqrt{F_\phi(\kappa_x, \kappa_y)} \exp[j(\kappa_x x + \kappa_y y)] \Delta\kappa_x \Delta\kappa_y \quad (9)$$

여기서 $h(\cdot)$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 허미시안(Hermitian) 복소 가우시안 과정이다.

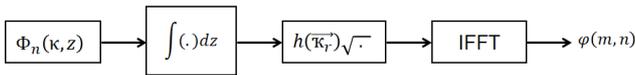


Fig. 1. FFT-based phase screen generation method.

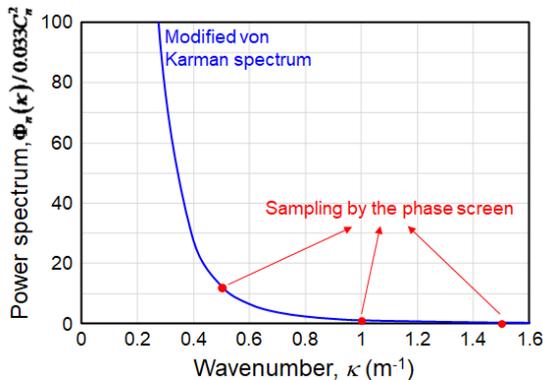


Fig. 2. Modified von Karman spatial power spectrum and the sampling of this spectrum in the FFT method.

그림 2는 수정된 본 카르만 공간 전력 스펙트럼을 보여준다. 이 스펙트럼에 대하여 FFT 방법으로 $2 \times 2 \text{ m}^2$ 크기의 격자점 수 256×256 위상판을 생성할 경우 0.5 m^{-1} ($=1/2 \text{ meter}$) 정수 배에 해당하는 파수가 샘플된다. 2 m 길이에 256개의 격자점이 있으므로 격자점 간의 거리는 $2/256 = 7.8125 \text{ mm}$ 이다. 그림에서 보듯이 본 카르만 스펙트럼에서 전력의 대부분은 0.4 m^{-1} 이하의 파수에 몰려있다. 따라서 낮은 공간 주파수로 샘플하기 위해서는 위상판의 크기를 크게 해야 한다. 예를 들어 위상판을 $10 \times 10 \text{ m}^2$ 크기로 생성할 경우 최소 샘플링되는 파수가 0.1 m^{-1} 이 된다. 그러나 이 경우 위상판을 생성하기 위한 메모리 크기가 기하급수적으로 증가하며 이에 따라 계산 시간도 급증하는 문제가 있다.

3.2. 저조파 방법(subharmonic method)

앞에서 살펴본 바와 같이 FFT 방법은 낮은 공간 주파수 성분을 효과적으로 수용하지 못하는 문제점이 있다. 이를 보완하기 위하여 저조파 방법에서는 낮은 공간 주파수 성분을 수용하기 위하여 간격이 넓은 격자를 같이 사용한다. 그림 3은 저조파 방법을 개념적으로 도시한 그림이다. 먼저 FFT 방법을 이용하여 위상판을 생성한다. 앞에서 언급한 바와 같이 이 경우 낮은 공간 주파수 성분이 샘플링되지 않는 문제가 있다. 저조파 방법에서는 높은 주파수 성분은 작은 크기의 위상판으로 생성하고, 낮은 주파수 성분은 큰 위상판으로 생성되 이 때 격자의 크기를 크게 함으로써 단순하게 위상판을 크게 할 때 발생하는 문제를 해결한다. 그림 3에서는 높은 주파수 성분은 격자점 수 $N_x \times N_y$ 위상판에서 샘플링하고, 낮은 주파수 성분은 격자점 수 3×3 ($N_{sub,x} = N_{sub,y} = 3$) 위상판에서 샘플링한다. 이 때 두 위상판의 격자의 크기가 샘플링 주파수를 결정하므로 두 위상판의 격자 크기에 주목해야 한다. 그림에서 보듯이 낮은 주파수 성분을 샘플링하는 위상판의 격자 크기가 높은 주파수 성분을 샘플링하는 위상판의 전체 크기와 같다. 이와 같은 격자 크기의 차이가 샘플링하

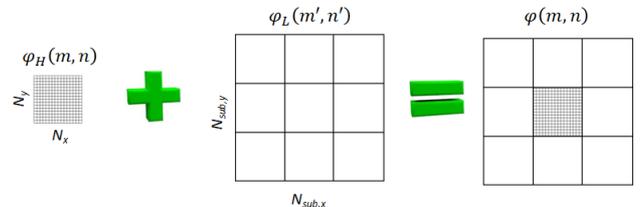


Fig. 3. Concept diagram of the subharmonic method.

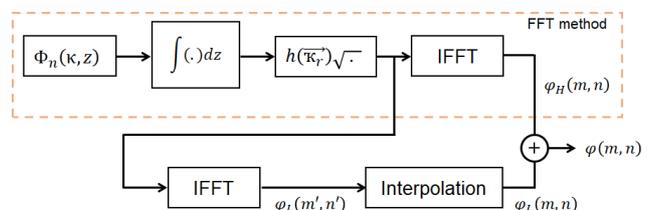


Fig. 4. Flow diagram of the subharmonic method.

는 주파수의 차이를 만든다. 그림 4는 저주파 방법에 대한 흐름도이다. 낮은 주파수 성분을 수용하는 격자 간격이 큰 위상판의 경우 FFT 방법을 이용하여 $\phi_L(m', n')$ 를 생성하고, 내삽(interpolation)을 이용하여 고주파 성분을 수용하는 작은 위상판의 격자점 위치에서의 값을 얻는다. 이후 이 값을 작은 위상판의 위상값 $\phi_H(m, n)$ 에 더하여 위상판을 생성한다.

3.3. 공분산 행렬 방법(covariance matrix method)

저주파 방식과 마찬가지로 공분산 행렬 방법도 FFT 방법에서 제대로 표현되지 못하는 낮은 주파수 성분을 보충하는 방법이다. 이 방법에서는 낮은 주파수 성분을 공분산 행렬을 이용하여 계산한다. 위상판의 자기상관(autocorrelation) 함수는 다음 식 (10)과 같이 표현된다.

$$B_\phi(r) = \langle \phi(\rho+r)\phi(\rho) \rangle = B_H(r) + B_L(r) \quad (10)$$

여기서 $B_H(r)$ 와 $B_L(r)$ 은 r 만큼 떨어져 있는 두 점에 대하여 각각 위상판의 고주파와 저주파 자기상관 함수이다. 이론적으로 자기상관 함수는 다음 식 (11)과 같이 주어진다⁹⁾.

$$B_\phi(r) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} \left(\frac{2\pi r}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi r}{L_0}\right) \quad (11)$$

FFT 방법으로 생성된 위상판의 자기상관 함수가 다음 식 (12)와 같이 주어지므로

$$B_H(m, n) = \sum_{m'=-N_x/2}^{N_x/2} \sum_{n'=-N_y/2}^{N_y/2} \Phi_n(m', n') \exp\left[j2\pi\left(\frac{m'm}{N_x} + \frac{n'n}{N_y}\right)\right] \quad (12)$$

식 (10)을 이용하여 저주파 성분의 자기상관 함수(B_L)를 구할 수 있다. 이를 이용하여 다음과 같이 저주파 위상판의 위상을 계산한다. 먼저 공분산 함수를 B_L 에 대한 stacking 연산자(아래 수식에서 물결 모양)를 이용하여 다음 식 (13)과 같은 행렬을 얻는다.

$$C_L = \langle \tilde{B}_\phi \tilde{B}_\phi^T \rangle \quad (13)$$

여기서 T 는 transpose 연산자이다. 이를 이용하여 저주파 위상판의 위상값은 아래 식 (14)와 같이 계산된다.

$$\phi_L = U \times \text{Re}\left(\sqrt{\Sigma}\right) \times X \quad (14)$$

여기서 U 와 Σ 는 각각 C_L 행렬의 고유 벡터(eigenvector)와 고유값(eigenvalue)이다. 이 때 U 와 Σ 는 특이값 분해(singular value decomposition) 방법으로 구할 수 있다. 또한 X 는 평균이 0이고, 분산이 Σ 의 대각선 원소 값인 랜덤 수로 구성된 열(column) 벡터이다. 이와 같이 생성된 낮은 주파수 위상판(한쪽 면의 격자점 수를 N_{low} 라고 명명함)과 FFT 방식으로 얻어진 높은 주파수 위상판을 더함으로써 최종적인 위상판을 얻게 된다. 이 때 그림 3의 저주파 방법과 마찬가지로 낮은 주파수 성분을 위상판의 경우 내삽을 이용하여 높은 주파수 성분을 수용하는 작은 위상판의 격자점 위치에서의 값을 얻는다. 그림 5는 공분산 행렬 방법의 흐름도이다. 저주파 방법과 유사하게 고주파 위상판과 저주파 위상판을 각각 생성하고 이를 합하는 방식이지만, 저주파 위상판을 계산할 때 공분산 행렬을 활용한다는 점이 다르다.

IV. 샘플 기반 위상판 생성 방법 비교

앞 절에서 기술한 방법을 이용하여 위상판을 생성하고 그 정확도와 생성 시간을 비교하였다. 사용된 공간 전력 스펙트럼은 수정된 식 (5)로 표현되는 본 카르만 모델이다. 표 1에 위상판 생성에 사용된 파라미터를 정리하였다. 위상판의 공간적 샘플링 간격은 해석의 정확성을 위하여 통상 프라이드 파라미터와 비슷하거나 이보다 다소 작게 설정된다^{14,15)}. 본 연구에서는 위상 변화를 세밀하게 표현할 수 있도록 공간적 샘플링 간격을 프라이드 파라미터보다 작게 설정하였다. 또한 1 km 내외의 전송 거리를 가진 실외 무선 광통신 시스템의 경우 통상 수신기 조리개의 직경이 10 cm 이하이며, 수신단 평면에 도달하는 광신호의 직경이 대략 1 m 정도이므로

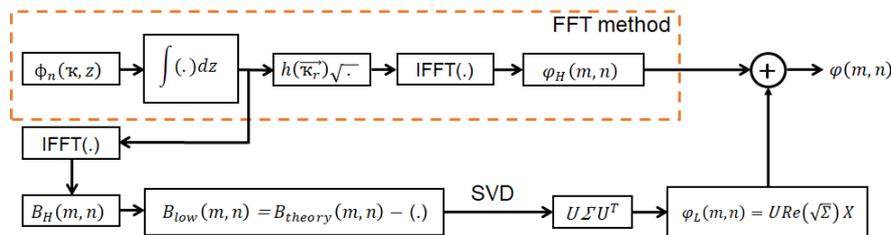


Fig. 5. Flow diagram of the covariance matrix method.

Table 1. Parameters used for the generation of phase screens

Fried parameter (r_0)	Outer scale (L_0)	Inner scale (l_0)	Size of phase screen	Number of grid points ($N_x \times N_y$)
0.1 (m)	100 (m)	0.01 (m)	2×2 (m ²)	256×256

위상판의 크기를 $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ 로 설정하였다. 생성된 위상판의 통계학적 변동을 줄이기 위하여 각 방법당 5000개의 위상판을 생성한 후 이들의 평균적 특성과 위상판 당 소요되는 평균 생성 시간을 측정하였다. 위상판 생성에 사용된 개인 컴퓨터는 인텔 Core i7-7700 프로세서(클럭 주파수: 3.6 GHz)를 사용하였다.

그림 6은 FFT, 저조파, 공분산 행렬 방법을 이용하여 생성한 위상판의 예를 보여준다. 저조파와 공분산 행렬 방법의 경우 저주파수 성분을 수용하기 위한 위상판 한쪽 면의 격자 점 수는 7이다(즉 $N_{sub}=7$, $N_{low}=7$). FFT 방법으로 생성된 위상판의 경우 FFT의 순환 특성으로 인하여 양 끝 단의 위상값이 같은 값을 가진다. 즉, $x=1$ 에서의 위상값과 $x=256$ 에서의 위상값이 같고, $y=1$ 에서의 위상값과 $y=256$ 에서의 위상값이 같다. 이러한 특성은 실제 대기 외란에는 존재하지 않으므로 FFT 방법으로 생성된 위상판의 정확도를 떨어뜨리는 원인이 된다.

그림 7(a)는 FFT 방법으로 생성된 위상판의 구조 함수 값을 측정된 결과이다. 이를 위하여 위상판 내의 임의의 두 점 간의 거리 r 에 대하여 식 (3)을 이용하여 구조 함수 값을 도출하였다. FFT 변환에서 엘리어싱(aliasing)을 제거하기 위하

여 영채우기(zero padding) 방법과 위상 변이(phase shift) 방법이 주로 활용된다. 본 논문에서는 2차원 FFT에서 메모리가 적게 사용되며 복잡성이 낮은 위상 변이 방법을 채용하였다^[16]. 그림에서 검은 실선은 식 (6)으로 표현되는 이론값을 나타낸다. 이상적으로는 측정된 위상판의 구조 함수 값이 이 이론값에 도달해야 한다. 점선으로 표시된 결과를 보면 FFT 방법으로 생성된 위상판은 이론값에 크게 못 미치고 있음을 알 수 있다. 특히 r 이 증가할수록 두 곡선 간의 차이가 벌어짐을 볼 수 있다. 이는 FFT 방법으로는 저주파 성분을 충분히 표현하지 못하기 때문이다. FFT 방법으로 저주파 성분을 샘플하기 위하여 위상판의 크기를 키울 수 있다. 그림 7(a)는 256×256 위상판을 4배($4 \times 4\text{ m}^2$)부터 144배($24 \times 24\text{ m}^2$)까지 증가시키면서 측정된 구조 함수 값도 보여준다. 이 경우 실제 측정에 사용된 위상판의 크기는 여전히 256×256 (크기는 $2 \times 2\text{ m}^2$)이다. 결과를 보면 위상판의 크기가 커질수록 저주파 성분이 더 많이 포함되므로 이론값에 가까워짐을 알 수 있다. 그러나 이 방법의 경우 위상판의 크기가 증가하여도 이론값과는 여전히 차이가 난다. 그림 7(b)는 FFT 방법으로 생성된 위상판의 크기를 증가시키면서 $r=1$ 미터에서 측정된 구조 함수 값이다. 이 그림에 위상판 생성 시간도 함께 도시

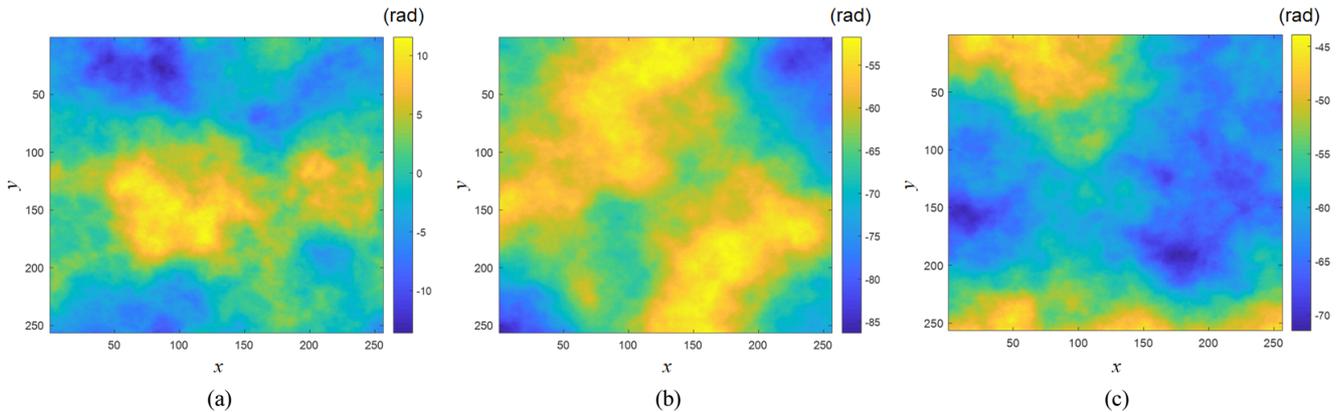


Fig. 6. (a) Phase screen generated by using FFT method. (b) Phase screen generated by using subharmonic method. (c) Phase screen generated by using covariance matrix method.

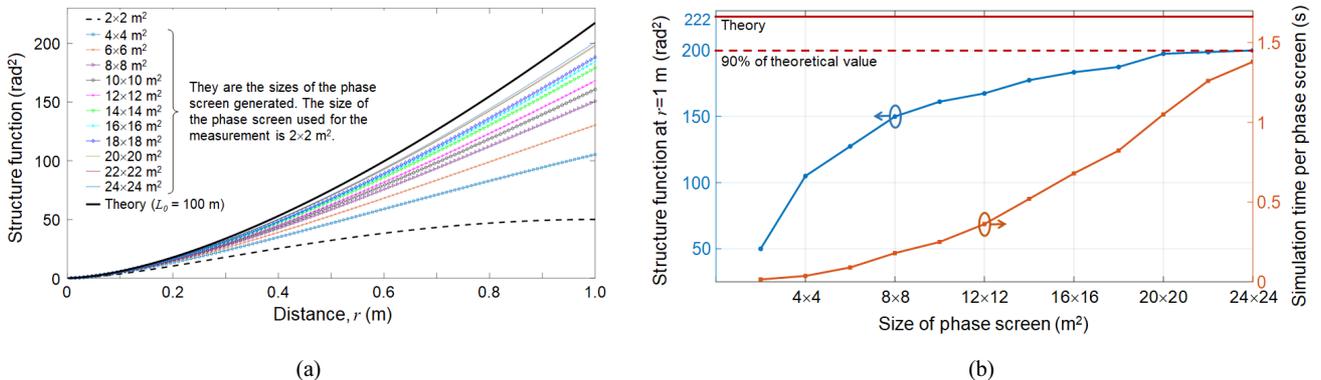


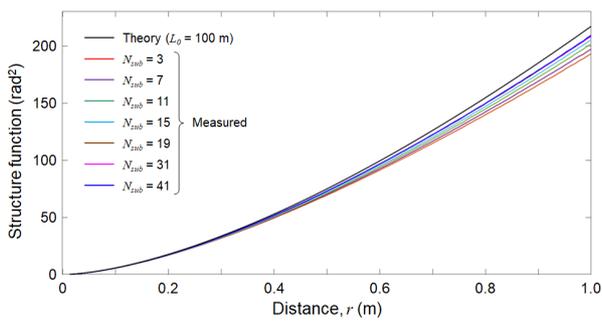
Fig. 7. (a) Structure function of phase screens generated by using FFT method. (b) Structure function of phase screen at $r=1$ m and simulation time as a function of the size of phase screen when the FFT method is used.

되어 있다. 결과를 보면 위상판의 크기가 증가함에 따라 구조 함수 값이 증가하다가 이론값의 약 90%부터는 매우 완만하게 증가하고 있다. 그러나 위상판의 크기를 증가시킬수록 위상판 생성 시간 및 메모리 크기는 가파르게 증가한다. FFT 방법을 이용하여 $r = 1$ 미터에서 구조 함수 값을 이론값의 90%에 도달하게 하기 위해서는 $12 \times 12 \text{ m}^2$ 크기의 위상판이 필요하며, 1.4초의 생성 시간이 필요하였다.

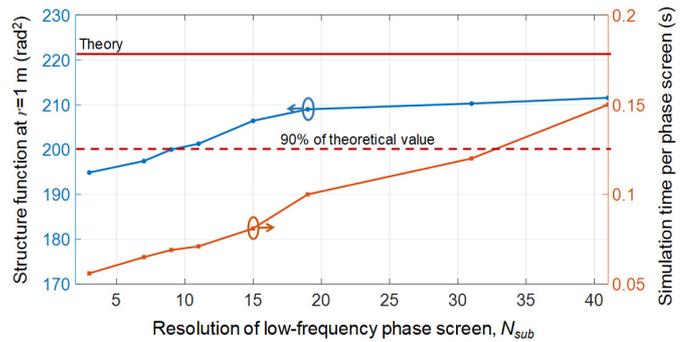
그림 8은 저조파 방법으로 생성한 위상판의 결과를 보여준다. 앞 절에서 설명한 바와 같이 먼저 FFT 방법을 사용하여 $2 \times 2 \text{ m}^2$ 크기의 격자점 수 256×256 위상판을 생성한 후 저조파 방법으로 격자 크기가 큰 위상판을 생성하여 저주파 성분을 보완하였다. 이 때 저주파 성분을 수용하는 격자 간격이 큰 위상판의 크기를 3×3 ($N_{sub} = 3$)에서부터 41×41 ($N_{sub} = 41$) 까지 증가시켰다. 저조파 방법의 경우도 FFT 방법과 마찬가지로 r 이 작을 때는 측정된 구조 함수 값이 이론값에 매우 가까웠으나 r 이 증가함에 따라 이론값에 다소 못 미쳤다. 그럼에도 불구하고 그림 7의 FFT 방법에 비하여 월등히 우수한 정확도를 보였다. 예를 들면, 그림 8(b)에 도시한 바와 같이 $N_{sub} = 3$ 인 경우에도 $r = 1$ 미터에서 이론치의 78%에 해당하는 구조 함수 값을 얻었으며, $N_{sub} = 11$ 이면 이론치의 90%에 가까운 값을 얻을 수 있었다. 그림 8(b)에 저조파 방법의 위

상판 생성 시간을 함께 도시하였다. 저조파 방법의 경우 FFT 방법에 비하여 위상판 생성 시간이 매우 짧았다. $r = 1$ 미터에서 이론치의 90%에 달하는 구조 함수 값을 얻을 수 있는 위상판을 생성하는데 걸린 시간은 약 0.07초였다.

그림 9(a)는 공분산 행렬 방법으로 생성한 위상판의 구조 함수 값을 보여준다. 앞 절에서 설명한 바와 같이 먼저 FFT 방법을 사용하여 $2 \times 2 \text{ m}^2$ 크기의 격자점 수 256×256 위상판을 생성한 후 공분산 행렬을 이용하여 FFT 방법에서 수용되지 못한 성분을 포함시킨다. 그림에서 공분산 행렬을 이용하여 계산하는 격자점 수를 5×5 ($N_{low} = 5$)에서 17×17 ($N_{low} = 17$) 까지 증가시켰다. 결과를 보면 공분산 행렬 방법으로 생성한 위상판은 N_{low} 이 작은 경우에도 이론값에 가까운 구조 함수 값을 가짐을 알 수 있다. 그림 9(b)는 공분산 행렬 방법에서 N_{low} 를 증가시키면서 $r = 1$ 미터에서 측정된 구조 함수 값과 함께 위상판 생성 시간을 보여준다. 결과에서 보듯이 $N_{low} = 5$ 인 경우에도 $r = 1$ 미터에서 이론치의 96%에 달하는 구조 함수 값을 얻었다. 이 때 위상판을 생성하는데 소요되는 시간은 약 0.3초로서 저조파 방법으로 유사 정확도의 위상판을 생성하는데 걸리는 시간과 유사했다. 또한 결과를 보면 $N_{low} = 17$ 보다 큰 경우 공분산 행렬 방법으로 생성한 위상판은 이론값과 같은 구조 함수 값을 가졌다.

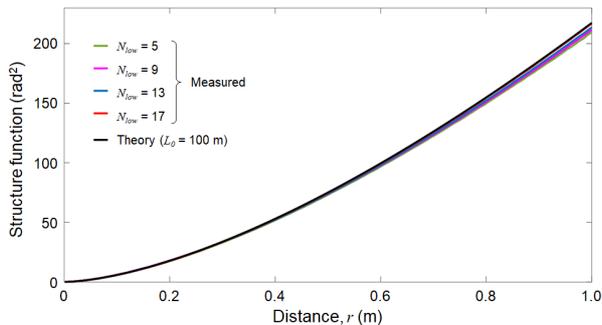


(a)

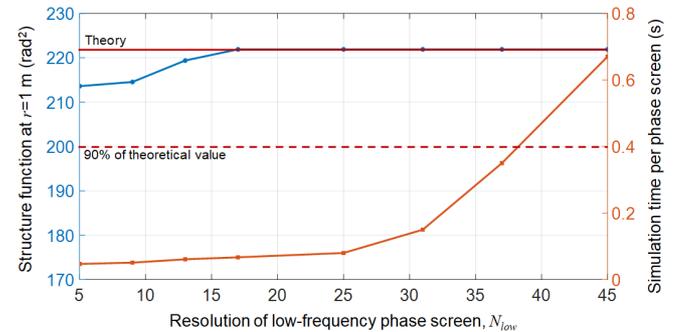


(b)

Fig. 8. (a) Structure function of phase screens generated by using subharmonic method. (b) Structure function of phase screen at $r = 1$ m and simulation time as a function of the size of N_{sub} when the subharmonic method is used.



(a)



(b)

Fig. 9. (a) Structure function of phase screens generated by using covariance matrix method. (b) Structure function of phase screen at $r = 1$ m and simulation time as a function of the size of N_{low} when the covariance matrix method is used.

V. 결 론

본 논문에서는 FFT, 저조파, 공분산 행렬 방법으로 위상판을 생성하고, 이들의 정확도와 생성 시간을 비교 분석하였다. FFT 방법은 낮은 공간 주파수 성분을 샘플링하기 어려울 뿐 아니라 푸리에 변환의 순환 특성으로 인하여 실제 사용되는 위상판보다 10배 이상 큰 위상판을 생성하여도 생성된 위상판의 구조 함수 값이 이론치에 미치지 못하는 문제점이 있다. 저조파 방식은 비교적 간단하게 위상판을 생성할 수 있는 장점이 있으나 정확성이 다소 떨어지는 문제점이 있다. 이에 반하여 공분산 행렬 방법은 이론치에 매우 가까운 구조 함수 값을 갖는 위상판의 생성이 가능할 뿐만 아니라 생성 시간도 타 방법에 유사한 수준으로 측정되었다. 따라서 공분산 행렬 방법이 위상판 생성에 가장 우수한 성능을 보인다고 할 수 있다.

모드 방법 중 하나인 Zernike 다항식 방법을 본 논문에서 살펴본 샘플 방법과 직접적으로 비교하기에는 무리가 있다. 이는 샘플 방법의 경우 격자 수를 증가시킬수록 생성 시간이 크게 증가하기 때문이다. 이에 반하여 모드 방법의 경우 위상판의 위상값이 함수로 주어지므로 격자점 위치에 상관없이 위상값이 연속적으로 부여된다. Zernike 다항식으로 직경 2 m 원형 위상판을 생성할 때 $r=1$ 미터에서 이론치 90%의 구조 함수 값을 얻을 수 있는 다항식의 개수는 85개였다. 이 때 위상판을 생성하는데 소요되는 시간은 0.75초였다. 다항식의 개수를 300개로 증가시키면 위상판 생성 시간은 5초로 크게 증가하지만 $r=1$ 미터에서 이론치의 99%에 가까운 구조 함수 값을 얻을 수 있다. 이 결과를 본 연구에서 살펴본 $2 \times 2 \text{ m}^2$ 크기의 격자점 수 256×256 위상판에 대하여 샘플 방법과 비교하면 Zernike 다항식 방법이 FFT 방법과 저조파 방식보다 이론치에 가까운 구조 함수 값을 갖는 위상판을 생성할 수 있으나, 공분산 행렬 방법에 비해서는 정확도와 생성 시간 측면에서 다소 떨어진다고 할 수 있다.

감사의 글

위상판 생성을 위한 파라미터 설정에 관한 귀중한 조언을 해주신 공주대학교 이준호 교수님께 감사드립니다.

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소가 지원하는 미래 전투체계 네트워크기술 특화연구센터 사업의 일환으로 수행되었습니다(UD160070BD).

References

1. V. Mai, D. Ha, and H. Kim, "Link availability of terrestrial free-space optical communication systems in Korea," *Korea J. Opt. Photon.* **29**, 77-84 (2018).
2. S. Karp and L. Stotts, *Fundamentals of Electro-Optic Systems Design* (Cambridge University Press, 2013).
3. M. Chatterjee and F. Mohamed, "Investigation of profiled beam propagation through a turbulent layer and temporal statistics of diffracted output for a modified von Karman phase screen," *Proc. SPIE* **8971**, 89710201-16 (2014).
4. F. Assemat, R. Wilson, and E. Gendron, "Method for simulating infinitely long and non-stationary phase screen with optimized memory storage," *Opt. Express* **14**, 988-999 (2006).
5. N. Roddier, "Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials," *Opt. Eng.* **29**, 1174-1180 (1990).
6. R. Lane, A. Glindemann, and J. Dainty, "Simulation of a Kolmogorov phase screen," *Waves Random Media* **2**, 209-224 (1992).
7. B. J. Herman and L. A. Strugala, "Method for inclusion of low-frequency contributions in numerical representation of atmospheric turbulence," *Proc. SPIE* **1221**, 183-192 (1990).
8. C. Harding, R. Johnston, and R. Lane, "Fast simulation of a Kolmogorov phase screen," *Appl. Opt.* **38**, 2161-2170 (1999).
9. J. Xiang, "Accurate compensation of the low-frequency components for the FFT-based turbulent phase screen," *Opt. Express* **20**, 681-687 (2012).
10. E. Lee and V. Chan, "Part 1: Optical communication over the clear turbulent atmospheric channel using diversity," *IEEE J. Sel. Areas Commun.* **22**, 1896-1906 (2004).
11. L. Andrews and R. Phillips, *Laser Beam Propagation through Random Media*, 2nd ed. (SPIE Press, 2005).
12. A. Tokovinin, "From differential image motion to seeing," *Publ. Astron. Soc. Pacific* **114**, 1156-1166 (2002).
13. E. Johansson and D. Gavel, "Simulation of stellar speckle imaging," *Proc. SPIE* **2200**, 372-383 (1994).
14. R. Rampo, D. Gavel, D. Dillon, and S. Thomas, "Production of phase screens for simulation of atmospheric turbulence," *Appl. Opt.* **51**, 8769-8778 (2012).
15. M. Roopashree, A. Vyas, and B. Prasad, "Grid size optimization for atmospheric turbulence phase screen simulations," in *Proc. Imaging and Applied Optics*, OSA Technical Digest (CD) (Optical Society of America, 2011), paper JMB3.
16. M. Roberts and J. Bowman, "Dealiased convolutions for pseudospectral simulation," *J. Phys.: Conf. Ser.* **318** (2011).