

평면도형의 둘레와 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피에 대한 초등학교 6학년 학생들의 수행 능력 조사

임영빈(인천신촌초등학교, 교사) · 임예은(인천청천초등학교, 교사) · 김수미(경인교육대학교, 교수)[†]

†교신저자

A study on the performance of sixth-grade elementary school students about the perimeter and area of plane figure and the surface area and volume of solid figure

Yim, Youngbin(Incheon Sinchon Elementary School, loveace-bin@hanmail.net)

Yim, Ye-eun(Incheon Cheongcheon Elementary School, yyyhome@naver.com)

Km, Soo Mi(Gyeongin National University of Education, smkim@ginue.ac.kr)[†]

†Corresponding Author

초록

초등학교 교육과정에 포함된 측정 속성 가운데 둘레와 넓이, 겉넓이와 부피는 5, 6학년에서 집중적으로 다루어진다. 그러나 이 영역에서 학생들의 수행능력이 어느 정도가 되며 어떤 문제가 있는지에 대해서는 알려진 바가 많지 않다. 이 연구는 평면도형의 둘레와 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 정도를 진단하고, 각 요소별 수행 능력을 비교 분석하여 차후 수학 교과서 개발 및 측정 영역 지도를 위한 시사점을 도출하고자 하였다. 이를 위해 둘레, 넓이, 겉넓이, 부피, 둘레와 넓이의 관계, 겉넓이와 부피의 관계에 관련된 문항을 구성하여 6학년 학생 95명을 대상으로 수행 능력을 분석하였다. 분석결과 초등학교 6학년들의 수행능력이 둘레, 겉넓이, 둘레와 넓이의 관계, 겉넓이와 부피의 관계 영역에서 특히 낮은 것으로 드러났다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 둘레와 넓이, 겉넓이와 부피 개념의 도입 순서와 지도 방법, 지도 순서 등에 대한 몇 가지 아이디어를 제안하였다.

Abstract

Among the measurement attributes included in the elementary school mathematics curriculum, perimeter, area, volume and surface area are intensively covered in fifth and sixth graders. However, not much is known about the level of student performance and difficulties in this area. The purpose of this study is to examine the understanding and performance of sixth-grade elementary school students on some ideas of measurement and ultimately to give some suggestions for teaching measurement and the development of mathematics textbooks. For this, diagnosis questions were developed in relation to the following parts: measurement of perimeter and area of plane figure, measurement of surface area and volume of solid figure, and the relationships between perimeter and area, and the relationships between surface area and volume. The performances of 95 sixth graders were analyzed for this study. The results showed children's low performance in the measurement area, especially measurement of perimeter and surface area, and relationship of the measurement concepts. Finally, we proposed the introduction order of the measurement concepts and what should be put more emphasis on teaching measurement. Specifically, it suggested that we consider placing a less demanding concept first, such as the area and volume, and dealing more heavily with burdensome tasks such as the perimeter and surface area.

* 주요어 : 둘레, 넓이, 부피, 겉넓이, 측정

* **Key words** : perimeter, area, volume, surface area, measurement

* **Address**: Department of Mathematics Education, Gyeongin National University of Education, Gyeonggi-do, Korea

* **ZDM Classification** : C33

* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97C30

* **Received**: March 22, 2019 **Revised**: May 9, 2019 **Accepted**: May 21, 2019

I. 서론

초등학교에서는 고학년이 되면 공식을 이용하여 측정값을 산출하게 되는데, 이때 측정 속성을 제대로 이해하지 못하면 공식을 기계적으로 암기하게 되어 오류가 발생할 가능성이 높아진다. 일찍이 형태심리학자 Wertheimer(1959)는 평행사변형의 넓이를 예로 들어, 측정 지도의 문제점을 제시한 바 있다. 그는 학생들이 ‘밑변×높이’라는 평행사변형의 넓이 공식을 이용하여 문제를 즉각적으로 해결하는 장면을 보고, 교실 앞으로 나아가 기울기가 심한 비정형의 평행사변형을 제시하고 그 넓이를 구하도록 요구하였다. Wertheimer가 제시한 평행사변형은 직사각형으로의 등적변형이 쉽게 예상되지 않는 모양으로, 평행사변형의 넓이 공식을 알고 있었던 학생들 상당수가 이런 모양의 평행사변형은 넓이를 구할 수 없다고 답했다. Hershkowitz, Vinner(1982)의 연구도 소재가 삼각형의 넓이로 다를 뿐, 연구 결과는 상당히 유사하다.

이처럼 측정 공식을 알고 있다 해도 모양이 조금만 변형되면 측정값을 구하는데 어려움을 호소하는 것은 학생들이 측정 영역에서 도구적 이해에 의존해 학습하고 있다는 증거로 볼 수 있다. 그러나 그동안 측정 영역에서 이루어진 선행연구를 살펴보면 지도와 관련된 것이 대부분이며(Ahn & Pang 2006; Bae, 2002; Hong, Choi, An, & Kim, 2008; Jeong, 2001; Jeong, 2005; Kim, 2000; Lee, 2001; Pang, Kim, & Park, 2006), 학생들의 수행능력을 조사한 연구는 상대적으로 부족한 편이다(Lee, 2001; Lee, 2002; Lee, 2006; Park, Kim, & Jeon, 2006; Song, 2004).

초등학교 교육과정에 포함된 측정 속성 가운데 둘레와 넓이, 겹넓이와 부피는 5, 6학년에서 집중적으로 다루어지는데, 이 부분 역시 학생들의 수행능력에 대해서는 알려진 바가 많지 않다. 예를 들면, 학생들이 넓이보다는 둘레 구하는 것을, 부피보다는 겹넓이 구하는 것을 더 어려워하는 것 같다고 호소하는 현장 교사들이 적지 않다. 그러나 이들의 궁금증을 해소해 줄 수 있는 연구가 뒷받침되지 못하고 있는 것이 현실이다.

둘레와 넓이, 겹넓이와 부피가 우리나라 초등학교 수학 교과서에서 다루어지는 방식을 보면 차원에 대한 고려가 큼을 알 수 있다. 둘레는 선분의 길이와 관련된 것으로 1

차원 개념인 반면, 넓이는 2차원 개념이다. 유사하게 겹넓이는 면의 넓이의 합으로 2차원 개념인 반면, 부피는 3차원 개념이다. 평면도형의 둘레와 넓이는 차원이 다르지만 5학년의 동일한 단원에 제시되며, 둘레가 넓이 앞에 도입되어왔다. 유사하게 입체도형의 겹넓이와 부피는 6학년의 동일한 단원에 제시되며, 겹넓이가 부피 앞에 도입되어왔다¹⁾. 둘레와 넓이, 겹넓이와 부피는 교과서 한 단원 내의 차시 배분에서도 차이가 있다. 둘레와 겹넓이는 한두 차시가 배정되지만, 넓이와 부피는 그 몇 배로 상당히 비중 있게 다루어진다. 이러한 점으로 볼 때, 교과서는 낮은 차원의 개념이 높은 차원의 개념보다 학습하기 쉽다는 것을 암묵적으로 전제하고 있음을 알 수 있다. 그러나 수학적 위계가 낮은 것이 반드시 학습하기 쉽다는 것을 의미하는 것은 아닌 만큼, 학습자의 이해에 대한 연구는 앞으로도 계속 뒷받침되어야 할 것이다.

이 연구의 목적은 초등학교 측정영역 가운데 평면도형의 둘레와 넓이, 입체도형의 겹넓이와 부피에 대한 초등학교 학생들의 문제해결 능력을 진단하고, 이를 토대로 교과서 개발 및 측정 영역 지도를 위한 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 둘레와 넓이, 겹넓이와 부피의 의미와 교과서 도입 방법

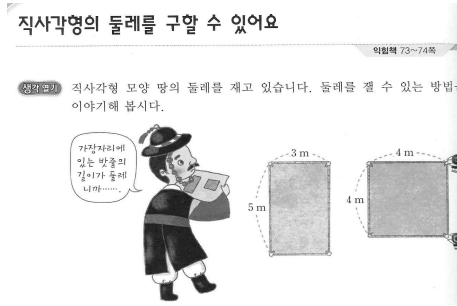
사전적 의미로 ‘둘레’는 ‘사물의 테두리나 바깥 언저리’ 혹은 ‘사물의 가를 한 바퀴 돈 길이’이며, ‘넓이’는 ‘일정한 평면에 걸쳐 있는 공간이나 범위의 크기’이다. 또한 ‘겹넓이’는 ‘물체 겹면의 넓이’이며, ‘부피’는 ‘넓이와 높이를 가진 물체가 공간에서 차지하는 크기’이다.

초등학교 수학과 교육과정에서 둘레와 넓이는 보통 5학년에서, 겹넓이와 부피는 6학년에서 도입되어 왔다. 그러나 이들 용어에 대한 사전적 의미는 초등학교뿐만 아니라 중등학교 수학교과서에서도 명확하게 제시되지 않아 왔다(Hong et al., 2008).

2009개정 수학교과서에서는 둘레와 넓이가 5학년 1학

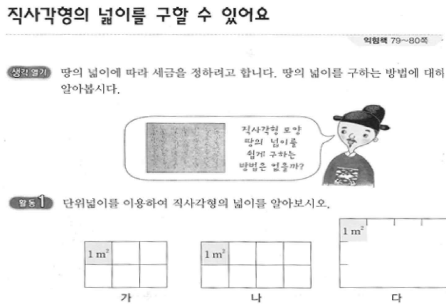
1) 2015 개정 6학년 1학기 수학교과서에서는 입체도형의 부피를 먼저 다루고, 겹넓이를 다루고 있다. 그러나 그 이전 교육과정의 교과서들은 대체로 겹넓이를 부피 앞에 제시하였다.

기에 차례로 도입되며, 도입과 평가, 여러 마당 등을 제외한 본문 13차시 가운데 둘레는 1차시이고 나머지 12차시가 넓이에 해당된다. 둘레는 ‘가장자리에 있는 빗줄의 길이가 둘레니까…….’와 같은 문구가 말풍선 안에 들어가 있는 것으로 정의가 대체되며([Fig. 1]), 직사각형 이외에도 복합도형의 둘레를 다루고 있다.



[Fig. 1] Introduction of rectangular perimeter (Ministry of Education, 2015a, p.130)

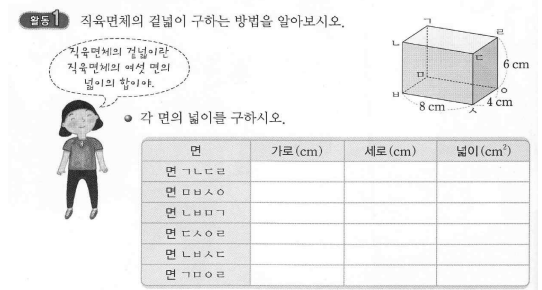
‘넓이’는 ‘단위넓이와 함께 무정의 용어로 도입되며([Fig. 2]), 이후 직사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모, 다각형 등의 순으로 넓이 공식을 유도하도록 구성되어 있다.



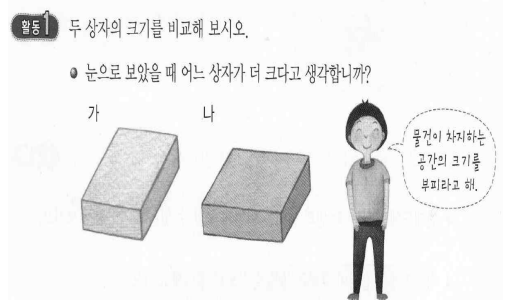
[Fig. 2] Introduction of rectangular area (Ministry of Education, 2015a, p.134)

겹넓이와 부피는 2009개정 수학교과서 6학년 1학기에 차례로 도입되며, 본문 6차시 가운데 겹넓이는 2차시이고 나머지 4차시는 부피에 해당된다. ‘겹넓이’는 정의되지 않고 대신 ‘직육면체의 겹넓이’가 ‘직육면체의 여섯 면의 넓이의 합’으로 말풍선을 이용하여 도입된다([Fig. 3]). ‘부

피’는 ‘물건이 차지하는 공간의 크기’로 말풍선을 이용하여 도입되지만([Fig. 4]), 이어서 나오는 내용은 모두 직육면체의 부피에 한정되며, 복합도형의 부피는 다루지 않는다.



[Fig. 3] Introduction of rectangular parallelepiped surface area (Ministry of Education, 2015b, p.176)



[Fig. 4] introduction of rectangular parallelepiped volume (Ministry of Education, 2015b, p.180)

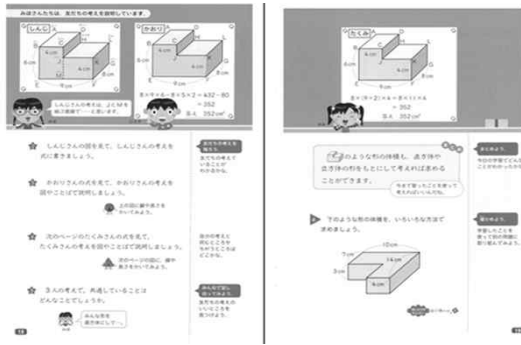
이상의 내용을 종합해보면, 우리나라 교과서에서 둘레, 넓이, 겹넓이, 부피는 직사각형이나 직육면체와 같은 다소 제한된 보기를 통해 국소적으로 정의되어 왔으며, 개념 정의가 대체로 명시적이지 않음을 알 수 있다.

외국 교과서를 살펴보면, 대체로 우리나라 교과서와 마찬가지로 5, 6학년에 이들 개념을 다루고 있으나, 도입 순서나 방식에서 상당한 다양성이 존재함을 알 수 있다. 미국 교과서 「Math Connects」의 5학년 교재는 ‘둘레, 넓이, 부피 측정(chap14)’이라는 단원에서, 평면도형의 둘레, 넓이를 입체도형(직육면체)의 부피와 함께 다룬다. 둘레는 넓이에 앞서 도입되는 반면, 겹넓이는 부피 이후에도

입되며, 둘레, 넓이, 부피, 겉넓이에 대한 일반적 정의가 차시 초반부에 명시적으로 제시된다. 둘레와 넓이를 도입할 때는 직사각형 이외의 비정형 도형도 탐구하지만, 부피와 겉넓이를 도입할 때는 대체로 직육면체를 탐구 대상으로 하며, 그 외의 비정형 도형은 거의 다루지 않는다(Altieri et al., 2009).

미국교과서 「Math Makes Sense」는 5학년에서 둘레와 넓이 개념을 비정형 도형으로부터 직관적으로 도입하여, 직사각형으로 나가는 방식이다(Morrow et al., 2005). 반면 6학년에서는 부피를 먼저 다루고 겉넓이를 나중에 다루는데, 이때 직육면체 이외에도 삼각기둥의 부피와 겉넓이를 다루도록 한다. 그러나 둘레, 넓이, 부피, 겉넓이 용어가 명확하게 정의되지 않은 채 사용되는 경향이 강하다(Morrow et al., 2005).

일본교과서 「新しい算数」는 5학년 1학기에 직육면체의 부피에 대해서 다루지만, 겉넓이는 초등학교 교육과정에서 다루지 않는다. 반면 계단형 모양과 같은 비정형 도형의 부피를 심도 있게 다루는 편이다(Fig. 5)(東京書籍, 2013). 싱가포르 교과서 「Shaping Math」 역시 일본과 유사하게 5학년 1학기에 부피를 다루며, 겉넓이는 초등학교 교육과정에서 다루지 않는다(Collars, Lee, & etc, 2005).



[Fig. 5] Volume measurement of irregular space figures in Japanese elementary school textbooks(東京書籍, 2013)

이상의 내용을 종합해 보면, 둘레와 넓이, 겉넓이와 부피의 지도 순서나 개념도입 방식, 보기 등은 국가별로 상당한 다양성이 존재함을 알 수 있다.

2. 측정 개념에 대한 학생들의 이해 실태

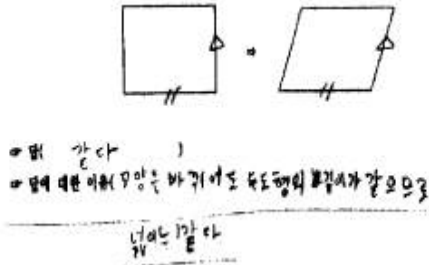
측정은 보통 도구와 공식을 통해 이루어진다. 초등학교에서는 고학년이 되면 넓이와 부피에 대해 공식을 이용하여 측정값을 산출하게 되는데, 측정 속성을 제대로 이해하지 못하면 공식을 기계적으로 암기하게 되어 오류가 발생할 확률이 높아진다. 미국의 한 연구에서는 7학년 학생들을 대상으로 직사각형과 정사각형의 넓이를 구하도록 하였는데, 직사각형 넓이 문제의 정답률은 50%였던 반면 정사각형 넓이 문제의 정답률은 10%에 불과하였다. 이 같은 결과는 직사각형의 넓이 공식이 ‘가로×세로’임을 알아도, 그 의미를 알지 못하고 맹목적으로 암기한다면 상황이 조금만 바뀌어도 문제를 해결할 수 없음을 시사한다.

높이 개념에 대한 이해는 학생들이 측정 영역에서 겪는 대표적인 어려움 중 하나이다. Hershkowitz, Vinner(1982)의 연구에서는 학생들이 이등변 삼각형의 높이는 쉽게 구했지만, 높이를 나타내는 선분이 삼각형 외부에 있는 둔각 삼각형의 경우는 높이를 쉽게 구하지 못했다. 유사하게 Wertheimer(1959)의 연구에서는 학생들이 정형화된 평행사변형의 높이는 쉽게 구했지만, 높이를 나타내는 선분이 평행사변형의 외부에 있는 심하게 기울어진 비정형 평행사변형의 높이는 쉽게 구하지 못했다. 이러한 연구 결과는 학생들이 측정 요소나 개념을 깊이 있게 이해하는데 어려움을 지니고 있음을 시사한다.

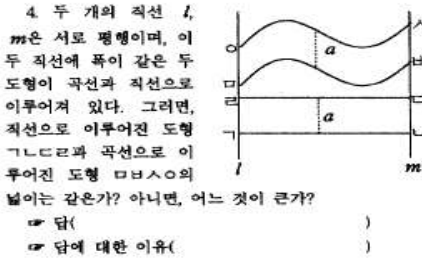
측정 요소들 사이의 관계는 한층 더 어렵다. 예를 들어 도형의 둘레의 길이와 넓이는 서로 무관하지만, 선행연구에서 응답자들은 두 측정값이 서로 관련 있다고 생각하는 경향이 높았다. 고등학생을 대상으로 한 Lee(2001)의 연구에서는 둘레의 길이와 넓이의 관계에 대해 정답을 말한 학생의 비율이 20%내외였다. Ma(1999)의 연구에서는 미국 초등학교 교사 23명 중 단 한 명만이 두 측정 요소 사이의 관계에 대한 명확한 지식을 가지고 있었으며, 중국 초등학교 교사는 약 30%가 오답을 제시한 것으로 조사되었다. 이들 연구에서 나타난 가장 대표적인 오개념은 도형의 둘레가 커지면 넓이도 같이 커진다고 생각하는 것이었다.

Lee(2002)은 고등학생을 대상으로 한 연구에 이어 초등학교 5, 6학년 172명을 대상으로 도형의 둘레와 넓이 관계에 대해 조사했다. 연구 결과 학생들은 ‘둘레의 길이

가 같은 두 사각형의 넓이는 같다.’ ‘다각형의 둘레의 길이가 증가함에 따라 넓이도 증가한다’와 같은 명제에 대해 판단하는 것을 어려워했으며, 설령 정답을 제시했다 해도 판단 근거를 내놓지 못했다. 또한 도형의 넓이를 비교하는 상황에서 둘레의 길이에 의존해서 답을 내놓는 경향이 강한 것으로 조사되었다([Fig. 6], 폭이 일정하고 둘레가 다른 두 도형의 넓이를 묻는 문항([Fig. 7])에서도 곡선이 직선보다 길이가 길기 때문에 위 도형의 넓이가 더 크다고 답한 응답자가 많았다.



[Fig. 6] An example of determining an area based on the perimeter of a figure(Lee, 2002)



[Fig. 7] a comparison problem of areas of two figures with same widths but different perimeters(Lee, 2002)

Park 외(2006)는 둘레와 넓이 학습을 마친 초등학교 5학년 학생 285명을 대상으로 넓이 측정과 관련된 검사를 실시하고, 학생들의 반응을 측정의 의미파악, 공식 활용, 전략 사용 등 세 가지 관점으로 분석하였다. 연구 결과 학생들은 둘레나 넓이의 속성 파악에서 혼동을 보이거나 직관적으로 넓이를 비교해야하는 과제에서도 계산을 시도하는 지식 상태가 반 이상인 것으로 드러났다. 또한 부

적합한 수치를 넣어 무조건 넓이 계산을 시도하는 학생들이 많았으며, 분할이나 등적변형에 대해 알고 있는 학생들도 40% 가량은 문제를 표상하는데 어려움을 겪는 것으로 조사되었다.

이상의 선행연구 결과를 종합하면, 초등학생들이 측정 영역에서 겪는 어려움은 우리가 예상하는 것 이상으로 보인다. 따라서 측정영역에서 학생들의 수행능력을 세밀하게 분석하여, 그에 상응하는 정교화 된 지도 전략을 개발해야할 필요성이 제기된다.

III. 연구방법

1. 연구 대상 및 검사 시기

2018년 11월 한 광역시의 A초등학교 6학년 2개 반(48명), B초등학교 6학년 2개 반(47명) 총 95명을 대상으로 검사를 실시하였다. 언어나 학습에 심각한 장애가 있는 학생은 없었으며, 본 검사를 위해 따로 교육을 실시하지 않았다. 조사 시기는 연구대상자들이 평면도형의 둘레와 넓이를 학습한지 1년 이상, 직육면체의 겹넓이와 부피를 학습한지 4개월이 지난 시점이었다.

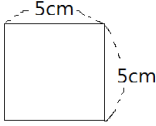
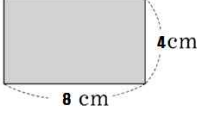
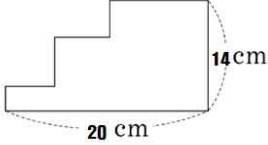
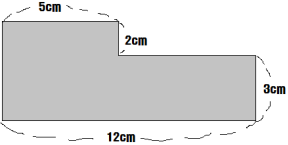
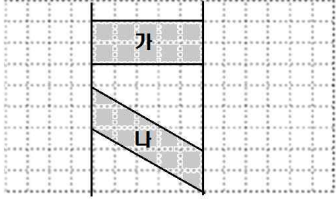
2. 검사 문항 구성 및 조사 방법

검사 내용은 5학년 1학기에 배운 내용인 평면도형의 둘레와 넓이, 6학년 1학기에 배운 겹넓이와 부피에 대한 문항으로 구성하였다. 둘레, 넓이, 겹넓이 및 부피 등 4개 주제에 관한 문항은 각 4문항씩 구성하였으며, 둘레와 넓이의 관계, 겹넓이와 부피의 관계에 관련된 문항은 각 5문항씩 구성하였다.

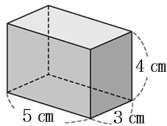
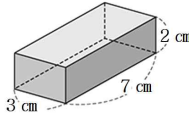
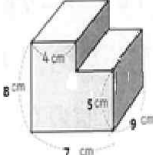
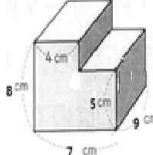
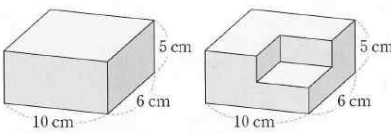
각 주제에 대한 문항은 그림이 있는 측정문항, 그림이 없는 측정문항, 계단형 도형의 측정문항, 조건에 맞는 도형을 만드는 문항으로 구성하였다([Table1], [Table2]).

시험지 배부 및 감독은 각 반 담임교사가 주관했으며, 한 주제의 문제해결이 다른 주제의 문제해결에 영향을 줄 경우를 우려하여 둘레, 넓이, 겹넓이, 부피 등 4개의 주제를 하루에 하나씩 총 4일에 걸쳐 검사를 실시하였다.

[Table 1] Problems on perimeters and areas of plane figures

Category	Perimeter	Area
<p>Problems with pictures</p>	<p>Write down how to calculate the perimeter of the following square and get the result.</p> 	<p>Write down how to calculate the area of the following figure and get the result.</p> 
<p>Problems without pictures</p>	<p>A fence is going to be made around a rectangular flower garden which is eight meters wide and five meters long. Write down how to calculate the perimeter of the fence, and get the result.</p>	<p>The area of a rectangular flower garden which is seven meters wide and six meters long is going to be calculated. Write down how to calculate the area of the flower garden, and get the result.</p>
<p>Problems of stair-shaped figures</p>	<p>Write down how to calculate the perimeter of the following figure, and give the answer.</p> 	<p>Write down how to calculate the area of the colored part of the following figure, and give the answer.</p> 
<p>Problems of composing figures (graph paper is offered)</p>	<p>Draw at least 3 rectangles with perimeter of 24cm.</p>	<p>Draw at least 3 rectangles with area of 24cm².</p>
<p>Problems of relation (the reasons for every answer have to be stated)</p>	<p>※ Put "O" if each of the following sentence is right and "X" if it is wrong, and write down the reasons(1-3).</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Of the two rectangles, one with larger perimeter has also larger area. () 2. Two rectangles with identical area have also identical perimeter. () 3. If the length of a side of a square doubles, its area also doubles. () <p>※ Compare the perimeters and areas of the following two figures, and write down the reason for your opinion.(4-5)</p>  <ol style="list-style-type: none"> 4. Compare two perimeters 5. Compare two areas 	

[Table 2] Problems on surface areas and volumes of solid figures

Category	Surface Area	Volume																				
Problems with pictures	<p>Write down how to calculate the surface area of the following rectangular parallelepiped and get the result.</p> 	<p>Write down how to calculate the volume of the following rectangular parallelepiped and get the result.</p> 																				
Problems without pictures	<p>There is a rectangular parallelepiped which is 2cm wide, 3cm long and 5cm high. Write down how to calculate the surface area of it and get the result.</p>	<p>There is a rectangular parallelepiped which is 2cm wide, 3cm long and 5cm high. Write down how to calculate the volume of it and get the answer.</p>																				
Problems of stair-shaped figures	<p>Write down how to calculate the surface area of the following figure and get the result.</p> 	<p>Write down how to calculate the volume of the following figure and get the result.</p> 																				
Problems of composing figures	<p>Write down how to calculate the length of a side of a regular hexahedron which is 150cm^2 in surface area, and get the result.</p>	<p>Think of three or more rectangular parallelepipeds which are 6cm wide and 72cm^3 in volume each, and fill in the blanks in the following table.</p> <table border="1" data-bbox="873 942 1317 1151"> <thead> <tr> <th></th> <th>Width</th> <th>Length</th> <th>Height</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Rectangular parallelepiped A</td> <td>6cm</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Rectangular parallelepiped B</td> <td>6cm</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Rectangular parallelepiped C</td> <td>6cm</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Rectangular parallelepiped D</td> <td>6cm</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Width	Length	Height	Rectangular parallelepiped A	6cm			Rectangular parallelepiped B	6cm			Rectangular parallelepiped C	6cm			Rectangular parallelepiped D	6cm		
	Width	Length	Height																			
Rectangular parallelepiped A	6cm																					
Rectangular parallelepiped B	6cm																					
Rectangular parallelepiped C	6cm																					
Rectangular parallelepiped D	6cm																					
Problems of relation(the reasons for every answer have to be stated)	<p>※ Put "O" if each of the following sentences is right and "X" if it is wrong, and write down the reasons.(1-3)</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Of the two rectangular parallelepipeds, the one that is greater in surface area is greater in volume.() 2. If two rectangular parallelepipeds are identical in volume, their surface areas also are identical.() 3. Of the two regular hexahedrons, the surface area of the one is four times greater than the other, its volume is eight times greater than the other.() <p>※ Compare the surface areas and volumes of the following two figures, and write down the reason for your opinion. (4-5)</p>  <ol style="list-style-type: none"> 4. Compare the surface areas 5. Compare the volumes 																					

3. 채점 방식 및 오답유형

95명의 연구 대상자가 4일에 걸쳐 해결한 문제지를 회수하여 공동 연구자 2인이 교차채점 하였다. 교차채점에서 합의되지 못한 부분을 해결하고, 오답의 다양성을 체계화하기 위해 공동 연구자 3인이 모여 채점과정을 반성하였으며, 그 결과 총 7개의 오답유형을 세분할 수 있었다. 이 연구에서 설정한 학생들의 오답 유형은 단위 오류, 식 오류, 계산 오류, 정보처리 오류, 둘레-넓이 오류, 겹넓이-부피 오류, 기타 등 7가지이며 [Table 3]과 같다.

[Table 3] Types of incorrect answers adopted by this research

Type of Wrong Answers	Explanation
Unit error	- unit omission - using improper unit
Formula error	- partial errors such as omitting brackets in a mixed calculation or using incorrect arithmetic operations - invalid formula such as adding or multiplying every numbers
Calculation error	- simple calculation mistakes
Information processing error	- incorrectly substituting numbers into an expression - misunderstanding of problem
perimeter-area error	- getting area instead of perimeter
Surface area-volume error	- getting volume instead of surface
Others	- No answer or cause unknown

단위 오류는 측정 영역에서 주로 나타나는 오류로 측정값을 요구했을 때 수치만 쓰고 단위를 누락한 경우나, 부적절한 단위를 쓴 경우이다.

식 오류는 혼합계산식에서 괄호를 빼먹거나 연산 기호를 부분적으로 잘못 쓰는 사소한 실수부터 해당 식을 알지 못해서 주어진 수치들을 무조건 더하거나 곱하는 오류 등 식에 관련된 오류들을 총칭한다.

계산 오류는 공식에 수치를 제대로 대입했으나 크고 작은 계산 실수가 나오는 경우이다.

정보처리 오류는 식을 세운 후 수치를 잘못 대입하거나, 문제를 잘못 파악하여 요구하지 않은 부분을 구하거나 일부만 구하고 풀이를 종료한 경우이다.

둘레-넓이 오류는 둘레를 구하는 문제에 국한된 오류로 어떤 이유에서든 둘레가 아닌 넓이로 답을 제시한 경

우이다.

겹넓이-부피 오류는 겹넓이를 구하는 문제에 국한된 오류로 어떤 이유에서든 겹넓이가 아닌 부피로 답을 제시한 경우이다.

기타는 무응답 혹은 오답 원인을 알 수 없는 경우이다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 평면도형의 둘레와 넓이, 입체도형의 겹넓이와 부피에 대한 정답률 차이

연구 결과 학생들은 평면도형에서는 넓이보다는 둘레를, 입체도형에서는 부피보다는 겹넓이 관련 문제를 더 어려워하는 것으로 나타났다. 100점 만점으로 보았을 때, 둘레(37.9%)와 넓이, 겹넓이(30.5%)와 부피(55.5%)의 정답률 차는 대략 25~30%포인트로 상당히 크게 나타났다 ([Table 4]).

조사 대상자들이 6학년인 점을 감안했을 때, 입체도형의 측정을 배운 시점이 평면도형의 측정을 배운 시점보다 훨씬 가까웠음에도 불구하고, 평면도형의 정답률(53%)이 입체도형의 정답률(43%)보다 10%포인트 높게 나왔다는 점도 눈여겨볼 대목이다.

[Table 4] Percentages of correct answers of perimeter and area, and volume and surface area

Plane figures(%)		Solid figures(%)	
perimeter	area	surface area	volume
37.9	68.2	30.5	55.5
53.0		43.0	

둘레와 넓이의 관계, 겹넓이와 부피의 관계 정답률은 각각 43.2%, 41.7%로([Table 5]), 학생들이 두 측정 요소 사이의 관계 파악을 상당히 어려워하는 것으로 나타났다. 그러나 평면도형과 입체도형 영역 간 정답률 차는 크게 나타나지 않았다.

[Table 5] Percentages of correct answers of the relationship between perimeter and area, and the relationship between volume and surface area

Plane figures(%)	Solid figures(%)
relationship between perimeter and area	relationship between surface area and volume
43.2	41.7

이상의 내용을 정리하면, 초등학교 6학년 학생들은 평면도형의 둘레와 입체도형의 겹넓이를 구하는데 심각한 어려움을 가지고 있으며, 둘레와 넓이의 관계 및 겹넓이와 부피의 관계에 대하여 통합적으로 이해하지 못하고 있음을 알 수 있다. 또한 평면도형 측정 문제보다는 입체도형 측정 문제를 더 어려워하는 것을 알 수 있다.

2. 평면도형의 둘레

둘레 관련 문항은 모두 4개이며, 각 정답률은 [Table 6]과 같다. 둘레의 평균정답률은 37.9%로 상당히 낮았다. 우선 표면적으로 학생들은 그림의 유무에 크게 영향을 받은 것으로 관찰되었다. 아울러 계단형 평면도형의 둘레 구하는 문제를 매우 어려워했음을 알 수 있다.

[Table 6] Percentages of correct answers of each perimeter question

Problem	Percentage(%)
measurement of perimeters of plane figures with pictures	52.6
measurement of perimeters of plane figures without pictures	25.3
measurement of perimeters of the stair-shaped plane figures	24.2
composing rectangles with perimeter	49.5
Average	37.9

[Table 7] Percentages of correct answers of perimeter measurement according to the presence or absence of a picture

Answers from the students		Picture ○ (%)	Picture × (%)
correct answers		52.6	25.3
incorrect answers	unit error	14.7	36.6
	calculation error	2.1	3.2
	formula error	10.6	8.4
	perimeter-area error	19	22.1
	information processing error	0	3.2
	others	1	1

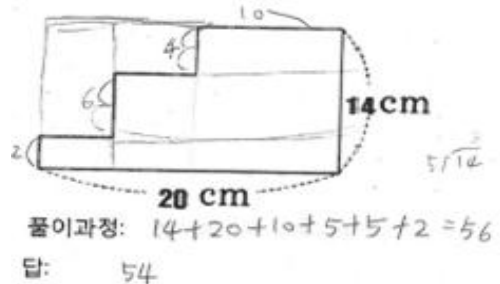
그림 유무에 따른 정답률 및 오답 유형은 [Table 7]과 같다. 문항에 그림이 없는 경우의 정답률(25.3%)이 그림이 있는 경우의 정답률(52.6%)보다 상당히 낮았는데, 그 이유는 단위 오류 비중(36.6%)이 높았기 때문이다. 단위 오류는 답란에 수치만 적고 단위를 누락하거나, 부적절한

단위를 적은 경우인데, 그림이 없는 문항제로 제시된 경우 학생들이 문항에 포함된 단위를 포착하는 것이 쉽지 않은 듯하다. 또한 그림이 있는 문제가 cm 단위를 사용한 반면, 그림이 없는 문제가 m 단위를 사용한 것도 영향을 주었을 가능성이 있으나 이 연구 결과만으로는 단언하기 어렵다. 결과적으로 그림의 유무는 학생들에게 둘레 개념을 인지하는데 보다는 단위를 인지하는데 더 큰 영향을 주는 것을 알 수 있다.

단위 오류 다음으로 많이 발생한 오류는 둘레를 넓이 구하는 방법으로 계산한 '둘레-넓이 오류'이다. 그림이 있는 경우와 없는 경우에서 각각 19%, 22.1%가 발생하였다. 이와 같은 오류를 보인 학생들은 직사각형과 관련된 측정 문항을 수행할 때 기계적으로 가로와 세로를 곱하여 정답을 구하려는 경향을 보였다. 이외에도 식을 바르게 쓰지 못하거나 덧셈 대신 곱셈을 사용하는 등, 식이나 계산과 관련된 오류가 넓이 측정 문항보다 둘레 측정 문항에서 많이 발생하였다.

[Table 8] Percentages of correct answers of the stair type's perimeter measurement

Type of answers		Percentage(%)
correct answers		24.2
incorrect answers	unit error	10.5
	calculation error	3.2
	formula error	7.4
	information processing error	42.1
	others	12.6



[Fig. 8] An example of the information processing error

계단형 평면도형의 둘레를 측정하는 문항의 정답률은 24.2%로 매우 낮았다([Table 8]). 이 문항에서는 특히 정보처리 오류를 많이 보였는데, 수치가 주어진 두 변의 길

이가 마주보고 있는 변들의 길이의 합과 같음을 파악하지 못하고 [Fig. 8]과 같이 임의의 수치를 대입하는 경우가 많이 관찰되었다.

둘레가 24cm인 직사각형을 구성하는 문제의 정답률도 49.5%로 낮았다([Table 9]). 오답 가운데 넓이가 24cm²인 직사각형을 구성한 오류가 13.7%로 가장 많았으며, 그 외에 삼각형이나 오목 다각형 등의 도형을 제시하거나 가로나 세로 중 하나의 길이에만 초점을 맞추는 등 정보처리 오류를 쉽게 볼 수 있었다.

[Table 9] Percentages of correct answers of composing rectangles with a given perimeter

Type of answers		Percentage (%)
correct answers		49.5
incorrect answers	rectangles with 24cm perimeter and 24cm ² area	4.2
	identical rectangles with different directions	8.4
	at most 3 cases	4.2
	rectangle with 24cm ² area	13.7
	different figures from a rectangle such as concave polygon, triangle, etc.	5.3
	Focusing on only one of the two, width and length	6.3
	rectangles with 48cm perimeter	2.1
	no answer or cause unknown	6.3

한편 회진시켰을 때 포개어지는 직사각형을 그리는 경우도 8.4%나 되어, 이런 유형의 문제를 제시할 때에는 ‘다른 직사각형’에 대한 약속을 문제제시에 포함시켜야 함을 알 수 있었다.

3. 평면도형의 넓이

평면도형의 넓이 측정 문항은 모두 4가지이며, 각 정답률은 [Table 10]과 같다. 이 결과에 의하면, 초등학교 6학년 학생들은 직사각형의 넓이를 구하는 문제나 넓이가 주어진 직사각형을 구성하는 문제에는 큰 어려움이 없는 것으로 보인다. 그러나 계단형 도형의 넓이를 구하는 문제는 전체 학생의 반 정도가 정답을 제시하지 못하는 것으로 보아서, 비정형 도형을 다루는 능력이 상당히 취약함을 알 수 있다.

[Table 10] Percentages of correct answers of area measurement

Problem	Percentage (%)
measurement of area of a plane figure with pictures	86.4
measurement of area of a plane figure without pictures	56.9
measurement of area of a stair-shaped plane figure	51.6
composing rectangles with area value	77.8
average	68.2

[Table 11] Percentages of correct answers of area measurement according to the presence or absence of a picture

Answers from the students	Picture ○ (%)	Picture × (%)
correct answers	86.4	56.9
incorrect answers	unit error	12.6
	formula error	1
	others	0

그림의 유무에 따른 정답률을 보면 그림이 있는 경우의 정답률(86.4%)이 그림이 없는 경우의 정답률(56.9%)보다 월등히 높았다([Table 11]). 그러나 둘레와 마찬가지로 그림이 없는 경우의 오답(43.1%) 대부분이 단위 오류(40%)인 것으로 미루어 보아, 그림의 유무가 직사각형의 넓이 개념을 인지하는데 영향을 미치기보다는 정보처리적 관점에서 문제의 조건으로서의 단위를 포착하는데 영향을 미친 것으로 생각해 볼 수 있다. 단위 오류를 보인 학생들 가운데 넓이 단위로 제곱미터(m²) 대신 제곱센티미터(cm²)를 쓴 학생들이 많았는데, 면담결과 학생들이 제곱센티미터(cm²)를 넓이의 기본단위로 인식하는 경향을 보였다.

한편, 전체 응답에서 식 오류가 차지하는 비중이 극히 작은 것으로 보아, 직사각형 넓이 공식은 초등학교 6학년 학생들에게 장애 요인으로 거의 작용하지 않음을 알 수 있다.

계단형 평면도형의 넓이 측정에서 나타나는 오답 유형을 보면, 식 오류가 24.2%로 가장 높게 나타났고, 그 다음은 정보처리 오류(13.7%), 단위 오류(9.5%), 기타(1%) 순으로 나타났다([Table 12]). 식 오류가 높은 비중을 차지한 이유는 계단형 도형의 넓이를 구하기 위해서는 혼

합산을 이용해야 함에도 불구하고 많은 학생들이 제시된 수치를 무조건 곱하거나 더하는 식으로 계산한 경우가 많았기 때문이다. 또한 수치를 잘못 대입하거나 큰 직사각형의 넓이만 구하고 비어있는 부분의 넓이를 빼지 않는 등 정보처리의 미숙함을 보인 경우도 많았다. 이것으로 볼 때, 비정형 도형의 넓이 측정 문제는 동시에 여러 가지 복합적인 인지 수행을 요구함으로써 초등학교 6학년 학생들에게는 도전적인 문제임을 알 수 있다.

[Table 12] Percentages of correct answers of the stair type's area measurement

Type of answers		Percentage (%)
correct answers		51.6
incorrect answers	unit error	9.5
	formula error	24.2
	information processing error	13.7
	others	1

넓이가 주어진 직사각형을 구성하는 능력에는 큰 문제가 없었다. 넓이가 24cm²인 직사각형을 3개 이상 구성하는 문항은 정답률이 77.8%로 비교적 높게 나왔다([Table 13]). 오답의 경우도, 오목 사각형을 제시하거나(3.2%), 위치나 방향이 바뀐 동일한 직사각형을 제시하거나(4.2%), 3개 이하를 제시하는 경우(4.2%)처럼 완전히 오답으로 보기 어려운 경우가 11.6%나 된다. 그러나 둘레와 넓이를 혼동하여 둘레가 24cm인 직사각형을 구성하거나(3.2%), 넓이가 12cm²인 직사각형을 구성하는 식으로(3.2%) 정보처리 능력의 문제는 심각한 비중은 아니지만 여기서도 일정 부분을 차지하는 것으로 조사되었다.

[Table 13] Percentages of correct answers of composing rectangles with a given area

Type of answers		Percentage (%)
correct answers		77.8
incorrect answers	rectangle with 24cm perimeter	3.2
	identical rectangles with different directions	4.2
	concave quadrangle	3.2
	rectangle with 12cm ² area	3.2
	at most 3 cases	4.2
	no answer or cause unknown	4.2

4. 둘레와 넓이의 관계

넓이와 둘레의 관계에 대한 문항들의 평균 정답률은 43.2%로 낮았으나, 문항에 따라 정답률의 차이가 크게 나타났다. '넓이가 같으면 둘레도 같다'의 정답률은 71.6%인 반면, '둘레가 큰 직사각형이 넓이가 크다'의 정답률은 27.4% 밖에 나오지 않았다([Table 14]).

[Table 14] Percentages of correct answers of relationships between perimeter and area

Problem	Correct answer rates(%)
Of the two rectangles, one with larger perimeter has also larger area. (×)	27.4
Two rectangles with identical area have also identical perimeter. (×)	71.6
If the length of a side of a square doubles, its area also doubles. (×)	33.7
Compare two perimeters. (different)	24.2
Compare two areas. (same)	58.9
Average	43.2

'넓이가 같으면 둘레도 같다'의 경우 학생들은 구체적인 예를 들면서 설명을 하는 경우가 많았다. 그러나 '둘레가 큰 직사각형이 넓이가 크다'의 경우 구체적인 예를 들기보다는 직관적으로 당연하다는 반응이 많았다. 면담결과, 이러한 학생들은 둘레가 큰 직사각형은 가로와 세로가 모두 긴 직사각형이라고 파악하는 경향을 보였다.

5. 입체도형의 겉넓이

[Table 15] Percentages of correct answers of each surface area question

Problem	Percentage(%)
measurement of the surface areas of solid figure with picture	36.8
measurement of the surface areas of solid figure without picture	31.4
measurement of the surface areas of a stair-shaped solid figure	14.7
composing regular hexahedrons with a surface area value	38.9
Average	30.5

입체도형의 겉넓이 측정 문항은 모두 4가지이며, 각 정답률은 [Table 15]와 같다. 평균 정답률은 30.5%로 매우 낮았으며, 특히 계단형 입체도형의 겉넓이 측정 문항의 정답률은 14.7%로 매우 낮았다. 이 수치는 평면도형의 둘레 측정 문항에서 나온 것보다도 낮다(평면도형 둘레의

평균정답률 37.9%, 계단형 평면도형의 둘레 정답률 24.2%).

평면도형의 둘레와 넓이 문항에서는 그림의 유무가 정답률에 큰 영향을 미쳤으나, 입체도형의 겉넓이와 부피에서는 영향을 별로 미치지 않았다([Table 16]). 그 이유는 입체도형의 겉넓이와 부피 측정 검사문항에서 모두 센티미터(cm) 단위만 사용했기 때문에 학생들이 단위에 주의할 필요가 없었기 때문일 것으로 추정된다.

[Table 16] Percentages of correct answers of surface area measurement according to the presence or absence of a picture

Answers from the Students		Picture ○ (%)	Picture × (%)
correct answers		36.8	31.4
incorrect answers	unit error	7.4	9.5
	calculation error	4.2	5.3
	formula error	6.3	7.4
	information processing error	11.6	5.3
	surface area-volume error	28.4	33.7
	others	5.3	7.4

평면도형의 둘레 측정 문항에서 ‘둘레-넓이 오류’가 높은 비중을 차지한 것과 마찬가지로 입체도형의 겉넓이 측정 문항에서도 ‘겉넓이-부피 오류’가 높은 비중을 차지했다(그림이 있는 경우 28.4%, 그림이 없는 경우 33.7%). 이 결과를 두고, 학생들이 문제에서 요구하는 사항을 제대로 파악하지 못했는지 여부를 알기 위해 일부 학생과 면담을 하였다. 그 결과 일부 학생들은 겉넓이를 구하는 문제임을 알면서도 과정이 복잡하고 틀릴 것 같아 그냥 부피를 구했다고 답하는 경우가 있었다.

교 사: 여기 문제들은 모두 겉넓이 구해야하는데 부피를 구해버렸네?

학생A: 알고 있었어요...

교 사: 알고 있었는데 왜 부피를 구했니?

학생A: 겉넓이 문제는 너무 어려워서 어차피 틀릴 것 같아서 그냥 부피라도 구했어요.

실제로 학생들이 하루에 수행한 검사문항은 모두 겉넓이 측정을 요구하고 있기 때문에, 학생들이 문제에서 요

구하는 사항을 오인할 가능성은 높지 않다. 결국 ‘겉넓이-부피 오류’는 겉넓이를 구하지 못하거나 구하기 싫어서 부피를 구하는 것으로 회피하는 학생들의 성향을 보여주는 것이라 하겠다.

[Table 17] Percentages of correct answers of the stair type's surface area measurement

Type of answers		Percentage(%)
correct answers		14.7
incorrect answers	calculation error	6.3
	formula error	35.8
	information processing error	16.8
	surface area-volume error	10.5
	others	15.9

계단형 입체도형의 겉넓이 측정 문항의 정답률은 14.7%로 매우 낮았다([Table 17]). 오답 가운데 식 오류는 35.8%로 가장 높았고, 다음은 정보처리 오류가 16.8%이다. 입체도형의 겉넓이를 구하기 위해서는 다소 복잡한 혼합산 식을 수립해야 하는데, 학생들이 이 부분을 어려워했다. 또한 입체도형의 모서리 길이를 파악하는데 어려움을 겪으면서, 문제해결에 실패하는 경우가 많았다. 아울러 문제 해결에 대한 시도를 아예 못하거나 원인불명의 오류를 보인 경우도 15.9%였다. 계단형 문항의 경우에도 ‘겉넓이-부피 오류’가 10.5%(10건)로 나타났는데 이중 1건만이 부피를 정확하게 구하였고, 나머지 9건은 부피마저도 정확하게 구하지 못했다.

[Table 18] Percentages of correct answers of composing rectangular parallelepiped with a given surface area

Type of errors		Percentage (%)
correct answers		38.9
incorrect answers	unit omission or using incorrect unit	3.2
	incorrect formula	6.3
	calculating area of a face	32.6
	calculating sum of all edges	2.1
	no answer or cause unknown	16.9

겉넓이가 150cm²인 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하는 문제의 경우 정답률은 38.9%였다([Table 18]). 그러나 단위의 누락, 한 면의 넓이를 구한 경우, 모든 모서리

의 합을 구한 경우 등 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하고 나서 오답을 쓴 경우를 합하면 76.8%의 학생들이 겹넓이가 150cm²인 정육면체의 구성요소를 파악하였다고 볼 수 있다.

6. 입체도형의 부피

입체도형의 부피 측정 문항은 모두 4가지이며, 각 정답률은 [Table 19]와 같다. 부피측정 평균 정답률은 55.5%이며, 그 중 직육면체를 구성하는 문항의 정답률이 65.3%로 가장 높았으며, 계단형 입체도형의 부피 측정 문항의 정답률이 40%로 가장 낮았다. 이 결과는 평면도형의 넓이 측정 정답률과 유사한 경향을 나타내지만, 정답률 수치는 10%포인트 이상 낮다.

[Table 19] Percentages of correct answers of each volume question

Problem	Percentage (%)
measurement of the volume of solid figure with picture	60
measurement of the volume of solid figure without picture	56.9
measurement of the volumes of stair-shaped solid figure	40
composing rectangular parallelepipeds with a volume and a width value	65.3
Average	55.5

그림의 유무는 부피측정에 큰 영향을 미치지 않았다. 그림이 있는 입체도형의 부피 측정과 그림이 없는 경우의 정답률은 각각 60%와 56.9%로 큰 차이가 없었다. 그러나 그림의 유무에 상관없이 단위오류가 약 30%나 차지하는 것으로 볼 때, 학생들이 부피 단위(cm³)를 사용하는 것에 상당한 어려움을 겪고 있음을 알 수 있다([Table 20]).

[Table 20] Percentages of correct answers of volume measurement according to the presence or absence of a picture

Answers from the Students	Picture ○ (%)	Picture × (%)
correct answers	60	56.9
incorrect answers	unit error	29.5
	formula error	4.2
	others	6.3
		8.4

계단형 입체도형의 부피 측정 문항의 오답 유형을 보면, 식 오류가 22.1%로 가장 높게 나타났고, 그 다음은 단위 오류(8.4%), 계산 오류(6.3%) 순으로 나타났다([Table 21]). 식 오류가 높은 비중을 차지한 이유는 계단형 입체도형의 부피를 구하기 위해서는 상당히 복잡하고 긴 혼합산을 이용해야 하기 때문일 것이다.

[Table 21] Percentages of correct answers of volume measurement for a stair type's space figure

Type of Answers		Percentage (%)
correct answers		40
incorrect answers	unit error	8.4
	calculation error	6.3
	formula error	22.1
	information processing error	2.1
	surface area-volume error	3.2
	others	17.9

가로와 길이와 부피가 주어진 직육면체를 구성하는 문항 정답률은 65.3%로([Table 22]), 넓이가 주어진 직사각형을 구성하는 문항(77.8%)에 비해 낮은 수치였다. 직육면체를 구성하는 문항의 오류 유형을 살펴보면 원인불명의 오답이나 무응답이 20%로 가장 많았다. 이외에는 3개 이상의 답을 구하지 못하는 경우가 있었는데 이는 12의 약수인 3과 4 또는 2와 6의 조합을 모두 사용하지 못한다는 데서 비롯된 것이다. 아울러 곱하여 72가 되는 수를 찾지 않고, 모서리의 길이들을 더하여 72가 되는 수를 찾으려는 경우도 나타났다.

[Table 22] Percentages of correct answers of composing rectangular parallelepiped with a given volume

Type of answers		Percentage (%)
correct answers		65.3
incorrect answers	at most 2 cases	6.3
	The multiplication of the length and height is 72.	2.1
	using the sum of all edges as a clue	6.3
	no answer or cause unknown	20

이 문항은 가로와 길이가 6cm로 주어졌기 때문에 실질적으로는 넓이가 12cm²인 직사각형을 구성하는 문항과 유사한 문항이다. 그림에도 불구하고 정답률이 10%포인트

이상 차이 나는 것은 문제의 복잡성 혹은 입체를 다루는 것에 대한 인지적 어려움 등을 원인으로 예상해 볼 수 있다.

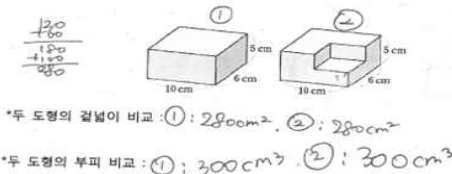
7. 겹넓이와 부피의 관계

겹넓이와 부피의 관계에 대한 문항의 평균 정답률은 43.0%였는데 둘레와 넓이의 관계에 대한 문항과 마찬가지로 문항별 정답률의 편차가 매우 컸다([Table 23]).

[Table 23] Percentages of correct answers of relationships between volume and surface area

problem	correct answer rate(%)
Rectangular parallelepipeds with large surface area also have large volume.(x)	16.8
Rectangular parallelepipeds with identical volume also have identical surface area.(x)	68.4
When the surface area of regular hexahedron is quadrupled, its volume is 8 times.(x)	33.7
Compare the surface areas of two solid figures.	33.7
Compare the volumes of two solid figures.	55.8
average	43.0

6-4. 두 도형의 겹넓이와 부피를 비교하고, 그렇게 생각한 이유를 적으세요.



[Fig. 9] An example of volume comparison error

두 도형의 부피 차이를 직관적으로 알 수 있는 마지막 문항의 경우에도, [Fig. 9]와 같이 부피를 구하는 공식을 통해 두 도형을 비교하려는 학생들이 적지 않았다. 이러한 연구결과는 넓이 비교를 검사한 Park 외(2006)의 연구결과와 매우 흡사하다. 이를 통해 학생들이 측정영역의 문제를 개념적으로 접근하기 보다는 기계적으로 접근하려는 경향이 있음을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구는 평면도형의 둘레와 넓이, 입체도형의 겹넓이와 부피에 대한 초등학교 6학년 학생들의 문제해결 능력을 진단하고, 각 요소별 수행 능력을 비교 분석하여 차후 수학 교과서 개발 및 측정 영역 지도를 위한 시사점을 도출하고자 하였다.

이 연구에서 초등학교 6학년 95명을 대상으로 총 4일에 걸쳐 둘레(4문항), 넓이(4문항), 둘레와 넓이의 관계(5문항), 겹넓이(4문항), 부피(4문항), 겹넓이와 부피의 관계(5문항)를 조사한 결과는 다음과 같다.

첫째, 초등학교 6학년 학생들은 넓이보다는 둘레 측정을, 부피보다는 겹넓이 측정을 어려워한다. 또한 전반적으로 입체도형의 측정을 평면도형의 측정보다 어려워한다. 넓이 문항들의 정답률은 68.2%였지만 둘레 문항들의 정답률은 37.9%였으며, 부피 문항들의 정답률은 55.5%인데 반하여 겹넓이 문항의 정답률은 30.5%였다. 이를 통해 학생들에게는 평면도형의 둘레, 입체도형의 겹넓이와 같이 더 낮은 차원의 측정 상황이 평면도형의 넓이, 입체도형의 부피와 같은 더 높은 차원의 측정 상황보다 수행하기 어려운 상황임을 알 수 있다.

둘째, 초등학교 6학년 학생들은 계단형 도형과 같은 비정형 도형의 측정을 다루는 것에 상당히 취약하다. 계단형 평면도형의 둘레와 넓이의 정답률은 각각 24.2%, 51.6%였으며, 계단형 입체도형의 겹넓이와 부피의 정답률은 각각 14.7%, 40%였다. 특히, 계단형 입체도형의 겹넓이를 측정하는 문항은 전체에서 정답률이 가장 낮았다. 이를 통해 복합적인 인지 수행을 요구하는 비정형 도형의 측정 상황이 학생들에게 매우 도전적인 과제임을 알 수 있다.

셋째, 초등학교 6학년 학생들은 둘레와 넓이, 겹넓이와 부피의 관계를 이해하는데 상당한 어려움을 가지고 있다. 둘레와 넓이의 관계, 겹넓이와 부피의 관계 정답률은 각각 43.2%, 41.7%로, 학생들이 두 측정 요소 사이의 관계 파악을 상당히 어려워하는 것으로 나타났다. 특히 [Fig. 9]와 같이 직관적으로 비교할 수 있는 상황에서도 기계적으로 수치를 구하여 계산하여 비교하려는 학생들의 수가 적지 않음을 확인할 수 있었다.

넷째, 과제환경으로써 그림의 유무는 초등학교 6학년 학생들이 문제를 인지하는데 큰 영향을 주지는 않지만, 문제에 사용된 단위의 종류는 영향을 줄 가능성이 높다.

그림의 제시 유무에 따른 학생들의 부분정답률(정답률+단위오류율)은 둘레의 경우 67.3%와 61.9%, 넓이의 경우 99%와 96.9%, 겹넓이의 경우 44.2%와 40.9%, 부피의 경우는 모두 89.5%로 유의미한 차이를 보이지 않았다. 그러나 센티미터(cm)가 아닌 미터(m) 단위를 요구하는 둘레와 넓이 문제의 단위오류는 각각 36.6%와 40%였으며 제곱센티미터(cm^2)가 아닌 제곱센티미터(cm^2) 단위를 요구하는 부피 문제의 단위오류는 32.6%인 점을 관찰했을 때, 학생들이 여러 차원과 다양한 단위가 혼재된 문제 상황에 대해 어려움을 겪을 수 있다는 것을 알 수 있다.

이상의 연구 결과를 통해 측정 영역의 지도 및 교과서 구성과 관련된 시사점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, ‘둘레와 넓이’ 및 ‘겹넓이와 부피’ 단원의 학습 순서를 정할 때, 학생들이 부담을 덜 느끼는 개념부터 배치하고, 부담을 느끼는 과제에 대해서는 더욱 비중 있게 다루는 것을 고려할 필요가 있다. 평면도형의 둘레나 입체도형의 겹넓이는 넓이나 부피에 비해 낮은 차원의 과제이지만, 복잡하고 긴 혼합계산이 요구되는 겹보기 난이도가 매우 높은 과제이다. Ahn, Kim(2011)에 의하면, 겹보기 난이도가 높은 문제는 해결 후에 큰 성취감을 줄 수 있지만 부정적인 감정도 많이 경험하게 할 수 있다. 새로운 개념을 학습하는 것은 적절한 호기심과 난이도가 어우러졌을 때, 그 효과를 극대화 할 수 있다. 수학 학습에 대해 긍정적인 태도가 형성되지 않은 학생에게 어려운 개념을 먼저 학습하게 하는 것은 당황스러움, 불안감, 좌절, 체념과 같은 감정을 느끼게 하여 해당 단원의 수학 학습에 부정적인 영향을 미칠 우려가 있다.

둘째, 비정형 도형의 측정 상황과 같이 여러 가지 복합적인 인지 수행을 요구하는 문제의 지도 방안을 고려해 볼 필요가 있다. 실생활에서는 직육면체나 정육면체보다 비정형 도형에 대한 측정 상황이 더 많다. 게다가 비정형 도형은 측정을 위해 다양한 전략과 복합적인 수학적 사고를 필요로 한다. 따라서 비정형 도형은 측정 영역에서 학생들의 문제해결 교육을 위한 좋은 소재가 될 수 있다.

셋째, 둘레와 넓이의 관계 및 겹넓이와 부피의 관계에 초점을 맞춘 지도 방안을 구상할 필요가 있다. 초등학교 고학년에서는 수학 학습 전반에 상당히 많은 양의 새로운 수학 내용을 학습하는데 이러한 것들이 얼마나 잘 연결되어 있는가에 따라 그들의 이해력과 새로운 아이디어

를 관리하는 능력이 달라진다. 게다가 각 개념들 사이의 연결성이 없으면 학생들은 너무 많은 고립된 개념과 기능을 배우고 암기해야만 한다(NCTM, 2000). 그리고 통합적으로 사고하지 못함으로써 선후 학습 간의 관련을 맺지 못하고 각각 별도의 것으로 수용하기 때문에 학습량이 필요 이상으로 많아지게 되며 학습의 구조화나 관계적 이해의 성과를 거둘 수 없게 된다(Kang et al., 2005).

넷째, 단위 사용과 관련해서, 여러 차원과 다양한 단위가 혼재하는 상황에서 주어진 문제 상황에 적절한 단위를 선택하고 표현하는 능력을 키울 필요가 있다. 학생들의 오답 중 단위 오류가 차지하는 비중이 상당히 높았다. 특히 문제가 센티미터(cm)가 아닌 미터(m) 단위를 요구할 때, 제곱센티미터(cm^2)가 아닌 제곱센티미터(cm^2) 단위를 요구할 때 오답률이 높았다. 또한 단위를 누락하는 경우도 많았다. 이러한 결과를 놓고 볼 때, 차후 교과서 개발이나 측정 영역 지도에 있어 학습자로 하여금 단위를 선택하고 표현하게 하는 부분에 더욱 역점을 두어야 함을 알 수 있다.

마지막으로 본 연구의 제한점 및 후속 연구를 위한 제언은 다음과 같다.

첫째, 학생들의 오답 가운데 단위 오류가 높은 비중을 차지하면서 결과 해석에 부분적으로 영향을 주었다. 단위를 선택하고 표현하는 것을 기능적인 문제로 볼 것인지, 측정 개념 이해의 하위 요소로 볼 것인지 차후 논의가 더 필요하다.

둘째, 본 연구는 특정 지역의 6학년 학생들을 대상으로 시행하였기 때문에 모든 학생에게 일반화하는 것은 무리가 있다. 특히 평면도형의 둘레와 넓이에 관련된 문항은 5학년 학생을 대상으로 추가 연구를 수행하는 것도 필요하다.

셋째, 둘레와 넓이, 겹넓이와 부피에 대한 학생들의 문제해결 능력을 알아보기 위해 제작한 본 연구의 검사 문항의 범위와 수가 제한적이다. 차후 학습자들의 이해 정도를 더욱 정밀하게 측정할 수 있는 체계적이고 광범위한 조사 문항이 개발되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- Ahn, S. Y. & Pang, J. S. (2006). An analysis of the relationship between teachers' pedagogical content knowledge and teaching practice: focusing on the area of plane figure. *Journal of Educational Research in Mathematics* 16(1), 25-41.
- Ahn, Y. K. & Kim, S. H. (2011). The variation of emotions in mathematical problem solving. *Journal of Educational Research in Mathematics* 21(3), 295-311.
- Altieri M. B., Balka D. S., Day R., Gonsalves P. D., Grace, E. C., Krulik S., ..., Vielhaber K. (2009). *Math connects, grade 5*. Macmillan/Mcgraw-Hill.
- Bae, C. S (2002). *Study on teaching method for finding areas of irregular figures using manipulative materials*. Master thesis, Incheon National University of Education.
- Collars, C., Lee, K. P., Hoe, L. N., Leng, O.B., & Seng, T. C. (2005). *Shaping math 5-A*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Hershkowitz, R. & Vinner, Sh.(1982). Basic geometric concepts-definitions and images. *In Proceedings of the sixth international conference for the psychology of mathematics education*, A. Vermandel(Ed.) Universitaire Instelling, Antwerpen, 18-23.
- Hong, G. J., Choi, Y. G., An, S. Y., & Kim, K. U. (2008). On the approach for the volume and the surface area of solid figures in the middle school. *Journal of Educational Research in Mathematics* 18(1), 81-101.
- Jeong, D. G (2001). On developing mathematical thinking ability through teaching area measure. *Science Education Center in Incheon National University of Education* 13(13), 1-36.
- Jeong, P. W (2005). *A study on the utilization of cuisenaire rods in elementary education of the width of plane figure*. Master thesis, Gyeongin National University of Education.
- Kang, M. B., Kang, H. K., Kim, S. M., Park, K. S., Park, M. H., Seo, D. Y., ..., Chong, Y. O.(2005). *Understanding of elementary mathematics education*. Seoul: Kyungmoon
- Kim, J. B (2000). A study on the segmentation and teaching methods of shape. *The Journal of the Institute of Science education* 21, 1-18
- Lee, D. H (2001). *Analysis of intuitive thinking of high school students in mathematical problem solving process*. Ph. D. Thesis, Korea National University of Education.
- Lee, D. H (2002). An analysis of understanding about the relationship between perimeter and area of geometric figures of elementary school students. *Education of Primary School Mathematics* 6(2), 85-91.
- Lee, K. H. (2001). Teaching measurement based on activities and intuition-focused on area and perimeter. *The Journal of the Institute of Science education* 22, 99-118.
- Lee, S. Y (2006). *Analysis on elementary school students' construction of the area formula of plane figures*. Master thesis, Gyeongin National University of Education.
- Ma, L.(1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and th United State*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Ministry of Education (2015a). *Elementary school mathematics textbook 5-1*. Seoul: Chunjae Education.
- Ministry of Education (2015b). *Elementary school mathematics textbook 6-1*. Seoul: Chunjae Education.
- Morrow P., Connelly R., Johnston J., Keyes B., Jones D., Davis M., ..., Brown T. (2005). *Math makes sense, grade 6*. Pearson/Addison Wesley
- Morrow P., Connelly R., Johnston J., Keyes B., Jones D., Davis M., ..., Brown T. (2005). *Math makes sense, grade 5*. Pearson/Addison Wesley
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics (Vol. 1)*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Pang, J. S., Kim, S. H., & Park, K. R. (2006). Development of teaching and learning materials for elementary school teachers to foster pedagogical content knowledge in mathematics. *Institute for Education Research* (KRF-2005-030-B00045)
- Park, H. G., Kim, Y. H., & Jeon, P. G. (2006). An analysis of fifth Graders' knowledge in measuring the area of Plane Figure. *In Proceedings of the Korea Society of Mathematical Education Conference. Korean Society of Mathematical Education*, 79-90.
- Song, M. J (2004). *Analysis of mathematics learning achievements of elementary students in measurement*. Master thesis, Jinju National University of Education.
- Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking (enlarged ed.)*. New York: Harper & Row(originally published in 1945)
- 東京書籍 (2013). *新しい算数 5-上*. 東京書籍