

CAS를 활용한 평가 문항에 대한 고찰¹⁾

손홍찬²⁾

본 연구에서는 수학교수학습에서 CAS를 활용이 갖는 의미와 CAS의 도입으로 야기된 수학 교수·학습 상의 변화를 살펴보고, 이에 따라 변화하게 되는 평가의 방향을 논하였다. 특히, CAS를 도입했을 때 평가 문항의 몇 가지 분류에 대해 고찰하고 대안적 평가 방향을 제시한 후 그것이 갖는 의미를 논하였다.

주요용어 : 수학 평가, CAS, 분류

I. 서론

오늘날 많은 나라들은 수학 교수·학습에서 공학 기술의 활용을 권장하고 있다. 미국의 NCTM은 컴퓨터와 계산기가 수학교육에 긍정적 영향을 미칠 잠재력을 가지고 있으므로 이를 수학 교수·학습에 허용해야 하였고(NCTM, 1989), 또 학교 수학의 여섯 가지 원리 중의 하나로 공학의 원리를 들면서 수학을 가르치고 배우는데 기술 공학이 필요함을 언급하고 공학이 수학을 가르치는데 영향을 미치고 학생들의 학습을 향상시킨다고 하였다(NCTM, 2000). 미국뿐만 아니라 세계의 여러 나라들은 수학 교수·학습에서 기술 공학 도구와 컴퓨터의 활용을 중요시하고 적극적으로 활용할 것을 권고하고 있다(교육인적자원부 & 경남교육청, 2010).

우리나라도 1992년에 공포한 제6차 수학과 교육과정에서부터 시작하여 최근 교육과정에 이르기까지 공학의 활용을 권장하고 있으며 시일이 지나면서 보다 적극적으로 활용하기를 권장하는 추세이다. 6차 수학과 교육과정에서는 수학 교수·학습 과정에서 복잡한 계산이나 문제 해결력 향상 등을 위해 계산기나 컴퓨터를 활용하되 복잡한 계산의 보조수단으로의 활용이 언급되었다면, 7차 교육과정에서는 수학적 개념·원리·법칙의 이해 측면에서 적극적으로 활용할 것을 권장하였다(교육부, 1997). 2007 개정 수학과 교육과정에서는 계산기와 컴퓨터 이외에 교육용 소프트웨어에 대한 언급과 함께 ‘수학 교수·학습 방법’ 영역 외에 ‘평가’ 영역에서의 공학적 도구의 활용을 최초로 명시하고 있다. 즉 “수학 학습의 평가에서 평가하는 학습 내용에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.”와 같이 기술함으로써 교수·학습뿐만 아니라 평가에서도 공학

* MSC2010분류: 97U70

1) 이 논문은 2018년도 전북대학교 연구교수 연구비 지원에 의하여 연구되었음

2) 전북대학교 교수 (hcsn@jbnu.ac.kr)

적 도구의 활용을 권장하고 있다(교육인적자원부, 2007).

이와 같이 수학과 교육과정에서 점차적으로 공학의 활용을 권장함에 따라 수학 교과서에서도 공학의 활용이 활발해지게 되었다. 6차 교육과정에서부터 2007 개정 교육과정에 이르기까지 수학과 교과서에는 공학 도구 활용 장면이 늘어났고, 공학 활용 영역도 초기에 대수 및 해석 영역이 대부분을 차지한 것에 비해 점차적으로 다양한 영역으로 활용 영역이 넓어졌음을 알 수 있다. 그리고 활용된 공학적 도구의 종류도 다양해져 갔으며, 초기에 단순한 공학 도구의 설명이나 문제해결의 보조적 수단으로 활용되던 것이 점차 탐구적 도구로 활용되는 양상을 보인 것을 알 수 있다(김미화, 손홍찬; 2013). 그러나 수학 교과서에서 공학 활용 장면이 제시된다고 하여 실제 수업시간에 다루어지지 않는다. 많은 사범대학 수학교육과의 교육과정에 공학 관련 강좌에 설치되어 있지만, 현직 교사의 연수에서 공학 관련 연수 시간이 부족하며 다루는 공학 도구의 종류가 제한적임을 알 수 있고, 특히 경력 교사의 경우에 있어서는 공학 관련 지식이 적고, 많은 수의 교사들이 수업 중에 공학적 도구를 활용하고 있지 않음을 알 수 있다(Son, 2015). 과거에 비하면 점차적으로 물리적 환경이나 사범대학에서의 교육과정 개정에 따라 공학 관련 지식을 습득하기가 용이해졌다고 하더라도 공학적 도구의 활용이 활발하지 못한 데는 대학입학시험 준비와 같은 현실적인 문제가 많이 작용하고 있다고 생각된다.

한편 수학 교사들은 수학 교수·학습에서의 공학 활용에 대해서보다 공학을 활용한 평가에 대해 어려움을 느끼고 있다. 공학 도구를 활용한 평가에 대해 교사들을 대상으로 한 고상숙 외(2013)의 조사 연구를 보면, 교사들의 44.3%가 공학 도구를 활용한 평가가 어렵다고 응답한 반면, 25%만이 어렵지 않다고 응답한 바 있고, 공학 도구를 활용한 평가에 어려움을 느끼는 이유로 81.6%가 도구 또는 공학 도구를 활용한 평가 관련 자료의 부족을 들었다. 공학을 활용한 평가가 비교적 최근의 교육과정에 반영되기 시작한 영향일 수도 있지만, 우리나라에서 공학을 활용한 평가에 관한 연구는 그리 많지 않다. 따라서 공학을 활용한 평가에 관한 연구들이 필요하다고 생각된다.

이 연구에서는 수학 교수·학습에서 활용될 수 있는 공학 중 CAS를 활용한 평가에 대해 알아보려 한다. II장에서는 수학 교수·학습에서 CAS 활용이 갖는 의미와 수학 교수·학습의 이론에 미친 영향을 알아보고, III, IV장에서는 CAS를 활용할 수 있는 문항의 유형에 대해 살펴보고, II장에서 논의한 바를 바탕으로 새로운 대안적인 문항을 제시하고 그 의미를 논하고자 한다.

II. CAS가 수학 교수·학습에 미친 영향

1. CAS 활용의 특징과 실험 환경 구성

CAS(Computer Algebra System)를 사용하면 대수의 핵심인 수, 그래프, 기호, 함수, 벡터 그리고 행렬 등을 조작할 수 있고 방정식, 부등식과 미분방정식 등의 풀이가 가능하다. 이와 같이 다양한 기능을 가진 CAS가 출현하면서 학교 수학 교육과정과 학습 방법은 변할 수 있는데 학교수학의 영역에서 CAS의 영향을 가장 크게 받는 분야는 대수 영역이다. 이는 CAS가 대수의 기계적인 연산의 대부분을 쉽고 빨리 수행할 수 있기 때문이다.

중등 대수에서 중요하게 다루어지는 사항은 형식(form)과 그 변환, 패턴 찾기와 수치적 관계를 지배하는 규칙 찾기, 문제 해결하기, 물리적 현상 모델링하기, 변수와 함수의 개념, 대수적 구조 등으로 볼 수 있다(Goldenberg, 2003; Kieran & Lee, 1996; Heid, 2003).

CAS를 활용하면 대수적 형식 변환이 용이한데 이 경우 자동 계산으로 결과를 빨리 구할 수 있어서 학생으로 하여금 찾아야 하는 패턴을 시사하는 다양한 자료를 쉽게 생성할 수 있다. 예를 들어 이차방정식의 풀이에서 다양한 자료를 쉽게 구성할 수 있다는 점은 방정식의 근과 계수와의 관계를 형식화해나가는 데 도움을 주며 이차방정식의 근을 찾아가는 활동, 즉 정보를 찾기 위해 형식을 변환시키는 활동을 가능하게 만든다. 또 CAS가 가지는 빠른 계산 능력을 이용하여 다양한 문제의 해를 구할 수 있도록 하고 해가 가지는 패턴을 찾게 한 다음 그러한 패턴이 생기는 이유를 탐구할 수 있으며 궁극적으로 해의 공식을 유도하는 의미 있는 활동을 할 수도 있다.

또 CAS를 활용하면 수치적 관계를 지배하는 패턴을 일반화할 수 있는 기회를 가질 수 있는데, 이는 지필환경에서는 갖기 어려운데 그 이유는 패턴을 추측하기 위해서 보다 많은 자료를 생성하는 것이 중요하지만 지필환경에서 이것을 생성하는 것은 시간이 많이 소모되기 때문이다. 또 CAS의 활용이 다양한 계산을 쉽게 해주기 때문에 직접적인 피드백을 이용하여 기호적 결과도 일반화할 수 있는 기회를 제공한다.

CAS가 갖는 중요한 기능 중의 하나는 대상, 사실 또는 과정을 그래프, 수치 또는 대수적인 결과로 보여주는 시각화이다. 학생들은 그래프와 표현을 곧바로 연관시킬 수가 있고 교사는 나타난 결과에 대해서 즉각적으로 토론할 수 있다. 손으로 그래프를 그리는 것이 시간이 소요되고 부정확하기 때문에 신속하고 정확하게 대수와 그래픽 표현 사이의 대응을 이해시킬 수 있다는 점은 CAS를 활용한 시각화가 가지는 장점이다. 한편 Kutzler(2003)는 CAS가 가지는 자동화와 보완적 측면에서의 성격을 각각 물리적인 이동 수단과 지적인 수학에 비유하여 적절하게 CAS를 활용할 경우 교수·학습 상의 이점이 있음을 지적한 바 있다. 자동화와 보완의 기능은 수학교수·학습에서 CAS가 도구로서 제공할 수 있는 두 가지의 가장 기본적인 기능으로 보고, 수학적으로 나은 학생을 위해서는 자동화의 기능이, 수학에 부진한 학생에게는 보완의 기능이 더 우세하게 사용될 수 있다고 보았다. 교사는 특히 수학에 부진한 학생들에게는 CAS를 보완 도구로 사용한다면 도움을 줄 수 있고, 한편 CAS는 복잡한 계산을 쉽게 해주는 특징이 있으므로 복잡한 계산이 필요한 현실적인 문제들을 다룰 때에 자동화의 기능을 특히 유용하게 사용하도록 할 수 있다.

지금까지 알아본 CAS를 활용한 패턴 찾거나 규칙의 일반화 가능성, 시각화나 자동화 기능을 이용한 복잡한 문제 해결에서의 도움 등으로 수학 교수·학습 환경은 실험의 장으로 바뀔 수 있다. Buchberger(Heugl, Klinger & Lechner, 1996 재인용)는 수학의 발달 단계를 알려진 알고리즘을 적용하여, 예들을 만들고 예들을 관찰하여 귀납적으로 추측을 하는 실험단계, 추측을 증명하여 정리로 만들고, 알고리즘 측면에서 유용한 지식을 이용하여 새로운 알고리즘을 만드는 엄밀화 단계, 알고리즘을 실제 또는 가상의 문제에 응용하는 응용단계로 나눈 바 있으며, 오늘날 학교 수학에서 수학의 실험적 측면이 간과되고 있음을 지적하고 수학의 실험적 측면을 강조한 바 있다.

수학은 원래 실험과 응용의 측면에서 시작된 실험적 학문이었지만 그리스인들이 연역적 방법을 수학에 적용하여 엄밀화한 이래로, 또 수학자 그룹인 Bourbaki가 수학을 정의-이론-증명-보조정리의 체계를 사용하여 재구성한 이래로 수학은 연역적 학문으로 인식되었다. 엄밀성과 연역적 측면을 강조한 Bourbaki 체계는 곧 현대 수학의 특징처럼 되어 버렸고, 수학 교수와 학습에도 영향을 주어 수학지식을 연역적으로 제시하고 학생에게 이를 배우고 적용하도록 요구하는데 많은 영향을 미쳤다. 그러나 Freudenthal(1979)이 “우리는 학생이 스스로 발견할 수 있는 것을 가르쳐서는 안된다”고 한 것처럼 학생에게 실험 기회를 제공하여 학생 스스로 수학적 사실이나 성질을 추측하도록 할 필요가 있다. 그렇게 한다면 수학의 연역적 전개에서 학생들이 느끼는 어려움을 줄일 수 있을 것이다. 이러한 점에서 수학 교수·학습에서 실험의 측면을 강조할 필요가 있고, CAS를 활용하여 실험적 환경을 구성할 수 있다면 이는 아주 중요하고 의미 있는 변화라고 할 수 있다.

2. CAS를 활용한 절차의 단축과 개념의 심화

수학교육에서 공학을 도입한지 꽤 시일이 흐르면서 컴퓨터나 계산기의 성능이 놀랍게 향상되었고 수학 교수학습에서 CAS와 같은 도구의 사용과 관련된 이론들이 발전되고 정교화 되어왔는데(Heid, 2003), 여기에는 CAS의 활용이 절차를 단축하고 개념을 심화한다는 사실이 주된 근거로 자리 잡고 있다. CAS의 도입으로 변하게 된 이론은 개념적 지식과 절차적 지식, 확대자와 재조직자, 하위절차와 상위절차, APOS이론 등과 관련된 것들이 있다.

CAS는 우선 기본적으로 교육과정의 목표와 순서는 그대로 둔 채, CAS 없이 학습해온 수학 내용에 대한 학습을 용이하게 하는 데 사용될 수 있다. Pea(1985, 1987)는 확대자를 현재의 교육과정을 확장시키는 데 사용되는 기술공학으로 정의한 바 있다. 교사는 수업에서 학생들이 지필로 쓴 계산 결과를 확인하는데 CAS를 사용하도록 하거나 또는 새로운 절차적 규칙을 추론해낼 수 있는 자료를 만드는데 CAS를 사용하도록 할 수 있다. 이와 같이 사용하는 것은 CAS를 확대자로 사용하는 것이다. 즉 이 경우 현재의 교육과정은 내용상의 변화는 없지만, 학생들이 현재 목표를 더 빨리 성취하고 더 깊이 성취하도록 도와주므로 교육과정을 확대한다고 하는 것이다. CAS는 또한 교육과정의 기본적인 성격과 배열을 변화시킬 수 있는 재조직자의 역할을 할 수 있다. Kilpatrick & Davis(1993, p.204)는 공학이 단순히 교육과정의 확장자가 아니라, 수학교육과정을 개선할 때 수학이 무엇이고 미래사회에 수학의 어떤 지식이 필요한지를 결정하는데 영향을 끼친다고 하였다.

많은 수학 교육자들은 학생들이 수학의 개념적 지식을 다룰 수 있기 전에 먼저 수학의 절차에 숙달해야 한다고 가정해왔다. 그러나 개념을 획득하기에 앞서 절차적으로 능숙해야 한다는 것은 사실이 아니라 하나의 이론이고 그렇기에 검증될 필요가 있는데, 이는 실제로 CAS를 사용한 조사연구에서는 여기에 반대하는 이론이 더 널리 지지되고 있고, 대부분이 연구를 통해 검증되어 왔다(Heid, 2003).

CAS는 수학 교육과정에서 개념과 절차에 부여된 균형, 순서, 우선 순위의 조절을 용이하게 하는 재조직자의 역할을 할 수 있기 때문에, 수학교육에서 기능발달이 개념발달에 선행해야 한다는 이론을 검사하는 데 자주 사용되어 왔다(Heid, 2003). 재조직자로서의 CAS에 초점을 둔 몇몇 연구에서, 미적분 수업에 참여한 학생들(Heid, 1988; Palmiter, 1991)과 기초대수 수업에 참여한 학생들(Heid, 1992; Heid et al. 1988; Matras, 1988; Oosterum, 1990; Sheets, 1993)은 CAS를 활용하여 기호 조작, 그래프와 표 생성, 적합곡선 찾기를 하였는데, 이런 연구에서 학생들은 전통적으로 기계적인 기호 조작 과정을 수행하는데 소비했던 시간을 기호적 결과를 해석하고 대수와 미적분 개념을 인식하고 적용하기 위해 사용하는 것으로 드러났다. 예를 들어, 대수 수업에서, 학생들은 손으로 유리식을 인수분해하고 간단히 하는 데 시간을 보내는 대신 여러 가지 함수의 성질과 응용을 학습하는 것이 관찰되었다. 즉 기다란 계산 절차 과정이 약화되고 개념과 응용이 수학적 활동의 중심이 되는 것이 관찰되었던 것이다.

이러한 일련의 실험 연구로부터 기능의 숙달을 손으로 하는 대신 CAS를 사용하는 것은 전통적인 '개념 전 절차' 라는 통념을 깨고 CAS가 학생들의 개념적 이해를 촉진하게 한다고 결론 내릴 수 있게 되었다.

한편, 수학은 체계적이어서 현재 학습하고 있는 내용이 이전에 학습된 내용의 숙달을 필요로 하는 경우가 많다. 또는 상대적으로 상위 절차(superprocedures) 또는 높은 수준의 활동을 하는데 하위 절차(subprocedures) 또는 낮은 수준의 활동이 필요한 경우가 흔하다. 학생이 CAS를 활용하게 되면 상위 절차를 수행할 때 하위 절차를 CAS가 대신함으로써 상위절차에 집중할 수 있다. 예를 들어, 식을 단순화하고 간단한 일차방정식을 푸는 것은 이미 배운 것으로 가정할 수 있는 하위 절차에 해당하는데, 학생이 CAS를 사용하면 낮은 수준의 계산에서의 실수를 피하고 높은 차원의 활동에 보다 집중할 수가 있다.

현실에서 학생은 낮은 수준의 기능을 충분히 익히지 못한 채 그 기능을 필요로 하는 상위 주제로 넘어갈 수밖에 없는 경우가 많다. 또 단순하고 지루하지만 기다란 계산 과정을 수행해야만 하는 문제에 부딪힐 때가 많다. 이때 CAS는 낮은 수준의 기능과 관련된 학생 개개인의 약점을 보완하여 학생이 상위 주제로 나아갈 수 있도록 도와줄 수 있으며, 단지 사소한 실수 때문에 문제 해결 전체 과정이 지장을 받는 것을 막고 각 단계별 경로를 밟아 나갈 수 있도록 도와준다.

또한 CAS의 활용이 단순하고 지루한 계산을 대신할 수 있기 때문에 학생들은 복잡하고 어려운 문제 해결 과정 중에 전체적인 윤곽을 파악하는 데 더욱 집중할 수 있게 된다. Dubinsky와 동료들(Asiala et al. 1991)은 행동에서 과정, 과정에서 대상수준으로의 이해의 진행과정을 기술하기 위해 APOS(Action-Process-Object-Schema)이론을 개발해왔다. 이 이론에 따르면 행동수준에서 학생들은 절차를 한 단계씩 수행하지만 행동을 수반하지 않고서는 절차를 설명할 수 없다. 과정수준에서 학생들은 각 절차를 수행하지 않고 절차의 단계를 설명할 수 있다. 대상수준에서 학습하는 학생은 과정을 조작할 수 있다. 예를 들어, 학생이 함수 이해의 대상수준에 있다면, 두 함수를 합성할 수 있고, 그 결과가 조작할 수 있는 또 다른 함수임을 이해할 수 있다.

특정한 수학 개념의 과정 이해와 대상 이해 사이의 차이와 상호작용을 다루는 이 이론은 수학적 사고를 설명하는 데 있어서 중심적인 이론으로, 과정-대상 논쟁은 수학적 이해의 측면에서 매우 중요하게 다루어져왔다. 수학 교육 연구자들은 대상과 과정을 분리될 수 있는 것으로 보지 않고 이런 이해들 사이의 관계의 성질을 특징짓는 데 초점을 맞춰왔는데(Sfard 1991; Gray and Tall 1994), 연구자들의 다양한 결과는 개념과 절차가 서로에게 영향을 미친다고 보는 것이 합리적임을 보여준다. 따라서 성공적인 학생이란 수학 문제를 연구할 때 과정 이해와 대상 이해 사이를 오가는 학생이라고 주장할 수 있다. 그런데 CAS는 일련의 절차를 압축함으로써 과정 이해와 대상 이해의 중간 단계를 놓는다고 볼 수 있다(Heid, 2003).

III. CAS를 활용한 문항의 유형

이 장에서는 학교 현장에서 흔히 볼 수 있는 문항들을 예시로 CAS가 도입되었을 때 이들의 문항을 CAS의 활용과 관련하여 어떻게 분류할 수 있는지를 살펴보고, 기존의 평가 문항과 다른 유형의 문항 유형을 제시하고자 한다.

먼저 문항의 해결에 있어서 CAS의 활용이 필요한 것인지 그리고 어느 정도의 기능을 사용해야 하는지에 따른 Kutzler의 분류와 Kokol-Voljc의 분류를 알아보고, 대안적인 새로운 평가 문항 유형을 제시하고자 한다.

1. Kutzler의 분류

CAS의 사용과 관련해서는 평가 문항을 해결하기 위해 CAS의 기능을 어느 정도 사용하게 되는지에 관한 분류들로 많이 인용되는 Kutzler의 분류가 있다. Kutzler(2003)는 CAS의 보통기능 사용과 고급기능 사용, 그리고 CAS의 활용이 일차적인 것인지(PR), 부차적인 것인지(SR) 또 필요 없는 것인지(NC)에 대한 분류를 제시한 바 있다. 즉 CAS 기능의 활용 범위와 CAS의 필요성을 두 요인으로 하는 이차원적 분류이다. 그에 따르면 다음과 같은 문항 분류 체계가 만들어 진다.

첫째, PR(Primary and Routine CAS-Use)은 CAS 사용에 대한 표면적 지식만으로 충분하지만 CAS 사용이 주요 활동인 문제이다. 둘째, PA(Primary and Advanced CAS-Use)는 CAS 사용이 주요 활동이면서 CAS 활용에 대한 심층 지식이 필요한 문제이다. 셋째, SR(Secondary and Routine CAS-Use)은 CAS 사용이 문제를 해결하는 데 사소한 역할을 하고 CAS에 대한 표면적 지식만 필요한 문제이다. 넷째, SA(Secondary and Advanced CAS-Use)는 CAS 사용이 사소한 역할을 하지만 CAS에 대한 심층적인 지식이 필요한 문제이다. 다섯째, NC(No CAS-Use)는 CAS 사용이 도움이 되지 않는 문제이다.

Kokol-Voljc(2000)에 의하면 그와 Kutzler와의 개인 통신에서 Kutzler는 다음과 같은 이차원적 분류를 제시한 바 있다고 하였다. 그 예로 다음과 같은 문항들을 들 수 있다.

<표 III-1> Kutzler의 문항 분류의 예

	Routine CAS-Use	Advanced CAS-Use
Primary CAS-Use	PR1, PR2	PA1, PA2
Secondary CAS-Use	SR1, SR2	SA1, SA2
No CAS-Use	NC1, NC2	

참고를 위하여 Kutzler가 든 문항의 예시를 제시하면 다음과 같다.

[PR1] 정수 $p \in [-3, 3]$ 에 대하여 함수족 $f(x) = \ln(x-p)$ 의 그래프를 그려라. 변수 p 에 의해 결정되는 변환은 어떤 변환인가?

[PR2] 함수 $y = \frac{1}{x^3 - x^2 - 14x + 24}$ 의 그래프를 그리고 이 함수의 그래프와 x 축 그리고 구간 $[0, 1]$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

[PA1] 타원 $\frac{(x-1)^2}{54} + \frac{(y+2)^2}{27} = 1$ 에서 타원의 중심을 지나며 두 축을 이등분하는 현의 길이를 구하고 이 현의 방정식을 구하여라.

[PA2] 두 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $g(x) = -x^2 + 3x + 2$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- 1) 두 함수가 x 축과 만나는 점, 극값, 그리고 변곡점을 구하고 두 함수의 그래프를 그려라.
- 2) 두 함수의 그래프의 교점을 구하여라.
- 3) 두 함수의 교점과 두 함수 중 어느 하나가 x 축과 만나는 점이 동일 직선상에 있음을 보이고, 이 직선의 방정식을 구하여라.
- 4) 두 함수의 그래프에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

CAS를 활용한 평가 문항에 대한 고찰

- [SR1] 부피 V 를 갖는 금속 캔을 만들려고 할 때 필요한 최소의 금속판의 넓이는? 부피가 0.21가 되게 하는 최소 금속판의 넓이는?
- [SR2] 함수 $f(x)=|x|$ 가 원점 $O(0,0)$ 에서 접선을 갖지 않음을 설명하여라. 그리고 점 $P(1,2)$ 에서 왜 접선을 갖지 않는지 설명하여라.
- [SA1] 태양 주위를 도는 어떤 행성의 궤도는 이심률 0.98을 갖는 타원이다. 이 행성이 태양과 가장 가까울 때의 거리는 $20 \times 10^6 km$ 이다. 이 행성이 태양에서 가장 멀 때의 거리를 구하여라.
- [SA2] 트럭이 $v km/h$ 의 속도로 달릴 때 제동거리는 $\frac{v^2}{100}m$ 로 주어지고, 반응시간 후 제동에 필요한 공주거리는 $\frac{v}{4}m$ 로 주어진다. 트럭들이 열 지어 이동할 때, 이 안전거리를 유지하면서 주어진 시간 안에 가장 많은 트럭이 이동할 수 있는 속도는?
- [NC1] 반경 r 이 주어졌을 때 함수 A 는 반경 r 인 원에 대해 함숫값 $A(r)$ 를 대응시킨다. 이 때, 방정식으로부터 이 둘 사이의 종속성을 설명하여라.
- [NC2] 정수 $10!$ 을 소인수분해하면 $7 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^8$ 이다. 이때, 왜 7은 한 번, 5는 두 번, 3은 네 번, 2는 8번 나오는 지 설명하여라.

2. Kokol-Voljc의 분류

Kokol-Voljc(2000)는 CAS에 의해 변하게 되는 문항이나 가치가 절하되는 문항, 그리고 CAS의 사용 여부와 관계없이 중요하면서도 창의성을 측정하고 계발할 수 있는 문항 등에 대해 논한 바 있다. 좀 더 자세히 살펴보면 Kokol-Voljc는 CAS의 활용과 관련하여 문항을 분류하면서 CAS에 민감하지 않은 문항(CAS-insensitive question), 공학에 의해 변하는 문항(Questions changing with technology), CAS에 의해 가치 절하되는 문항(Questions devalued with CAS), 기본능력과 기술을 묻는 문항(Questions testing basic abilities and skills), “재발견된” 문항(“rediscovered question”)으로 나누었다.

CAS에 민감하지 않은 문항(CAS-insensitive question)이란 해를 구하는 데 있어 계산이 별로 필요 없고 수학적 이해가 주로 필요한 것을 의미하는 것이다. 따라서 CAS의 활용이 별로 기여할 수 없는 문항을 의미한다. 예를 들어 [NC2]나 [NC1]과 같은 문항은 계산이 필요하다기보다는 수학적 개념의 충실한 이해를 요한다.

공학에 의해 변하는 문항(Questions changing with technology)은 주로 미분과 적분이 수반되는 문항과 같이 여러 단계에 걸쳐 다량의 계산이 필요한 문항으로, CAS가 도입될 때 이와 같은 계산이 자동적으로 해결됨으로 문항의 평가 목표가 개념의 이해나 계산 기능의 확인으로부터 보다 수학적 개념의 이해나 응용 쪽으로 목표가 이동할 필요가 있는 문항을 말한다. 예를 들면 [PR2]와 같은 문항은 CAS를 활용하면 단순한 문제가 되므로, 평가 목표가 보다 전형적이고 기계적인 계산으로부터 수학적 개념의 깊은 이해 또는 응용으로 이동할 필요가 있다.

CAS에 의해 가치 절하되는 문항(Questions devalued with CAS)은 문제의 해를 구하기 위해 단순한 기능과 계산만을 요하는 것이 아닌 특정한 기능을 사용하여 문제의 해를 구할 수 있는 것으로 [PR2]와 같은 문항이다. 그러나 이러한 문항도 CAS를 사용하면 바로 해결되기 때문에, 본래 학생이 특정한 풀이의 절차를 알고 있는지를 평가하고자 하는 시도를 무산시키게 된다. 이와 같이 학생에게 어떤 특정한 또는 독특한 풀이 절차를 아는 지를 평가하고자 하는 문항은 CAS를 활용하게 되면 단순한 계산 절차를 묻는 문항과 같이 바로 해가 나오기 때문에 본래 학생의 특정 연산 수행 기능을 측정하고자 하는 의도와는 배치되는 셈이다. 그리고 Kokol-Voljc(2000)는 이와 같은 문항이 수학의 본질을 가리고 격리하는 문항으로 많은 수학교육 연구자에게서 지필환경에서조차 가장 좋지 않은 유형의 문항으로 꼽힌다고 지적하고 있다.

기본능력과 기술을 묻는 문항(Questions testing basic abilities and skills)은 “ $(\frac{x}{x+3} - \frac{x^2}{x^2+x-6}) \div (\frac{x}{x+3} - \frac{x^2}{x^2-9})$ 을 간단히 하여라”와 같은 문항으로 대수 식의 기본적인 계산과 식의 변형을 할 수 있는 지를 묻는 문제이다. 이와 같은 문제는 지필환경이나 CAS가 주어진 환경에서 모두 다 평가할 필요가 있는 문항이다.

“재발견된” 문항(“rediscovered question”) (RD)은 기존의 한 개의 해만을 요구하는 대수적 조작을 주로 하는 문제에서 융통성, 유창성과 같은 창의성을 신장할 수 있는 문항으로 다음과 같은 예를 들었다.

[RD1] 시간과 거리로 주어지는 두 개의 함수 $y=3t^2+5t-1$ 과 $y=-2t+3$ 이 있다. 두 함수가 같은 위치에 있게 되는 점을 구하는 데 사용할 수 있는 방법들을 제시하고, 그 점을 구하여라.

[RD2] “방정식 $7x^2-4xt-2=0$ 을 풀여라”와 같은 문제가 나올 수 있는 상황을 제시하여라.

또 마찬가지로 앞서 제시한 [SR1], [SA2], [NC2]와 같은 문제의 유형도 이에 해당한다고 할 수 있다.

3. 대안적 평가 문항

앞서 논한 Kutzler와 Kokol-Voljc의 분류와 달리 보다 단순한 분류도 있다. Jones & McCrae(1996)는 문항을 간단히 CNI, CIU, CIO와 같이 나누었다. CNI는 CAS의 활용이 본래 문항에 영향을 미치지 못하는 문항의 유형, CIU는 CAS가 영향을 미칠 수는 있지만 문항은 변하지 않고 그대로 유지될 수 있는 문항의 유형, CIO는 CAS의 활용이 문항에 심대한 영향을 주어서 변화를 주어야만 하는 문항의 유형을 나타낸다.

한편, MacAogain(2000)는 문항의 유형을 CT(CAS trivial), CE(CAS easy), CD(CAS difficult), CP(CAS proof)로 나누었다. CT는 CAS를 활용할 경우 답이 바로 나오기 때문에 CAS를 활용하기에는 적절치 못한 문항, CE는 CAS를 활용하면 많이 간단해지지만 답을 하기 위해서는 여전히 수학적 지식이 더 필요한 문항, CD는 CAS를 활용하더라도 문항의 난이도가 감소되지 않는 문항, CP는 CAS의 활용이 매우 제한적이거나 사용되지 않는 문항을 나타낸다.

앞서 살펴본 Kutzler와 위 두 연구자의 분류는 CAS의 활용이 얼마나 문항의 성격을 바꿀 수 있게 되는 지에 관한 기존 문항의 외형적인 분류로 볼 수 있다. 그런데 이러한 종류의 분류와 달리 다른 측면에서 평가 문항을 고안할 필요가 있다. 앞 장에서 논한 CAS의 활용이 수학 교수·학습에 미치는 영향, 특히 CAS의 활용이 수학 교수·학습을 실험환경으로 바꿀 수 있다는 점과, 절차의 간소화로 인한 대상 및 과정 관점의 이동의 용이성을 증진시킬 수 있다는 점에 착안하여 문항을 구성 제시하고자 한다. 이러한 문항은 어떤 측면에서 Kokol-Voljc가 제시한 재개발된 문항과 같은 성격을 지닌다고 볼 수 있다.

다음과 같은 문항을 생각해보자.

[문제] 다음에 답하여라.

- 1) 다음 다항식들을 인수분해하여라.

$$P_1(x) = x^2 + x - 6$$

$$P_2(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$P_3(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

$$P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 19x^2 + 106x - 120$$

- 2) $P_i(x)$ 의 공통인수를 찾고, $P_i(2)$ 의 값을 구한 후 그들의 관련성을 설명하여라.
 3) 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(\alpha) = 0$ 이면 $P(x)$ 는 $(x - \alpha)$ 로 나누어떨어지는가?
 4) 다항식 $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$ (R 은 상수)에서 $P(\alpha)$ 는 무엇이고 그것은 무엇을 의미하는가?

위와 같은 문제는 현행 교과서가 다항식 $P(x)$ 를

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R \quad (R \text{은 상수})$$

와 같이 제시한 후 $P(\alpha)$ 가 나머지 R 임을 밝히고(나머지정리), 나아가 $P(\alpha) = 0$ 일 때 $P(x)$ 가 $(x - \alpha)$ 로 나누어떨어짐(인수정리)을 언급하는 것과 순서가 반대이다. 교과서에서 제시하는 방법은 다항식 $P(x)$ 를 왜

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R \quad (R \text{은 상수})$$

와 같이 나타내는지에 대한 설명이 없어서, 이것으로부터 나머지정리와 인수정리를 언급한 후에나 이와 같이 나타낸 이유를 알게 된다. 교과서 제시 방식은 다항식 $P(x)$ 를 $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$ (R 은 상수)와 같이 나타낼 수 있다는 것을 쉽게 이해하는 학생에게는 효율적일지 몰라도 그렇지 않은 학생들에게는 다항식이 왜 그러한 모양으로 나타나는지에 대해 궁금증을 자아내게 만들 뿐이다. 따라서 다양한 예를 통해서 다항식이 그와 같이 나타날 수 있음을 이해시키고, 인수 $(x - \alpha)$ 와 $P(\alpha)$ 값의 관련성에 대해 자연스럽게 이해할 수 있도록 하는 것이 바람직하다. 이와 같이 다양한 예를 주어서 관찰하게 하고 그 공통성을 바탕으로 추론하도록 하는 것에서 CAS의 인수분해 기능을 이용하게 되며, 이러한 기능을 사용하는 데는 어려움이 따르지 않는다. 이와 같은 접근 방식은 수학 교수·학습을 실험 환경으로 만들며, 학생들이 수학적 원리나 개념 또는 법칙을 자연스럽게 추론하고 이해하도록 돕는다.

또 다른 문항으로 다음과 같은 문항을 생각해보자.

[문제] 다음에 답하여라.

- 1) 원기둥 모양의 캔이 10L를 담을 수 있을 때, 이런 캔을 제작하기 위한 금속의 비용을 최소화할 수 있는 캔의 규격을 찾아라.
- 2) 원뿔 모양의 종이 잔에 30cm^3 의 물을 담을 수 있을 때, 종이가 최소가 되도록 규격을 정하여라.
- 3) 점 (1,5)로부터 가장 가까운 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점을 찾아라.
- 4) 위 세 문제를 해결하기 위해 공통으로 나타나는 문제 풀이 단계에 대해 설명하여라.

위 [문제]를 해결하는 데는 함수의 미분과 방정식의 풀이가 수반되고, 이러한 풀이과정이 일반적으로 길기 때문에 부분적으로 CAS를 활용할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 보다 더 중요한 것은 문제 해결 단계를 생각하고 수행해나가야 한다는 점이다. 앞 세 문제는 모양은 달라도 최적화 과정을 요구하는 것으로, 이와 같은 최적화 문제는 통상 주어진 문제에서 필요한 함수 y 를 정의하고, 이를 미분한 다음 도함수 y' 가 0이 되는 값 x_0 를 구하고, 마지막으로 정의한 함수에 x_0 를 대입하는 과정이 따르게 된다. 위 문제에서 4)를 물어보는 것은 각각의 문제를 해결하기 위해 기다란 풀이과정을 수행하는 것도 중요하지만 이러한 문제를 해결하는 데 있어서 위와 같은 네 가지 단계의 과정이 수반됨을 이해하고 기억하게 하는 것이 중요하기 때문이다. CAS를 활용하게 되면 학생은 손으로 각각의 절차를 수행하지 않고 CAS를 활용하여 조작하게 되므로 각각의 절차를 수행하는 데서 올 수 있는 혼란이나 실수를 피할 수 있으며, 중간의 지나간 대수적 조작을 간편하게 하여 전체적인 과정을 보다 잘 인식하게 된다. 즉, 절차적인 계산의 수행에 집중함으로써 전체적인 과정을 채 보지도 못하는, 이를테면 “나무는 보고 숲을 보지 못하는” 우를 범하지 않게 되는 것이다. 따라서 최적화라는 과정을 과정 이해에서 대상 이해로 보다 쉽게 내면화할 수 있게 되며 Schema를 보다 쉽게 확립하도록 돕는다.

IV. 논의 및 제언

지금까지 CAS가 수학 교수학습에 미친 영향, 그리고 CAS를 활용하여 문항을 어떻게 분류할 수 있는지 알아보고 몇 가지 대안적 문항을 제시하였다. CAS를 활용한 평가 문항을 고찰하는 데 있어 문항의 분류는 완벽할 수 없다. 비교적 많이 인용되는 Kutzler의 문항 분류도 CAS의 기능을 어느 정도까지 사용해야 고급기능을 사용하는 것이라고 볼 수 있는지도 연구자에 따라 다를 수 있고, CAS의 종류에 따라 달라질 수 있다. 특히 CAS의 환경이 스프레드시트와 그래픽 기능을 포함하여 발전하고 있는 시점에서 보면 시대에 따라 달라질 수 있다. 그러나 어느 소프트웨어나 간단히 사용할 수 있는 기능이 있는 반면 좀 더 지식을 요하는 기능이 있다는 점에서 원론적 측면에서 분류의 기준이 될 수 있다고 생각된다.

CAS를 활용한 평가 문항의 분류는 몇 가지 다른 관점에서도 논의될 수 있을 것이다. 예를 들면 현행 교과서에 나타난 대수 관련 또는 통계 관련 영역에서 문항은 CAS의 활용을 가정했을 때 어떻게

분류될 수 있으며, 향후 CAS를 도입했을 때 바람직한 변화 방향이 무엇인지도 좀 더 심도 있게 논의될 수 있을 것이다. 한편 CAS 이외의 다른 공학적 도구가 함께 수학 교실에 들어왔을 때 CAS의 활용 방안의 변화는 어떻게 되는지도 탐구 대상이 될 수 있다.

앞서 제시한 두 유형의 문제는 현행 수학 교수학습을 보다 학생 중심의 탐구 활동을 활발히 하고, 수학의 발견적 측면을 중요시할 수 있다는 점에서, 그리고 수학을 응용할 때 파생되는 복잡한 계산과정을 단축하고 일관되게 흐르는 전체의 맥락을 파악할 수 있게 한다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있다.

현재의 수학 교수·학습이 기존의 완성된 수학을 이해하고 복습하는 것에 초점을 주로 맞추고 있다고 한다면, CAS를 활용한 적절한 평가 문항의 구성은 학생이 수학적 법칙과 원리를 발견할 수 있도록 도울 수 있다. 이와 같이 구성된 실험 환경에서 학생은 수학자와 유사한 활동을 통하여 수학을 발견해나가는 흥미를 느낄 수 있는 기회를 가질 수 있다. 그리고 CAS의 활용은 절차적 계산 때문에 문제 해결에 실패함으로써 누적되는 수학 학습에서의 부정적 경험을 막고, 전체적인 문제 해결 방향을 모색하고 이를 기억하는데 도움을 줌으로써 수학의 응용 능력을 신장시킬 수 있고, 나아가 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 도울 수 있다.

참고문헌

- 고상숙, 박만구, 한혜숙, 홍예윤, 유기종, 이순용, 주홍연, 이창연, 채은숙, 이강숙(2013). **교구 및 공학 도구를 활용한 평가 기반 조성**. 한국과학창의재단 2013-6.
- 교육부(1997). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제1997-15호. 교육부.
- 교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2007-79호. 교육인적자원부.
- 교육인적자원부, 경상남도 교육청(2009). **세계 각국의 교육과정. 교육통계 분석 자료집** (2010).
- 김미화 & 손홍찬(2013) 교육과정에 따른 중등 수학과 교과서에서의 공학 도구 활용의 변화 분석, **학 교수학**, 15(4), 975-994.
- Asiala, Mark; Anne Browen; david J. DeVries; Ed Dubinsky; David Mathews & Karen Thomas.(1991). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In James Kaput; Alan H. Schoenfeld & Ed Dubinsky(Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education*(pp. 1-32). Providence, R. I.: american Mathematical Society.
- Freudenthal, H.(1979). *Mathematik als padgogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett Stuienbucher.
- Goldenberg, E. P.(2003). Algebra and Computer Algebra, In Fey. J.T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp. 73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Heid, M. Kathleen(1988). *Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the*

- Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education* 19(pp.3-25).
- _____.(1992). *Final Report: Computer-Intensive Curriculum for Secondary School Algebra*. Final report for NSF project number MDR 8751499. University Park, Pa.: Pennsylvania State University, Department of Curriculum and Instruction.
- _____.(2003). Theories for Thinking about the Use of CAS in Teaching and Learning Mathematics, In Fey, J.T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp. 73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Heid, M. Kathleen; Charlene Sheets, Mary Ann Matras & James Menasian(1988). Classroom and Computer Lab Interaction in a Computer-Intensive Algebra Curriculum. Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, New Orleans, La., April.
- Heugl, H; Klinger, W & Lechner, J.(1996). *Mathematikunterricht mit computeralgebra-System (Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt)*. Bonn:Addison-Wesley Publishing Co.
- Jones, P. & McCrae, B.(1996). Assessing the impact of graphics calculators on mathematics examinations. In P. Clarkson(Ed.), *Technology in Mathematics Education: Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Educational Research Group of Australasia*(pp. 306-313). Melbourne: MERGA.
- Kilpatrick, Jeremy. & Davis, Robert. B.(1993). Computers and Curriculum Change in Mathematics. In Keitel, C & Ruthven, K.(Eds), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*(pp. 203-221), Berlin: Springer-Verlag.
- Kokol-Voljc, V.(2000). Exam Questions When Using CAS for School Mathematics Teaching. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(1), 63-75
- Kutzler, Bernhard(2003). CAS as Pedagogical Tools for Teaching and Learning Mathematics, In Fey, J.T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp. 73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- MacAogain, E.(2000). Assessment in the CAS age:An Irish perspective. Paper presented at th 6th ACDCA Summer Academy, 2000.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 구광조·오병승·류희찬(역) (1992). *수학교육과정과 평가의 새로운 방향*. 서울: 경문사.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙(역). *학교수학을 위한 원리와 기준*. 서울: 경문사.

- Oosterum, M. A. M. Boers-Van.(1990). Understanding of Variables and Their Uses Acquired by Students in Traditional and Computer-Intensive Algebra. Doctoral dissertation, University of Maryland.
- Palmiter, Jeanette R.(1991). Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education* 22(pp. 151-156).
- Pea, Roy D.(1985) Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Psychologist* 20(4). (pp. 167-182).
- _____.(1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. In Alan Schoenfeld(Eds), *Cognitive Science and Mathematics Education*, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Son, H.(2015). Use of Technology in Secondary Mathematics Education in Korea. In Kim, J., Han, I., Park, M., & Lee, J.(Eds), *Mathematics Education in Korea*. World Scientific. New Jersey.

A Study on Mathematics Assessment using CAS

Abstract

Son, Hong Chan³⁾

The purpose of this study is to investigate the meaning of CAS(Computer Algebra System) using in mathematics teaching and learning, and the change of the theory of mathematics teaching and learning caused by introduction of CAS. Especially, when CAS was introduced, some categories of assessment items were examined, and alternative assessment directions were presented and the implications of them were discussed.

keyword : mathematics assessment, CAS, classification

Received February 28, 2019

Revised March 24, 2019

Accepted March 25, 2019

* 2010 Mathematics Subject Classification: 97U70

3) Chonbuk National University (hcsn@jbnu.ac.kr)