East Asian Math. J.
Vol. 35 (2019), No. 2, pp. 239-257
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2019.021

위상에 대한 교수학적 접근
-수렴성과 연속성을 중심으로-

Didactical Approach on Topology
-Centered on convergence and continuity-

김 진 환[1)]

Abstract. The purpose of this study is to show that the topology is closely related to some subjects learned in school mathematics and then to give motivations for learning of the topology. To do this, it is showed that the topology is an abstracted device that deal with structure of limit and continuity introduced in school mathematics. This study took a literature study. The results of this study are as follows. First, the formal definition of general topology to structure open sets was examined. The nearness relation together with the closure operation was introduced and used to characterize for construction of general topology. Second, as definitions for continuity of function, we considered the intuitive definition, definition, structured definitions using open intervals and definition using open sets and then we investigated their roles. We also examined equivalent definition using the nearness relation which is helpful to understand continuity of function. Third, the sequence and its limit are treated in terms of continuous functions having the set of natural numbers and its extended set as domains. From these, it can be concluded that the convergence of sequence and the continuity of function are identified as functions that preserve the nearness relation and that the topology is a specialized tool for dealing with convergence and continuity.

Received February 7, 2019; Accepted February 26, 2019.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D40, 97D70
Key words: didactical approach, topology, convergence, continuity(intuitive definition, formal definition), nearness relation.

1) Corresponding author.

Ⅰ. 서론

위상수학은 20세기 중반이 되어서 수학의 중요한 한 분야로 정립되었다. 오늘날 현대 수학의 가장 활발한 수학 영역들 중 하나이며 위상적인 개념은 기하학, 해석학, 대수학과 더불어 수학의 주요한 기본 분과가 되어 고유 영역을 가지게 되었다. 현대 수학의 거의 모든 영역들에 사용되며 수학의 다른 분야와도 강한 연계를 갖고 있어 위상수학은 가치를 지닌 교과임을 알 수 있다. 그럼에도 '위상수학은 무엇이며 위상의 개념을 왜 학습하는가? 학교수학과 어떤 연계성을 가지고 있는가?'의 질문에 대학에서 위상수학을 학습한 바 있는 예비교사나 교사들 중 상당수가 선뜻 답하지 못하였다. 다시 말해 위상수학의 교수학습 내용이 학교수학의 어떤 내용과 깊은 연계성을 가지고 있는지, 위상교과목의 특성을 이해하지 못하고 있다고 할 수 있다.

수학은 구체적인 것에서 추상적이고 형식적인 수학으로 발달되고, 직관적인 것에서 논리적이고 엄밀한 것으로 발전되어가면서 직관과 현실에서 멀어진다. 수학의 개념들이 점진적인 논리화, 형식화, 추상화되는 과정이 가지는 의미를 소홀히 하고 기성의 수학을 배우는 것이 수학 자체로 인식되는 경향(우정호, 2008)이 위상수학에서도 일어나고 있다고 보여 진다. 수학의 점진화가 일어난 과정의 진정한 수학적 사고 및 의미를 상실하고 의미 없이 어려워진 수학을 학습하면서 왜 이런 것을 하는지, 어디에 사용할 것인지에 대한 의문에 설득력 있는 답변을 하는데 소홀히 하기도 한다. 이러한 현상은 학교수학과 대학에서 배우는 학문수학 간의 단절에서 찾아볼 수 있다. Klein은 이중 단절의 용어를 사용하여 학교수학과 학문수학의 단절을 설명한 바 있다(우정호, 2010). 위상수학은 학교수학과 연계성이 없고 Klein이 주창한 이중 단절된 교과의 전형처럼 말하는 교사도 있었다. 이처럼 학교수학에 연계된 위상수학에 대한 학습동기가 약하다는 인식은 본 연구를 하게 된 계기를 주었다.

이에 따라 본 연구는 학교수학의 어떤 내용에 위상의 개념이 작동되고 있는지 혹은 학교수학의 어떤 내용이 위상의 개념을 생각하게 하는지 및 학교수학의 개념이 위상의 개념으로 어떻게 발전되어 가는지의 문제 인식과 해결이 예비교사나 교사들에게 위상수학의 학습에 대한 동기나 교과 이해에 도움을 줄 수 있는 것이라 기대하며 위상에 대한 교수학적 접근을 모색하는 데 있다. 위상의 교수학적 접근은 위상수학에서 학교수학이 가지는 수학적 지식의 본질을 기반으로 하여 위상수학에 내포된 수학적 지식을 드러내는 교수학습의 방법을 탐구한다는 것을 의미한다.

한편, '위상수학은 무엇인가'에 일부 예비교사들이 위상적인 성질을 공부하는

과목이라고 하였으며 위상적인 불변량에 대한 언급은 없었다. 학교수학의 시각에서는 거리감이 있어 보이나 범주론이나 Klein의 Erlangen 프로그램의 시각에서 위상수학의 특성을 보면 위상수학의 범주에는 위상동형의 관계와 위상동형의 함수가 있고 위상동형 함수는 원초적으로 함수의 연속성 개념에 의존하고 있다. 이것으로부터 학교수학에서 위상의 개념이 작용되거나 개념 출현의 동기가 되는 교과 내용은 극한과 연속과 관련되어 있음을 예견할 수 있다.

2009개정 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서 <미적분 I>을 통해 수열의 극한, 함수의 극한 및 연속에 관한 내용을 도입하고 있으며 2015개정 교육과정(교육부, 2015)에서는 <수학 II>에서 함수의 극한과 연속을 도입하고, 수열의 극한은 <미적분학>의 내용으로 옮겨서 다루고 있어 수열의 극한과 급수를 함수의 극한 이후에 도입하고 있다. 학교수학에서는 ‘한없이 가까워진다.’는 위치관계의 동적 상황을 직관적으로 이해하는 수준에서 정의와 성질을 다루도록 하고 있다. 함수의 극한과 연속이나 수열의 극한은 한없이 가까워지거나 한없이 작아지거나 커지는 현상과 같은 무한을 수학적으로 다루는 도구임을 지적하고 있다. 특히 기호표현을 강조하면서 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$과 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 을 도입시켰다.

직관을 중시하는 학교수학의 입장에서는 끝없이 진행되는 동적인 과정에 기반을 두고 있으며 엄밀함이 강조된 대학수학과 같은 학문적 수학으로 넘어오면서 완결한 값(극한)을 인정하고 이 값을 중심으로 한 엄밀한 정의와 형식화된 정의를 도입시키고 있다. 이처럼 직관에서 엄밀함으로 옮겨지면서 ‘동적 접근성’이 ‘정적 근접성’으로 변모하였다. Cantor는 1872년의 논문에서 삼각함수의 급수를 가지고 주어진 함수를 확장하는 것과 근사하는 것을 연구하는 동안 이들 함수를 실직선으로 제한하더라도 거리의 개념을 사용하지 않는 정의들과 개념들이 필요하였다. 이에 처음으로 거리가 없는 근접성에 관하여 생각하게 되었다(Scoville, 2018). 이를 시점으로 근방의 개념, 극한점, 도집합, 폐포, 경계, 닫힌집합, 열린집합 등의 여러 위상의 개념을 도입시키고 19세기와 20세기로 넘어오면서 일반위상(점-집합 위상)의 개념과 일반위상수학의 출현을 촉진시켰다(Moore, 2008; O’Connor & Robertson, 1996). 일반위상에서 다루어지는 기본적인 구성 성분들은 근접성과 밀접한 관계를 맺고 있음을 주지하고 본 연구는 위상과 위상수학은 근접성의 문제를 다루는 도구이고 교과임을 명시화한다. 이를 위해 근접 관계의 도입과 이것에 의한 특성화 문제를 다루어 보고 위상구조의 본유가 극한과 함수의 연속성을 다루는 도구임을 보이도록 한다.

Ⅱ. 연구방법

본 연구는 교수학적 분석의 방법론을 취하여 학교수학과 위상수학의 연결을 수렴성과 연속성에서 찾고자 하였다. 이들 특정 주제에 대한 교수-학습의 방법을 조직하는 데 유용한 시사를 얻고자 이 주제의 본질을 여러 측면에서 분석하고자 하였다(우정호 외, 2006). 주로 문헌분석 연구의 형태로 이루어졌다.

교육과정에 관련된(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015; 김남희 외, 2017). 대학의 미적분학(Harcharras & Mitrea, 2007; Foerster, 2010; Stewart, 2016), 해석학(Bartle & Sherbert, 2011) 및 위상수학(Hocking & Young, 1961; Lipschutz, 2012; Munkres, 1975)등의 여러 교재들과 선행 연구들이 분석에 활용되는 중요한 문헌들이다. 위상수학의 수학사적 자료(Moore, 2008; O'Connor & Robertson, 1996) 및 Wikipedia의 인터넷 자료와 Quora의 묻고 답하기에서 제시된 다양한 의견들이 본 연구자의 이해와 결합하여 위상과 위상교과에 대한 이해를 높이는 교수학적 분석을 하는 데 참고로 활용하였다.[2] 본 연구를 하게 된 계기에는 2016년과 2018년의 여름학기에서 교육대학원생들을 대상으로 실시한 '위상교과로부터 무엇을 배웠으며 학교수학과는 어떤 관계가 있는지'에 대한 설문이 작용하였다. 위상이 무엇인지의 특성을 극한과 연속을 다루는 도구임에 주목하고 이를 명료화하기 위하여 다음의 세 가지 연구문제를 설정하고 이들을 분석하고 논의한다.

[1] 추상화된 일반위상의 특성화에 어떤 개념이 활용되고 있는가?
[2] 실직선 R에서 연속의 직관적인 정의, 엄밀하고 형식화된 정의들은 어떤 역할을 하는가? 위상을 특성화하는 도구인 근접관계는 연속성을 어떻게 명시화하는가?
[3] 함수로서 수열과 수렴은 연속 함수로써 다루어지는가?

관점 [1]의 분석과 논의는 'Ⅲ. 위상공간의 특성화와 근접관계'에서, 관점 [2]의 분석과 논의는 'Ⅳ. 연속 개념에 대한 교수학적 분석'에서, 관점 [3]의 분석과 논의는 'Ⅴ. 연속함수로서의 수열과 그 극한'에서 다룬다.

Ⅲ. 위상공간의 특성화와 근접관계

대학교 학부과정에서 다루어지는 위상공간의 개념들은 실직선과 유클리드공간

---

2) https://en.wikipedia.org/wiki/Topology
https://www-Quora.com, topology

의 연구와 연속함수의 연구로부터 성장하였다(Munkres, 1975). 일반위상공간은 점들 간의 거리를 재는 척도인 거리함수를 가진 거리공간의 일반화이다. 기하적인 표상으로 수직선을 가지는 실수의 집합 R에서 $d(x,y)=|x-y|$로 절댓값에 의해 정의된 거리 d에 의해 근접함이 논의되고 이러한 논의에는 거리 d로부터 얻어지는 열린구간들이 중요한 역할을 한다. R에서의 위상은 거리 d에 의해 생성되는 거리위상이 되면서, 열린구간을 통상의 순서관계에 의해 구성되는 것으로 본다면 순서 위상이기도 하다. 여기서 형성되는 열린구간들의 합집합으로 표현되는 것을 열린집합이라 하고 이런 집합을 모두 모은 집합족을 $\mathscr{U}$로 나타내고 보통위상이라 한다. 이 위상에서는 열린구간뿐 아니라 열린집합이 거리를 대신하여 근접에 대한 척도의 역할을 하도록 한다. 이에 따라 거리를 대신하는 열린집합의 개념에 초점을 맞추며 열린집합의 구조를 어떻게 정의할 것인가가 중요하며 이를 위하여 최소의 공리로 구성된 위상이 도입된다. 보통위상 $\mathscr{U}$에서 ① $\mathscr{U}$에 포함된 유한개의 (열린)집합의 교집합이 다시 $\mathscr{U}$에 포함되고, ② $\mathscr{U}$에 포함된 임의개의 집합의 합집합이 다시 $\mathscr{U}$에 포함되며, ③ 공집합 $\varnothing$와 전체 집합 R가 $\mathscr{U}$에 포함된다. 이들 3가지 성질은 $\mathscr{U}$가 성질들의 일부로 일반위상으로 발전시켜가는데 필요한 최소의 공리적 성질들로 선택되었다. 이 같은 한정된 공리들로 열린집합의 구조를 주는 일반위상의 개념을 도입한다. 여기서 공리의 수를 최소화함으로써 근접함을 다룰 수 있는 대상들을 늘리는 전형적인 추상화가 일어난다. 수학에서 추상화와 일반화는 수학을 발전시켜가는 하나의 방식이다.

점-집합 X에서 일반위상(general topology, point-set topology)은 다음의 세 공리 $O1$, $O2$, $O3$을 만족하는 X의 부분집합들로 구성된 집합족 $\mathscr{T}$이다. 이 $\mathscr{T}$에 속하는 집합을 열린집합이라 하고 위상 $\mathscr{T}$을 가진 집합을 쌍 $(X,\mathscr{T})$으로 나타내고 위상공간이라 하며 이 위상공간을 간단히 X로 나타내기도 한다.

($O1$) 유한개의 열린집합의 교집합이 열린집합이다.
($O2$) 임의개의 열린집합의 합집합이 열린집합이다.
($O3$) 공집합 $\varnothing$와 전체 집합 X가 열린집합이다.

공리 $O1$, $O2$로부터 공집합과 전체 집합 X가 열린집합이라는 공리 $O3$이 유도될 수 있으나 일반적으로 공집합과 전체 집합이 열린집합임을 공리로 사용하는 경향이다. 이같이 열린집합에 기초하여 위상공간을 정의하는 데엔 Bourbaki학파가 공헌하였다. 일반위상은 점열의 수렴성과 함수의 연속성, 연결성 및 컴팩트성을 다루기 위해 필요한 최소 개의 공리들로 구성된 구조를 가지고 매우 단순하게 추상화된 개념이다. 일반위상에서 열린집합의 구조를 다루는 직관적인 개념은 존재하지 않는다. 실직선 R에서 열린구간들의 합집합으로 표현되는 모든 집

합을 모은 집합족인 보통위상(usual topology) $\mathscr{U}$을 겸비한 보통위상공간 $(R,\mathscr{U})$은 일반위상의 사례이다. 집합 X에서 일반위상 $\mathscr{T}$는 $\mathscr{U}$와 세 가지 정의적 공리 $O1$, $O2$, $O3$를 공통적으로 가지긴 하나 보통위상 $\mathscr{U}$가 가지는 많은 성질들을 가지지 않는다. 이들의 성질을 하나씩 공리적으로 규정하면서 보통위상공간 $(R,\mathscr{U})$을 포함한 유클리드 공간에 대한 통찰을 새롭게 할 수 있다. 지금처럼 유클리드 공간에서 거리공간으로 그리고 일반 위상공간으로 표준화된 위상공간의 정의들이 고유한 형태로 정착하기까지는 꽤 오래 걸렸으며 19세기말에서 20세기 초기의 여러 수학자들이 공헌하였다(Atanasov, 2010).

실직선에서 다루어지는 극한점, 폐포, 수열의 수렴성 및 함수의 연속성 등의 개념들은 열린구간들에 의해 다루어지다가 열린구간들의 합집합인 열린집합을 사용함으로써 다루게 되었고 열린집합을 활용하면서 이들의 개념들은 일반위상의 개념으로 자리매김할 수 있었다(Munkres, 1975). 보통위상공간 R에서 다루어진 열린집합에 포함된 어떤 점에서든 이 집합 내에서 벗어나지 않는 조그마한 움직임을 할 수 있고 이에 자신의 경계를 전혀 포함하고 있지 않다. 자신의 경계를 포함하지 않는 열린집합은 위상의 구조를 다루는 가장 기본적으로 활용되는 개념으로 열린집합의 특성을 이해하는 것이 위상에 딸린 여러 개념을 다루어가는 첫 단계라 할 수 있다. 위상공간 X에서 점 p의 열린 근방은 p를 포함하는 열린집합을 의미한다. 보통 위상공간 $(R,\mathscr{U})$에서는 p를 중심으로 하는 열린구간 $(p-\epsilon, p+\epsilon)$을 p의 $\epsilon-$근방이라 한다. p의 모든 열린 근방에는 적절한 p의 $\epsilon-$근방인 열린구간이 내재하고 있다.

위상공간 X에서 어떤 부분집합 A의 폐포 $\overline{A}$에 점 p가 포함되기 위해선 p의 모든 열린 근방이 집합 A의 점을 가지고 있는 경우로 규정하고, A의 폐포는 A에 '가까이 있는(근접한)' 모든 점들의 집합이라 할 수 있다. 특히 부분집합 A, B에 대하여, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $A\subset\overline{A}$, $\overline{\varnothing}=\varnothing$ 이고 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$가 성립한다.

Kuratowski는 집합 X의 멱집합 $\mathscr{P}(X)$에서 멱집합 $\mathscr{P}(X)$으로의 함수 κ가 다음의 4가지의 성질을 만족할 때 κ을 X의 폐포연산자라 하였다(Lipschutz, 2012).

$(K1)$ $A, B\in\mathscr{P}(X)$에 대하여, $\kappa(A\cup B)=\kappa(A)\cup\kappa(B)$

$(K2)$ $A\in\mathscr{P}(X)$에 대하여, $A\subset\kappa(A)$

$(K3)$ $\kappa(\varnothing)=\varnothing$

$(K4)$ $A\in\mathscr{P}(X)$에 대하여, $\kappa(\kappa(A))=\kappa(A)$.

이 폐포연산자는 열린집합을 구조화하여 위상을 정의하는 하나의 장치이다. 폐포연산자 κ를 가지는 집합은 κ로부터 하나의 위상이 구성되어 위상공간이 된다. 여기서 폐포연산자 κ에 의해 구성되는 위상 $\mathscr{T}$는 $\{G\mid\kappa(X-G)=X-G\}$ 로 주어

진다. 이 위상공간에서 부분집합 A의 폐포 $\overline{A}$와 폐포연산자에 의해 주어지는 $\kappa(A)$는 일치한다. 또한 $\mathfrak{T}$를 X위의 모든 위상들을 모은 집합족이라 하고 $\mathfrak{K}$를 X위의 모든 폐포연산자의 모임을 나타내면 이들 간에 자연스런 일대일 대응관계에 있다. 폐포는 위상을 구성하고 위상의 본질을 이해하게 하는 개념이라 할 수 있다(Lipschutz, 2012).

위상공간에서 $p \in \overline{A}$, 즉 임의의 p의 열린 근방 U에 대하여, $U \cap A \neq \varnothing$ 일 경우에 점 p가 집합 A에 임의적으로 가깝다(p is arbitrarily close to A)라고 한다(Lipschutz, 2012).

보통위상공간 R에서 다음이 성립한다.

$p \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \delta > 0,\ (p-\delta, p+\delta) \cap A \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow$ 임의의 p의 열린 근방 U에 대하여, $U \cap A \neq \varnothing$

이것은 $p \in \overline{A}$가 점 p와 집합 A점과의 거리 $d(p, A) = \inf\{|p-a| : a \in A\} = 0$ 임과 동치이며, A의 점 중에 p에 '원하는 만큼 가까이 있는' 점이 있음을 함의한다.

이로부터 근접성(nearness, closeness)을 다루는 데 사용될 수 있는 개념으로 폐포가 될 수 있음을 짐작할 수 있다. 폐포의 개념을 가지고 근접관계의 개념을 도입함으로 근접성을 보다 명시적으로 다룰 수 있다. 이제 근접관계를 공리적으로 도입시키고 위상구조와의 관계를 고려한다.

위상공간 X에서 멱집합 $\mathscr{P}(X)$로의 관계 ν을 다음과 같이 정의한다: 점 p와 부분집합 A에 대하여, $p\nu A \Leftrightarrow p \in \overline{A}$이다. 관계 ν는 다음의 성질을 만족한다.

($N1$) $x\nu(A \cup B)$ 이면 $x\nu A$ 혹은 $x\nu B$

($N2$) $x \in A$ 이면 $x\nu A$

($N3$) $p\nu A$ 이면 $A \neq \varnothing$

($N4$) $x\nu A$ 이고 $\forall a \in A,\ a\nu B$ 이면 $x\nu B$.

이들 성질들은 집합상의 근접 관계를 공리적으로 개념화하는 데 활용된다. 집합 X에서 멱집합 $\mathscr{P}(X)$로의 관계 ν가 공리로 ($N1$)~($N4$)을 만족하는 경우에 이 관계를 집합 X에서 근접관계(nearness relation)라 한다(Cameron, Hocking & Naimpally, 1974; Gauld, 1977). $p\nu A$인 경우, '점 p가 집합 A에 근접한다(p is near A)'고 한다.

집합 X에서 근접관계와 폐포연산자는 서로를 특성화한다. 구체적으로 말하면 $\mathfrak{N}$을 집합 X에서 모든 근접관계를 모은 집합이라 하고 $\mathfrak{K}$를 집합 X에서 모든 폐포연산자의 집합이라 하면 이들은 일대일 대응관계에 있다. $\mathfrak{N}$와 $\mathfrak{K}$간의 대응 관계는 $\nu \in \mathfrak{N}$인 경우 $\kappa(A) = \{x | x\nu A\}$ 로 두면 κ는 폐포연산자의 공리 ($K1$)~($K4$)

를 만족한다. $\kappa \in \mathfrak{K}$인 경우, $p\nu A \Leftrightarrow p \in \kappa(A)$로 정의하면 ν는 근접관계가 되어 $\nu \in \mathfrak{N}$이다. 따라서 $\mathfrak{N}$는 $\mathfrak{T}$와도 일대일 대응관계에 있다. 집합 X에서 위상이 폐포연산자에 의해 특성화되고 폐포연산자는 근접관계에 의해 특성화되므로, 집합 X에서 위상이 주어지면 자연스레 근접관계가 정해지고 집합 X에서 근접관계가 주어지면 위상을 정하면서 열린 집합의 구조를 결정한다. 집합 X가 위상을 가진다고 하거나 위상화될 수 있다는 것은 X내에서 점 p가 모든 부분집합 A에 대해, p가 A에 근접하는가를 답할 수 있는 경우에 해당된다(Hocking & Young, 1961). 궁극적으로 $\mathfrak{T}$와 $\mathfrak{N}$는 자연스럽게 대응관계를 이루며, 위상은 근접관계를 다루는 하나의 도구가 되고 근접관계는 위상의 구조적 본질을 이해하는 방법이 됨을 시사한다.

수직선이나 평면 등의 유클리드 공간에서 서로 다른 두 점에 대해 이 두 점간의 거리가 항상 0보다 커서 두 점은 서로 떨어져 있고 직관적인 관념으로도 R에서 서로 다른 두 점은 근접하지 않음을 알 수 있다. 일반적으로 근접관계를 논하기 위해선 점과 집합이나 나아가 집합과 집합간의 관계에서 보아야 할 것이다(Cameron, Hocking & Naimpally, 1974).

학교수학이나 미적분학 및 해석학에서 기본 전제로 사용되는 위상공간은 보통위상공간 R이다. 여기서 주어진 근접관계 $x\,\nu\,A$ 즉, x가 A에 근접한다는 A의 폐포 $\overline{A}$에 대한 의해 논의되므로 $x\,\nu A \Leftrightarrow \forall\,\delta > 0,\ (x-\delta, x+\delta) \cap A \neq \varnothing$이다.

따라서 $0\,\nu\,(0,1)$, $0\nu\left\{\frac{1}{n} | n \in N\right\}$, $1\,\nu\,\{0.9, 0.99, 0.999, \cdots\}$ 임을 볼 수 있고, $x\,\nu\,A$는 x의 어떠한 근방에도 A의 원소가 들어 있음을 나타내는 정적인 개념이다. 보통위상공간 R에서 이처럼 열린구간에 의하여 근접관계를 말할 수 있으며 이처럼 열린구간으로 근접관계를 설명할 수 있는 R위의 위상은 보통위상뿐이다. 대학의 미적분학에서 열린구간으로 논의되는 개념들의 배경에는 보통위상이 있다고 단정하여도 좋을 듯하다.

Ⅳ. 연속 개념에 대한 교수학적 분석

연속의 개념은 두 가지의 관점으로 나누어 볼 수 있다. 한 점에서의 연속성을 보는 국소적 개념과 정의역 전체에서 연속인가, 즉 연속함수인가를 보는 대역적 관점이 있다. 연속함수는 정의역의 각 점에서 연속인 경우로 정의한다. 연속함수가 되는 것과 대표적인 동치조건은 공역의 임의의 열린집합에 대하여 그 역상이 정의역에서 열린집합이 되는 것이다. 이 연구에서는 국소적 연속성에 치중하여 다룬다.

1. 정의역이 실수 전체 집합인 실함수의 국소적 연속성

정의역이 실수 전체의 집합 R을 가진 함수 $f: R \rightarrow R$에 대해 한 점에서의 연속성에 대해 살펴본다. 아래의 <표 1>은 동치인 점에서의 연속성 정의들을 정리한 것들이다.

<표 1> "함수 $f: R \rightarrow R$이 a에서 연속"에 대한 국소적 정의

정의	함수 $f: R \rightarrow R$ 이 a에서 연속	특징
①	x가 a에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$가 $f(a)$에 한없이 가까이 간다. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 로 표현.	직관적 정의로 학교수학이나 대학의 미적분학의 기초정의로 도입
②	임의의 양의 실수 $\epsilon > 0$에 대하여 "$a-\delta < x < a+\delta$ 이면 $f(a)-\epsilon < f(x) < f(a)+\epsilon$ "을 만족하는 적당한 양의 실수 $\delta > 0$가 존재.	대학의 미적분학부터 엄밀함을 강조한 정의, 거리공간에서의 연속성 개념으로 발전
③	$f(a)$를 중심으로 하는 임의의 열린구간 B에 대하여 a를 중심으로 하는 적당한 열린구간 E가 있어 $f(E) \subset B$를 만족.	
④	$f(a)$를 포함한 임의의 열린구간 G에 대하여, $f(I) \subset G$를 만족하는 a를 포함한 적당한 열린구간 I가 존재.	거리공간에서의 연속성개념으로 발전
⑤	$f(a)$를 포함한 임의의 열린집합 V에 대하여 $f(U) \subset V$을 만족하는 a를 포함한 열린집합 U가 존재.	일반위상공간에서의 연속성 개념으로 발전

함수 $f: R \rightarrow R$가 $a \in R$에서 연속이란 정의는 크게 3개의 부류로 나눌 수 있다. 첫째, 직관적인 정의 ①이다. 둘째, 엄밀함을 보장하기 위한 $\epsilon-\delta$정의 ②와 이를 열린구간으로 변형한 정의 ③, ④이다. ③은 a와 $f(a)$를 중심으로 한 구간을 사용한 정의이고 ④는 a와 $f(a)$를 포함하는 구간으로 바꾼 정의이다. 셋째, 열린집합을 사용한 정의 ⑤이다. 열린집합은 열린구간들의 합집합으로 나타낼 수 있는 집합이다.

정의 ①은 학교수학에서 다루어지는 한 점에서의 연속개념으로 직관에 의존한 정의이다. Cauchy에 의한 '극한 과정(limit processing)에 기초한 정의' 라고도 할 수 있다. 기호 표현 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 에는 어떤 값을 향해 끝없이 진행되는 동적인 과정으로 완결한 값으로의 접근가능성을 나타내며 그 완결한 값이 극한으로 함숫값과 같음을 함의한다. $\lim_{x \to a} f(x)$ 는 극한을 정하는 수학적 실체의 대상으로 인식하는 것이 포함된다. 학문적 성격의 수학으로 넘어 오면서 다루어지는 엄밀함이 강조된 정의 ②는 'Weierstrass에 의한 정의'라고 할 수 있다. 일반화를 추구하는 정의들 ②~⑤는 집합의 관점에서 완결한 값(극한)을 인정하고 이 값(점)을 중심

으로 정의를 하고 있다. 이에 따라 직관적인 것에서 엄밀한 것으로 그리고 형식적이고 추상적인 것으로 옮겨지면서 동적인 '가까이 간다는 접근성'이 정적인 '가까이 있다는 근접성'으로 변모하였다(박선용, 2018)

대학의 미적분학, 해석학으로 나아가면서 도입된 엄밀함을 추구하는 $\epsilon-\delta$정의를 학교수학에 선뜻 도입하지 못하는 것은 학생들이 $\epsilon-\delta$정의에 의한 연속의 개념 뒤에 실제로 무엇이 숨겨져 있는지 분명하게 알지 못하기 때문이다. 학생들은 연속성에 순서관계, 절대치 등이 엉켜있다고 보며 이에 따라 학교수학에서 대학의 미적분학이나 해석학의 정의로의 전이를 어렵게 만든다(Cameron, Hocking, & Naimpally, 1974).

정의 ③, ④는 $\epsilon-\delta$정의에서 양의 실수, 절대치에 의한 거리, 순서(부등호)관계와 연루된 정의인 열린구간-열린구간의 정의로 번역된 것으로 집합의 관점으로 본 정의이다. $\epsilon-\delta$정의를 표상번역한 정의 ③은 중심이 정해진 열린구간은 거리공간에서 중심과 반지름이 주어진 열린 볼의 개념으로 전이시켜 거리공간에서 연속의 유용한 정의로 쓰인다. 정의 ④는 전순서집합이 자연스레 가지는 '순서위상공간들'에서 연속의 개념으로 활용되게 전이시킬 수 있는 정의이다. 정의 ③과 ④는 일반위상공간에서는 유효한 정의가 되지 못한다. 실직선의 보통위상에서 열린집합은 열린구간들의 합집합으로 나타낼 수 있는 집합이다. 함수 f에 대해 합집합의 상은 각 집합의 상의 집합의 합집합과 같다는 함수의 상에 대한 성질에서 정의 ⑤는 열린구간을 활용한 정의들 ③이나 ④로부터 얻어지는 동치의 정의이다. 특히 정의 ⑤는 일반위상공간에서 연속의 개념을 도입하는 길을 열어준다는 점에서 가치가 있다. 열린구간을 사용한 정의 ③과 ④는 열린구간들의 합집합에 의해 열린 집합이 구조화되는 보통위상공간 R에서 정의 ⑤와 동치인 간편한 정의이다. 주지해야 할 점은 열린집합의 역할이 함수의 연속성을 다루는 하나의 수단이라는 것이고 보통위상공간에서는 열린구간들이 함수의 연속성을 다루는 수단이 될 수 있다는 점이다. 열린구간들이 하는 역할은 일반위상에서 기저나 국소기저의 개념으로 규정화되고 일반위상에 대한 기저가 있다면 기저로서 함수의 연속의 개념을 다루어도 충분하다는 것을 시사한다.

2. 실수집합의 부분집합을 정의역으로 가진 실함수의 연속성

함수 $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=\tan x$ 나 $f_4(x)=\ln x$ 등과 같이 정의역을 명시하지 않은 경우에는 정의역을 함수가 정의될 수 있는 최대의 영역으로 본다. 학교수학에서 다루어지는 대다수 함수는 정의역을 명시적으로 드러내고 있지 않고 위의 예시처럼 종속 관계의 식으로 주어진다. f_1의 경우 정의역은

$R-\{1\}$이다. $x=a$에서 $y=f(x)$가 연속이라 함은 여전히 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$로 나타내고 이 기호는 3가지의 의미를 함축적으로 내포한다. ㉠ $x=a$에서 함숫값 $f(a)$가 존재하고 ㉡ $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하며 ㉢ $\lim_{x\to a}f(x)$와 $f(a)$가 일치한다. 여기서 극한 과정 $\lim_{x\to a}f(x)$에는 정의역 내에서 a의 양측에서 자유스럽게 a로 접근할 수 있음을 가정한다. ㉠과 합쳐지면 적당한 실수 b, c $(b<a<c)$가 있어 열린구간 (b,c)가 정의역에 포함되어 있음을 함의한다. 극한 과정(limit processing)을 중시하여 다루어지는 학교수학이나 기초적인 미적분학에서 연속함수는 그 정의역이 하나의 구간이거나 구간들의 합집합인 경우로 제한하고 있음을 볼 수 있다(김진환, 박교식, 2017). 이러한 사실은 다음처럼 미적분의 교재에서도 관찰된다.

"If f is defined near a (in other words, f is defined on an interval containing a, except perhaps a), we say that f is discontinuous at a (or f has a discontinuity at a) if f is not continuous at a." (Stewart, 2016, p. 115)

일반적으로 f의 정의역이 실수 집합 R의 부분집합 D를 정의역으로 가지는 경우 즉, 함수 $f:D\to R$, $D\subset R$, 에 대해 $a\in D$에서 연속에 대한 정의를 살펴보자. 해석학이나 위상수학과 같은 학문 수학에서는 정의역 D은 보통위상공간 R로부터 상대위상이 부여된 부분공간으로서 위상공간이 적용된다. 이들 정의는 다음과 같이 정리될 수 있다(<표 2>).

<표 2> "$D\subset R$이고 함수 $f:D\to R$이 $a\in D$에서 연속"에 대한 국소적 정의

정의	"함수 $f:D\to R$이 a에서 연속"의 정의
②	임의의 양의 실수 $\epsilon>0$에 대하여 적당한 양의 실수 $\delta>0$가 있어 "$a-\delta<x<a+\delta$, $x\in D$ 이면 $f(a)-\epsilon<f(x)<f(a)+\epsilon$"을 만족.
③	$f(a)$를 중심으로 하는 임의의 열린구간B에 대하여 a를 중심으로 하는 적당한 열린구간E가 있어 $f(E\cap D)\subset B$를 만족.
④	$f(a)$를 포함한 임의의 열린구간J에 대하여, $f(I\cap D)\subset J$를 만족하는 a를 포함한 적당한 열린구간I가 존재.
⑤	$f(a)$를 포함한 임의의 열린집합 V에 대하여 $f(U\cap D)\subset V$를 만족하는 a를 포함한 열린집합 U가 존재.

3. 근접관계에 의한 연속의 정의

직관적 정의 ①은 '$x\to a$이면 $f(x)\to f(a)$이다.'로 정의역에서 근접성(가까움)이 공역에서의 근접성으로 진행되는 반면, $\epsilon-\delta$정의 ②와 이를 번역한 정의들 ③,

④, ⑤의 진행의 방향이 정의 ①과 역행한 공역(가령, ϵ-근방이 관련)에서 정의역(δ-근방이 관련)으로 진행되고 있다. 엄밀하고 형식적인 정의에서는 직관적인 정의에 비해 가까움을 가까움으로 보존한다는 연속의 성질이 뚜렷하게 드러나지 않는다. 이를 극복하는 방안으로 근접관계를 이용한 정의가 유용함을 보이고자 한다.

학교수학에서 다루어진 위치에 의한 동적인 개념인 'x가 p에 한없이 가까이 간다.'는 p의 열린 근방 혹은 열린구간의 내로 들어가는 x가 있다는 의미를 가진다. 즉, 'p가 집합 A에 원하는 만큼(임의로) 가까이 있다.'이다. 'x가 p에 한없이 가까이 간다.'는 점 p과 임의의 부분집합 A과의 근접관계 $p\nu A$로 대체한다. 앞 절에서 위상과 근접관계는 서로를 특성지우는 역할을 하고 있음을 다루었고 또한 근접관계는 폐포연산자에 의해 특성화됨을 다루었다. 이에 따라 '점 p가 집합 A에 근접한다.'는 기호 $p\nu A$는 $p\nu A \Leftrightarrow p\in \overline{A}$로 관계지울 수 있었다. 일반위상공간 간에 정의된 함수 $f: X\to Y$가 X의 점 p에서 근접관계를 보존한다는 것을 다음처럼 정의한다.

[정의 ⑥](근접관계보존) 정의역 X의 임의의 부분집합 A에 대하여, $p\nu A$이면 $f(p)\nu f(A)$이다.

이 정의는 함수 f가 점 p에서 연속인 것과 동치임을 밝힐 수 있다.

함수 f가 p에서 연속이라 하고 V을 공역에서 $f(p)$의 임의의 열린 근방이라 하자. 그러면 X에서 p의 열린 근방 U가 존재하여 $f(U)\subset V$ 즉, $U\subset f^{-1}(V)$을 만족한다. X의 임의의 부분집합 A에 대해 $p\nu A$, 즉 $p\in\overline{A}$이면 $f^{-1}(V)\cap A\neq\varnothing$이고 $\varnothing\neq f(f^{-1}(V)\cap A)\subset V\cap f(A)$ 이다. 그러므로 $f(p)\in\overline{f(A)}$ 이고 $f(p)\nu f(A)$ 이다. 따라서 함수 f가 점 p에서 근접관계를 보존한다.

함수 f가 점 p에서 근접관계를 보존한다고 하자. V을 $f(p)$의 임의의 열린 근방이라 하고 $A=\{x\in X|f(x)\not\in V\}=X-f^{-1}(V)$ 라 두자. 그러면 $f(A)\subset V^c$, V가 열린집합이므로 $\overline{f(A)}\cap V=\varnothing$, $f(p)\not\in\overline{f(A)}$ 이다. $f(p)$는 $f(A)$와 근접관계에 없고 가정에 의해, p는 A와 근접관계에 없고, $p\not\in A$이다. 그러므로 $U\cap A=\varnothing$을 만족하는 p를 포함하는 열린집합 U가 존재한다. 이로부터 $U\subset f^{-1}(V)$이고 $f(U)\subset V$이다. 따라서 함수 f는 p에서 연속이다.

연속의 직관적 정의 '$x\to p$이면 $f(x)\to f(p)$이다.'는 정의역에서 근접성이 공역에서의 근접성으로 진행되는 것처럼 추상화된 위상공간에서도 근접관계를 활용하여 f가 p에서의 연속성은 'p에서 근접관계를 $f(p)$에서 근접관계로 보존'하는 것

으로 규정될 수 있다. 근접관계는 연속성의 개념을 도입하기 위한 수단으로 직관적인 정의를 연계한 근접성의 보존이라는 맥락을 유지하면서 엄밀하고 형식화된 정의의 동치를 주는 교수학적 유용한 개념이라 할 수 있다. 연속함수는 정의역의 각 점에서 근접관계를 보존하는 것으로 특성화되며 연속함수를 다루는 특성화된 교과목이 위상수학이라고 할 수 있다.

Ⅴ. 연속함수로서의 수열과 그 극한

1. 수열의 극한 정의의 다양한 형태

수열 $\langle a_n \rangle$이 수렴한다는 것은 실숫값의 극한을 가진다는 것으로, 정의는 다음의 <표 3>과 같이 다양한 형태로 변환할 수 있으며 이들은 동치인 정의들이다. 조그마한 변환이지만 앞 절에서 보았듯이 보통위상에서 거리위상이나 순서위상, 나아가 일반위상에서 점열의 수렴성과 그 극한을 정의할 수 있는 기반이 된다.

<표 3> R에서의 수열 $\langle a_n \rangle$의 수렴성에 대한 정의들

정의	"수열 $\langle a_n \rangle$이 극한 a를 가진다."에 대한 정의	특징
①	n가 한없이 커질 때 a_n가 실수 a에 한없이 가까이 간다.: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$	a을 a_n의 극한(limit)
②	임의의 양의 실수 $\epsilon>0$에 대하여 적당한 자연수 n_0가 있어 $n>n_0$인 자연수 n에 대해 $\lvert a_n - a \rvert < \epsilon$ 즉, $a-\epsilon < a_n < a+\epsilon$ 을 만족	거리공간에서의 극한 개념으로 발전. 중심과 반지름에 의해 정해지는 열린 구는 위상을 구성하고 다루는데 기초가 된 기저에 기초한 정의
③	a를 중심으로 하는 임의의 열린구간 $B=B(a,r)$에 대하여 적당한 자연수 n_0가 있어 $n>n_0$인 자연수 n에 대해 $a_n \in B$를 만족	
④	a를 포함한 임의의 열린구간 I에 대하여, 적당한 자연수 n_0가 존재하여 $n>n_0$인 모든 자연수 n에 대해 $a_n \in I$를 만족	순서 위상에서의 정의로 발전
⑤	a를 포함한 임의의 열린집합 V에 대하여, 적당한 자연수 n_0가 존재하여 $n>n_0$인 모든 자연수 n에 대해 $a_n \in V$를 만족	일반위상공간에서의 극한 개념으로 발전

학교수학에서 다루는 수열의 극한에 대한 정의 ①는 '한없이 커진다.' 와 '한없이 가까워진다.'라는 표현을 이용하여 학생들이 직관적으로 받아들이도록 지도하고 있다. 이를 엄밀하게 정의한 것이 정의 ②의 $\epsilon - n_0$정의이다.[3)]

$0.999\cdots = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{10^n}) = 1$ 와 같이, 0.9999⋯는 1에 한없이 가까이 가는 것으로 보기도 하나 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ 나 0.999⋯자체를 하나의 수학적 대상으로 0이나 1로 인정하는 것이라 할 수 있다. 여기서 가무한(가능적 무한)과 실무한의 개념이 복잡하게 얽히며 이에 대한 분석이 분분하다(김남희 외, 2017; 박선용, 2018). 직관을 중시하는 학교수학의 정의 ①은 끝없이 진행되고 있는 과정에 기반을 두다가 엄밀함을 강조한 정의 ②를 거치고 일반화를 추구하는 정의 ③, ④, ⑤는 완결한 값으로 극한을 인정하고 이 값을 중심으로 한 정적인 개념에 바탕을 두고 있다고 할 수 있다.

Sfard(1991)에 의하면 개념은 과정과 대상의 두 측면이 있다. 개념의 발달은 과정으로서의 조작적 방법과 대상으로서의 구조적 방법이 교대로 나타나면서 이루어진다고 보았다. 조작의 과정에서 추상적인 대상으로 전이되기 위해서 복잡한 절차를 거쳐야 하는데 이를 내면화, 압축, 실재화의 세 단계로서 설명하였다(김남희 외, 2017). 이 단계들은 학교수학이 다루는 '한없이 커지고 한없이 가까이 간다.'로 개념화한 극한의 직관적인 정의가 대학의 미적분학이나 해석학 그리고 위상수학에서 다루어지는 형식적인 정의로 전이시키는 데 시사점을 주고 있다(김남희 외, 2017).

학교수학에서 다루는 정의 ①처럼 "한없이 커진다."와 "한없이 가까이 간다."는 동적인 행위로 접근성을 다루며 직관적이고 경험적인 견지에서 의미를 찾고자 하는 것은 학생들의 인지적 수준을 고려한 것이다. van Hiele는 기하의 사고 수준으로 시각적 인식 수준, 분석적 수준, 비형식적추론 수준, 형식적 엄밀 수준, 엄밀한 기하학적 수준을 들고 있는데 이러한 관점으로 볼 때 "가깝다"는 용어에 대한 엄밀한 $\epsilon-\delta$정의는 '형식적 수준(4수준)' 에 해당한다고 하겠다. 사실 미적분학 체계를 구축하는 '해석학의 산술화' 과정은 유클리드 기하학의 세계를 집대성하는 것에 비견된다고 할 수 있다.

미적분학, 해석학이나 위상수학에서 다루어지는 $\epsilon-n_0$정의 ②와 변형된 정의 ③, ④, ⑤를 주어진 열린구간이나 열린집합에 수열 $\langle a_n\rangle$의 유한개의 항을 제외한 모든 항이 포함되는 것으로 대체하기도 한다. 좀 더 구체화하여 수열에서 적당한 항 a_{n_0}이후 일어나는 순차적인 모든 항들이 수열 $\langle a_n\rangle$의 "꼬리(tail)"를 이룬다고 하고 이 개념을 가지고 해석하는 것도 교수학적 도움이 될 수 있다 (Bartle & Sherbert, 2011). 가령, a을 중심으로 반경 $\epsilon(>0)$ 인 ϵ-근방 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$속에 수열의 적당한 꼬리가 포함되면 수렴하는 것이다. 이 구간이 아

---

3) 보통 $\epsilon-N$정의라 하나 여기서 N은 자연수의 집합을 나타내므로 n_0을 사용한다.

무리 작더라고 수열의 꼬리가 포함되어야 한다. 실제 이 구간의 길이는 중요하지 않으며 단지 임의의 작은 값으로 잡혀질 수도 있다는 것이며 길이의 수치는 단지 보조적 의미에 불과하다.

2. 연속성과 수열의 극한

실수의 집합 R에서 수열 $<a_n>$은 자연수의 집합 N을 정의역으로 가지고 $s(n)=a_n$을 만족하는 함수 $s:N\to R$의 표상이라 할 수 있으며 수열을 함수로 $s=<a_n>$와 같이 표현하기로 한다. 수열 $s=<a_n>$의 연속성을 다루기 위해선 정의역 N에 자연스럽게 부여되는 위상인 보통위상공간 R로부터 유전된 상대위상 $\{G\cap N|G\in \mathscr{U}\}$의 구조를 우선 살펴보아야 한다. 한 점 집합이 모두 열린집합이 되어 이 위상은 이산위상이고 근접관계는 $n\nu A \Leftrightarrow n\in A$로 정해진다. 따라서 함수로서 수열 $s=<a_n>$은 항상 연속함수이다.

수열 $s=<a_n>$의 수렴성은 이산 위상공간 N을 한 점이 추가된 위상공간 $\overline{N}$로 확장하고 수열을 함수의 관점에서 $\overline{N}$을 정의역으로 하는 함수 s^*로 한다. 이 함수의 연속성으로 수열의 수렴성을 다룰 수 있다. 이를 위해 우선적으로 정의역인 위상공간 N을 $\overline{N}$로 확장한다. 무한대 기호 ∞는 수가 아니고, 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호임을 학교수학에서 강조하고 있지만 편의적으로 ∞을 단순한 하나의 점으로 간주하고 $\overline{N}=N\cup\{\infty\}$라 둔다. $\mathscr{B}=\{\{n\}|n\in N\}\cup\{\{n,\infty|n>n_0\}|n_0\in N\}$ 는 $\overline{N}=N\cup\{\infty\}$에서 기저의 자격을 가진다. 즉 $\mathscr{B}$에 있는 임의개의 집합들로 만든 합집합이 열린집합의 기능을 하게 되고 $\overline{N}$에 위상이 건립된다. 여기서 점 ∞의 열린 근방은 그 여집합이 유한 집합이어야 하는 것과 동치를 이루게 된다. 또한 N은 $\overline{N}=N\cup\{\infty\}$의 부분공간으로도 이산위상공간이다. $\overline{N}$의 위상에 의해 정해지는 근접관계 ν는 다음과 같음을 밝힐 수 있다.

$p\in\overline{N}$과 $A\subset\overline{N}$에 대하여, (i) $p\in N$일 때 $p\nu A \Leftrightarrow p\in A$ (ii) $p=\infty$일 때 $p\nu A \Leftrightarrow p\in A$ 혹은 A는 무한 집합이다.

수열 $s=<a_n>$은 항상 연속함수이다. 수열 $s=<a_n>$의 수렴성은 이 수열을 정의역 $\overline{N}$에서 즉 ∞에서 연속이 되는 함수로의 확장이 가능한가에 달려 있다. 다음이 성립함을 볼 수 있다.

$$s^*:\overline{N}\to R,\ s^*(n)=a_n,\ s^*(\infty)=a\in R\ ,\ \infty\text{에서 연속} \Leftrightarrow <a_n>\text{가 } a\text{에 수렴.}$$

이것은 일반위상에서 함수의 연속성의 개념을 기반으로 수열의 수렴성의 개념이 설명될 수 있음을 보여준다.

Ⅵ. 결론 및 제언

위상수학의 도래와 발전을 Euler의 업적과 더불어 연결 상태의 방향에서 살펴볼 수 있으나 19세기말에서 20세기 초에 출현된 집합의 극한점, 내부, 경계, 폐포 그리고 닫힌집합, 열린집합 등의 개념에 기초하여 해석학의 관점으로 살펴볼 수 있다(Moore, 2008; O'Connor & Robertson, 1996). 본 연구는 예비교사들이나 교사들이 가지고 있는 위상수학은 학교수학과 단절된 교과라는 불신을 해소시키고 이들에게 위상교과에 대한 이해와 학습의 동기에 도움을 주고자 하며, 이를 위해 위상과 위상수학이 가지는 특성과 교수학적 분석을 해석학에 연계되는 수열의 수렴성이나 함수의 연속성을 중심으로 찾고자 하였다. 교육과정, 미적분학, 해석학, 위상수학 등의 여러 문헌과 선행 자료들을 분석하여 본 연구의 목적을 얻어가는 것으로 문헌연구 분석방법을 적용하였다. 본 연구에서 얻은 결과들은 다음과 같이 요약될 수 있다.

첫째, 실직선에서 열린구간을 중요한 수단으로 활용한 보통 위상은 거리 위상, 순서 위상 및 열린구간의 합집합으로 표현되는 열린집합들로 구성된 집합족인 일반위상(점-집합 위상)으로서 공리적으로 도입되는 여러 형태의 대표적 사례로 활용된다. 열린집합을 구조화하는 공리를 만족하는 집합족을 위상으로 특성화하는 여러 방식이 있지만 이 연구에서는 폐포와 Kuratowski에 의한 집합 X에서 일반위상의 구성을 특성화하는 폐포연산자에 주목하였다(Lipschutz, 2012). 이러한 폐포연산자와 연계시켜 근접관계의 개념을 도입시킬 수 있었다. 이 근접관계는 위상을 구성하는 역할을 하고 위상이 주어지면 이에 자연스레 대응하는 근접관계를 정하면서 위상이 근접관계를 다루는 도구 역할을 하였다.

둘째, 학교수학에서 실직선에서 "한없이 커진다. 한없이 작아진다. 한없이 가까이 간다." 등의 무한의 개념을 다루는 하나의 도구가 극한이라 하고 직관적인 극한과정을 중심으로 함수의 연속성과 수열의 수렴성을 다루고 있다(교육부, 2015). 실직선에서 직관적 정의로부터 $\epsilon-\delta$정의와 이를 집합의 관점으로 변환할 수 있었고 이에 따라 거리 위상, 순서위상, 일반위상에 대한 연속의 정의를 도입하는 데 중요한 기능이 있음을 보았다. 수치에서 집합을 활용한 표상의 변환은 사고의 확장과 변환에 영향을 미치고 있음을 볼 수 있다(Janvier, 1987; Kaput, 1987). 또한, 학교수학이나 미적분에서 다루는 '$x \to a$이면 $f(x) \to f(a)$이다.'의 직관적 정의에서는 정의역에서 근접성이 공역에서의 근접성으로 향하며 인과관계로 진행되고 있다. 대학의 미적분학이나 해석학, 위상수학에서 $\epsilon-\delta$정의나 형식화된 정의에

서는 공역에서 정의역으로 진행되며, 직관적 정의가 보여주는 가까워짐을 가까워짐으로 보존하는 연속성 성질이 뚜렷하게 드러나지는 않는다. 근접관계를 활용하여 점에서의 연속 정의와 동치를 이루는 근접관계 보존의 관점에서 보완될 수 있음을 살펴보았다. 직관적 정의처럼 함수의 진행 방향으로 연속성이 정의역에서 공역으로의 인과관계로 설명된다는 공통성을 지니고 있었다.

셋째, 수열은 자연수 집합 N을 정의역으로 하는 함수이고 N은 보통위상공간 R의 부분공간으로 그 상대위상이 이산위상이다. 그러므로 수열은 항상 연속함수이다. 수열을 이산위상공간인 N을 확장한 위상공간 $\overline{N}$을 정의역으로 하는 연속함수로 확장할 수 있는가에서 수열의 극한의 존재성과의 동치관계를 살펴보았다.

이러한 논의들로 위상은 수렴성과 연속성을 다루는 도구임을 주지할 수 있었으며 위상수학의 교수 학습에 도움이 될 수 있는 자료수집의 기회를 주었다. 본 연구로부터 위상수학의 교수학습과 관련된 다음의 제언을 줄 수 있다.

첫째, 위상수학과 같은 현대 수학은 구조적이고 추상적으로 형성되어 있어 예비교사들이 일방적으로 받아들이기엔 다소 무리가 있다. 대학에서 새로운 교과를 접할 때 어느 정도는 이런 새 교과를 배우는 동기 및 활용방법에 대한 인식이 심어지지 않으면 교과에 대한 바른 이해가 정립될 수 없으며 단지 기성의 수학을 받아들이려 하고 많은 어려움을 느끼게 될 것이다(우정호, 2008). 위상수학의 교수에서 위상은 수렴성과 연속성을 다루는 특성화된 도구임을 예비교사들에게 주지시키는 것을 염두에 두어야 할 것으로 본다.

둘째, Poincare의 수학적인 정의의 지도에 대한 견해를 보면, 수학자들에게는 매우 명백한 정의라고 하더라도 학생들에게는 형식적인 논리적 정의를 처음부터 도입하지 않는 게 바람직하다. 처음에 구체적이고 직관적인 표상을 수반하는 정의를 제시하고 역사적으로 이러한 초기의 정의의 사용이 불완전하고 조잡하여 수학적 사고의 발전 과정에서 여러 가지 문제점을 야기하게 되어 보다 엄밀한 정의로 점진적으로 개선 발전되었음을 깨닫게 해야 한다. 완성된 형식적인 논리적 정의의 제시에 앞서 초기의 직관적인 발판을 만들어 주고 학생들에게 엄밀하고 논리적으로 완전한 정의의 참뜻을 이해토록 하고 있다(우정호, 2008). 이에 맞추어 위상수학의 연속성을 다룰 때 근접관계의 도입은 직관에서 엄밀함과 형식적인 것으로 나아가는 데 있어 완충적 수단으로 활용할 수 있을 것이라 본다.

본 연구에서 분석된 자료를 활용한 예비교사들을 대상으로 한 교수 실험을 실행하지 못하였다. 향후 연구에서는 위상수학을 학교수학과 강한 연계성을 줄 수 있도록 이 연구의 자료와 결과들을 보완하고 위상개념의 도입과 활용에 관련한 학습 지도계획과 위상교과에 대한 예비교사들의 흥미와 이해에 관한 후속 연구가 필요할 것으로 본다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부, *수학과 교육과정*, 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8], 2011.

[2] 교육부, *수학과 교육과정* (교육부 고시 제 2015-74호), 교육부, 2015. [1]

[3] 김남희 외, *예비교사와 현직 교사를 위한 수학교육과정과 교재연구*, 서울:경문사, 2017.

[4] 김진환, 박교식, 학교수학과 학문수학에서의 연속성 개념 정의의 분석. *수학교육학연구, 27*(3), 375-389, 2017.

[5] 박선용, 극한과 무한집합의 상호작용과 그 교육적 시사점에 대한 역사적 연구, *Journal for History of Mathematics, 31*(2). 73-91, 2018.

[6] 우정호 외, *수학교육학 연구방법론*, 서울:경문사, 2006.

[7] 우정호, *학교수학의 교육적 기초*, 서울:서울대학교출판부, 2008.

[8] 우정호, *수학 학습-지도 원리와 방법,* 서울:서울대학교출판문화원, 2010.

[9] Atanasov, A., Topology and Continuity, *Columbia Science Review, 6*(2), 33-35, 2010.

[10] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., *Introduction to real analysis*(4th edition), John Wiley & Sons, 2011.

[11] Cameron, P., Hocking, J. G., & Naimpally, S. A. (1974). Nearness-a better approach to continuity and limits, *Amer. Math. Monthly, 81*, 739-745, 1974.

[12] Foerster, P. A., *Calculus: concepts and applications,* Key Curriculum Press, 2010.

[13] Gauld, D. B., Nearness-a better approach to topology, *Math. Chronicle 7,* 84-90, 1977.

[14] Harcharras, A. & Mitrea, D., *Calculus connections: Mathematics for middle school teachers,* Pearson Prentice Hall, 2007.

[15] Hocking, J. G., & Young, G. S., *Topology,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. London, 1961.

[16] Janvier, C., Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed), *Problem of representation in teaching and learning mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[17] Kaput, J. J., Toward a theory of symbol use in mathematics, In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving*, (pp. 159-196). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates,

1987.
[18] Lipschutz, S., *Schaum's outlines General Topology*. McGraw Hill, 2012.
[19] Moore, G. H., The emrgence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology, *Historia Mathematica, 35*, 220-241, 2008.
[20] Munkres, J. R., *Topology-a first course,* Prentice-Hall, 1975.
[21] O'Connor, J. J., & Robertson, E. F, History topic: A history of topology, *MacTutor History of Mathematics*, 1996. [http;//www-history.msc.st -andrews.ac.uk /HistTopics/Topology_in_Mathematics.html]
[22] Stewart. J., *Calculus Early Transcendentals(8E),* Cengage Learning, 2016.
http;//www-groups.dsc.st-and.ac.uk/~history, topology
https;//www-Quora.com, topology

Kim, Jin Hwan
Department of Mathematics Education, Yeungnam University
E-mail address: kimjh@ynu.ac.kr