

# FMCW MIMO 레이다를 이용한 거리-각도 동시 추정 기법

## Joint Range and Angle Estimation of FMCW MIMO Radar

김 정 훈<sup>1</sup> · 송 성 찬<sup>\*2</sup> · 전 주 환<sup>3</sup>

Junghoon Kim<sup>1</sup> · Sungchan Song<sup>\*2</sup> · Joohwan Chun<sup>3</sup>

### 요 약

FMCW 배열 안테나는 저비용 고해상도라는 장점 때문에 많은 분야에 널리 사용되고 있다. FMCW 배열을 이용하여 표적의 거리와 각도를 추정하기 위해서, 우선 deramped 수신신호로부터 거리-각도 행렬을 구성하고, 그 다음에 거리-각도 행렬에 2D-FFT와 같은 2차원 주파수 추정기법을 적용한다. 하지만, 이러한 주파수 추정기법은 bias 오차를 발생시키게 된다. 그 이유는 거리-각도 행렬의 두 개의 주파수가 서로 독립적이지 않기 때문이다. 따라서 FMCW 배열 안테나를 이용하여 표적의 거리-각도 동시추정을 위한 최대우도 기반 알고리즘을 제안하고, 거리와 각도 추정에 있어서 Cramer-Rao bound에 도달함을 보인다.

### Abstract

Frequency-modulated continuous wave(FMCW) radars with array antennas are widely used because of their light weight and relatively high resolution. A usual approach for the joint range and angle estimation of a target using an array FMCW radar is to create a range-angle matrix with the deramped received signal, and subsequently apply two-dimensional(2D) frequency estimation methods such as 2D fast Fourier transform on the range-angle matrix. However, such frequency estimation approaches cause bias errors since the frequencies in the range-angle matrix are not independent. Therefore, we propose a new maximum likelihood-based algorithm for joint range and angle estimation of targets using array FMCW radar, and demonstrate that the proposed algorithm achieves the Cramér-Rao bounds, both for range as well as angle estimation.

Key words: FMCW Radars, Maximum Likelihood Estimation, 2D-FFT, 2D-MUSIC, CRB, Joint Range, Angle Estimation

### I. 서 론

FMCW 레이다는 가볍고, 전력소모가 적으며, 저비용일 뿐만 아니라 거리의 고해상도를 얻을 수 있다는 장점이 있으며, 고도계, 차량용 레이다, 합성개구레이다(SAR) 등 근접거리 추정분야에 널리 사용되고 있다<sup>[1]</sup>. FMCW 레이다는

수신안테나 배열 또는 다중안테나(MIMO) 배열로 사용될 수 있다. 수신안테나 배열이나 MIMO 배열에서 우선 거리-각도 행렬을 구하게 되며, MIMO의 경우에는 각도의 차원은 가상배열(virtual array)의 크기만큼 늘어난다. 표적의 거리와 각도를 추정하기 위해, 거리-각도 행렬에 2D-FFT나 2D-MUSIC<sup>[2]</sup>과 같은 2차원 주파수 추정기법을 적용하게 된다.

「이 연구는 한화시스템 연구비의 지원으로 연구되었음.」

카이스트 전기 및 전자공학부(Department of Electrical Engineering, KAIST)

\*한화시스템(Hanwha Systems)

1: 위촉연구원, 2: 수석연구원, 3: 교수

· Manuscript received November 12, 2018 ; Revised December 3, 2018 ; Accepted January 28, 2019. (ID No. 20181112-114)

· Corresponding Author: Junghoon Kim (e-mail: junghoonk@kaist.ac.kr)

하지만, 이러한 기존의 2차원 주파수 추정 알고리즘은 각 domain의 주파수가 서로 결합(coupled)되어 있을 경우에 문제가 된다. 그 이유는 표적과의 거리와 비례하는, 거리 축의 주파수는 각각의 안테나마다 조금씩 다르기 때문이다. 이 차이는 표적과의 각도에 따라 결정된다. 이전 연구에서는 안테나마다 거리차이가 발생한다는 점을 신호 모델에 반영하지 않았으며, 이는 불가피하게 bias 오차를 발생시킨다.

본 논문에서는 앞서 언급한 bias 오차를 해결하기 위해 거리-각도의 동시추정을 위한 최대우도법(maximum likelihood) 알고리즘을 제안한다. 또한, 제안하는 알고리즘을 통해 구한 거리와 각도의 추정치를 기존의 기법들과 더불어 Cramer-Rao bounds(CRB)와도 비교한다. 더 나아가, 본 알고리즘은 거리-각도뿐만 아니라, 거리-Doppler나 각도-Doppler에도 적용 가능하다. 그 이유는 거리-Doppler의 경우, pulse 차원에서 발생하는 거리 차이와, 각도-Doppler의 경우, pulse 차원에서 발생하는 각도 차이로 인해 bias 오차가 발생하게 되는데, 거리-각도의 경우와 본질적으로 같은 문제이기 때문이다.

## II. FMCW MIMO 레이다 신호 모델

단일 안테나에서,  $n$ 번째 시간에서의 deramped된 FMCW 레이다 신호는 다음과 같이 주어진다.

$$s[n] = ae^{j\phi} e^{j(2\pi\gamma T_s n + 2\pi f_c \tau - \pi\gamma\tau^2)}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (1)$$

여기서  $ae^{j\phi}$ 는 표적의 반사율,  $f_c$ 는 반송파 주파수,  $\gamma$ 는 주파수 증가 기울기,  $T_s$ 는 샘플링 주기,  $N$ 은 총 샘플링 수,  $\tau$ 는 표적에서 수신안테나까지 걸리는 지연시간을 나타낸다.

송신배열 및 수신배열 소자 개수가  $P$ 개 및  $Q$ 개로 구성된 MIMO 안테나는  $M=PQ$ 개의 가상수신배열(virtual receive array)로 나타낼 수 있다. 배열은 선형, 등간격이며, 인접 안테나 사이의 거리를  $d=\lambda/2$ , 배열의 중간인 origin으로부터 표적까지의 거리를  $r$ , 표적으로부터의 입사각을  $\theta$ 라고 하자. 그러면, 표적으로부터  $m$ 번째 안테나까지의 지연시간은 다음과 같다.

$$\tau[m] = (2r + d[m]u)/c, \quad (2)$$

여기서,  $d[m] = (m - (M-1)/2)d$ 이며, 배열의 origin을 기준으로  $m$ 번째 안테나의 위치를 나타내고,  $c$ 는 빛의 속도이며,  $u = \sin\theta$ 이다. 즉,  $m$ 번째 안테나에서 deramped된 FMCW 레이다 신호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s[n, m] &= ae^{j(\phi - \pi\gamma\tau^2[m])} e^{j(2\pi f_c \tau[m] + 2\pi\gamma\tau[m] T_s n)} \\ &= ae^{j(\phi - \pi\gamma\tau^2[m] + 4\pi f_c r/c)} e^{j2\pi f_c d[m]u/c} e^{j2\pi\gamma(2r + d[m]u)/c T_s n} \\ &\approx ae^{j\psi} e^{j2\pi \frac{u}{\lambda} d[m]} e^{j2\pi(2r + d[m]u) \frac{B}{cN} n}, \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 식 (5)에서 주파수 기울기  $\gamma$ 와 신호대역폭  $B$ 사이의 관계인  $\gamma = B/(NT_s)$ 를 이용하였고,  $\pi\gamma\tau^2[m]$ 은  $m$ 에 거의 의존적이지 않으므로,  $\psi \approx \phi - \pi\gamma\tau^2[m] + 4\pi f_c r/c$ 로 근사하였다.

$n$ 번째 시간,  $m$ 번째 안테나에서 얻어지는 측정값은 다음과 같다.

$$z[n, m] = s[n, m] + w[n, m], \quad (4)$$

여기서,  $w[n, m] \sim CN(0, \sigma^2)$ 은 복소수 부가가우시안 잡음(additive Gaussian noise)으로 모델링하였다.

식 (3)에서 두 번째와 세 번째의 exponential term은 각각 각도와 거리를 나타낸다. 하지만, 세 번째 exponential term에 각도의 요소인  $d[m]u$ 가 포함되어 있으며, 거리와 각도가 서로 결합(coupled)되어 있는 것을 알 수 있다. 따라서 위 신호 모델에 2차원 주파수 추정기법을 적용하게 되면 bias 오차가 발생하게 된다.

## III. 제안하는 추정 알고리즘

최대우도추정(maximum likelihood estimation: MLE) 기법을 통해  $r$ 과  $u$ 를 추정함과 동시에, nuisance 변수인  $\psi$ 와  $a$ 도 함께 추정하는 것이 목표이다. 신호모델을 다시 써보면 다음과 같다.

$$s[n, m] = ae^{j\psi} e^{j2\pi(u/\lambda)d[m]} g[n, m], \quad (5)$$

여기서,  $g[n, m] = e^{j2\pi(2r + d[m]u) \frac{B}{cN} n}$ 이다. 식 (6) 측정값을 시간( $n$ )축으로 쌓아서 열벡터  $\mathbf{z}^{(m)} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 를 만들면 다음과 같다.

$$\mathbf{z}^{(m)} = \mathbf{s}^{(m)} + \mathbf{w}^{(m)}, \quad (6)$$

여기서, 각 벡터값은 다음과 같다.

$$\mathbf{s}^{(m)} = ae^{j\psi} e^{j2\pi(u/\lambda)d[m]} \mathbf{g}^{(m)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{g}^{(m)} = [g[0,m], g[1,m], \dots, g[N-1,m]]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{w}^{(m)} = [w[0,m], w[1,m], \dots, w[N-1,m]]^T. \quad (9)$$

그러면, 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$A_0 = \sum_{m=0}^{M-1} [\mathbf{z}^{(m)} - \mathbf{s}^{(m)}]^H \cdot \frac{1}{\sigma^2} I \cdot [\mathbf{z}^{(m)} - \mathbf{s}^{(m)}] \quad (10)$$

여기서, 윗첨자  $H$ 는 켈레전치(conjugate transpose)를 나타낸다. 식 (7)을 식 (10)에 넣어 불필요한 부분을 제거하면 다음과 같아진다.

$$\begin{aligned} A(a, \psi, r, u) = \\ -2a \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} R^{(m)}] + MNa^2 \end{aligned}$$

여기서,  $R^{(m)}$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} R^{(m)} = \mathbf{z}^{(m)H} \cdot \mathbf{g}^{(m)} = \\ \sum_{n=0}^{N-1} z^* [n, m] e^{j2\pi(2r + d[m]u) \frac{B}{cN} n} \end{aligned} \quad (11)$$

우도함수  $A(\cdot)$ 를 최대로 만드는 변수  $\psi$ ,  $a$ ,  $u$ ,  $r$ 을 찾는 것이 목표이다.

첫 번째로,  $\frac{\partial A}{\partial \psi} = 0$ 을 만족하는  $\hat{\psi}$ 를 구해 보자.

$$\frac{\partial A}{\partial \psi} = 2a \sum_{m=0}^{M-1} \text{Im} [e^{j\psi} e^{j2\pi \frac{u}{\lambda} d[m]} R^{(m)}]. \quad (12)$$

즉,  $\hat{\psi} = -\angle \left[ \sum_{m=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{u}{\lambda} d[m]} R^{(m)} \right]$  이다.

두 번째로,  $\frac{\partial A}{\partial a} = 0$ 을 만족하는  $\hat{a}$ 를 구해 보자.

$$\frac{\partial A}{\partial a} = -2 \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} R^{(m)}] + 2MNa. \quad (13)$$

즉,  $\hat{a} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} R^{(m)}]$  이다.

세 번째로, Newton-Raphson 기법을 이용하여  $\hat{u}$ 의 해를 찾는다.

$$\hat{u}(i+1) = \hat{u}(i) - (f_u / f'_u)|_{\hat{u}=\hat{u}(i)}, \quad (14)$$

여기서,  $\hat{u}(i)$ 는  $i$ 번째 반복에서의  $\hat{u}$ 를 나타내고,  $f_u$ 와  $f'_u$ 는  $u$ 에 대한  $A(\cdot)$ 의 Jacobian과 Hessian이며, 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} f_u = \frac{4\pi}{\lambda} a \sum_{m=0}^{M-1} m \text{Im} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} R^{(m)}] \\ - 2a \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} \frac{\partial R^{(m)}}{\partial u}], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f'_u = \\ 2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 a \sum_{m=0}^{M-1} d^2 [m] \text{Re} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} R^{(m)}] \\ + 4 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) a \sum_{m=0}^{M-1} d [m] \text{Im} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} \frac{\partial R^{(m)}}{\partial u}] \\ - 2a \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} [e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} \frac{\partial^2 R^{(m)}}{\partial u^2}]. \end{aligned} \quad (16)$$

네 번째로,  $\hat{r}$ 도 Newton Raphson 기법을 이용하여 구한다.

$$\hat{r}(i+1) = \hat{r}(i) - (f_r / f'_r)|_{\hat{r}=\hat{r}(i)}, \quad (17)$$

여기서,  $\hat{r}(i)$ 는  $i$ 번째 반복에서의  $\hat{r}$ 를 나타내고,  $f_r$ 와  $f'_r$ 는  $r$ 에 대한  $A(\cdot)$ 의 Jacobian과 Hessian이다.

$$f_r = -2a \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} \left[ e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} \frac{\partial R^{(m)}}{\partial u} \right], \quad (18)$$

$$f'_r = -2a \sum_{m=0}^{M-1} \text{Re} \left[ e^{j(\psi + 2\pi \frac{u}{\lambda} d[m])} \frac{\partial^2 R^{(m)}}{\partial u^2} \right]. \quad (19)$$

여기서  $\partial R^{(m)} / \partial u$ ,  $\partial^2 R^{(m)} / \partial u^2$ ,  $\partial R^{(m)} / \partial r$ ,  $\partial^2 R^{(m)} / \partial r^2$ 는 식 (11)로부터 쉽게 구할 수 있다.

#### IV. 모의실험 결과

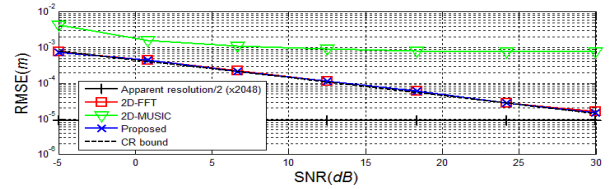
설정된 변수값은 반송파 주파수  $f_c=77$  GHz, 신호대역 폭  $B=4$  GHz, sweep time  $S=10^{-4}$ s이며, 거리 분해능은  $\Delta r=c/(2B)=3.75$  cm이다. 거리 sample 개수  $N=256$ , 송신 안테나 개수  $P=4$ , 수신 안테나 개수  $Q=4$ 이며, 가상

배열 안테나 개수는  $M=PQ=16$ 이다. 표적은 거리  $r=5$  m, 각도  $\theta=15^\circ$ 에 위치해 있다고 가정하였다.

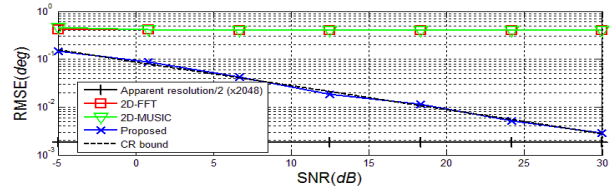
2D-FFT에서 거리축과 각도축으로  $\times N_z(=2,048)$ ,  $\times M_z(=2,048)$ 만큼 zero-padding을 하고, 2D-MUSIC에서는 거리축과 각도축으로  $\times N_z(=2,048)$ ,  $\times M_z(=2,048)$ 만큼 미세탐색(fine search)을 진행하였다. 이와 같이 oversampling을 한 이유는 기존의 알고리즘인 2D-FFT나 2D-MUSIC는 격자기반(grid-based)이므로, 제안하는 무격자기반(gridless-based) 알고리즘과 공평하게 비교하기 위해서이다. 따라서 얻어지는 거리와 각도의 겉보기 분해능(apparent resolution)은 각각  $\Delta r/N_z=1.83 \times 10^{-5}$  m와  $\Delta u/(du/d\theta)/M_z=2/(M \cos(15^\circ)) \times 180^\circ/\pi/M_z=0.0036^\circ$ 이다. 여기서 표적이  $\theta=15^\circ$ 에 위치해 있기 때문에 해당 각도에서 분해능을 구한 것이다. 만약, 격자기반 알고리즘의 평균제곱근편차(root mean square error: RMSE)가 겉보기 분해능(apparent resolution)값인  $1.83 \times 10^{-5}$  m와  $0.0036^\circ$ 보다 크다면, 그 오차는 분해능의 부족 때문이 아니라, bias 오차 때문이다.

그림 1은 신호 대 잡음비(signal to noise ratio: SNR)에 따라 거리와 각도 추정치의 RMSE를 나타낸 것이다. 이때,  $SNR=Pa^2/\sigma^2$ 으로 정의하였다. 모의실험은 300번 진행한 평균 결과 값이고,  $\psi \sim U(0, 2\pi)$ 가 균일분포를 갖는다고 가정하였다. 2D-MUSIC에서  $L_1 \times L_2(=10 \times 10)$  부행렬(submatrix)을 이용하여 spatial smoothing 기법<sup>[2]</sup>을 사용하였다. 2D-FFT 기법에서 거리의 bias 오차는 없으며, 각도의 bias 오차는  $0.397^\circ$ 이고, 2D-MUSIC 기법에서 거리와 각도의 bias 오차는  $7.8 \times 10^{-4}$  m,  $0.397^\circ$ 이다. 발생하는 오차값은 겉보기 분해능값인  $1.83 \times 10^{-5}$  m와  $0.0036^\circ$ 보다 훨씬 크며, 이 오차는 분해능 부족 때문이 아닌, bias 오차임을 알 수 있다. 표적이  $r=5$  m,  $\theta=15^\circ$ 에 위치해 있을 경우, Euclidean 거리오차는 3.5 cm로, 각도오차로 인한 위치 추정 오차가 큰 것을 알 수 있다. 반면, 제안하는 알고리즘의 RMSE는 Cramer-Rao Bound와 일치함을 알 수 있다.

$N_z$ ,  $M_z$ 만큼 zero-padding한 2D-FFT의 계산량은  $O(MN M_z N_z \log_2(MN M_z N_z))=5.84 \times 10^{11}$ 이며,  $L(=L_1 L_2=100)$  by  $L$  행렬의 eigenvalue decomposition과  $M_z$  by  $N_z$ 만큼 미세탐색으로 이루어진 2D-MUSIC 기법의 계산량은  $O(L^3 + M_z N_z (2L^2 + 3L - 1))=8.51 \times 10^{10}$ 이다. 제안하는 알고리즘은 식 (12), (13), (14), (17)을 총  $I(=30)$ 번 반복하였으며,  $O(I$



(a) 거리 추정치  
(a) The range estimates



(b) 각도 추정치  
(b) The angle estimates

그림 1. 표적의 평균 제곱근 편차(RMSE)  
Fig. 1. RMSEs for the target.

$(46MN + 67M + 7))=5.68 \times 10^6$ 의 계산량으로 가장 작았다.

## V. 결 론

FMCW 배열을 이용하여 표적의 거리-각도를 추정할 경우, 기존의 2D-FFT 알고리즘을 적용하면 bias 오차가 나는 것을 모의실험을 통해 확인하였다. 이러한 bias 오차를 극복하기 위해 최대우도법 알고리즘을 제안하였고, 제안된 알고리즘은 CRB에 도달함을 검증하였다. 레이다 기반 SLAM 문제에서 bias 오차가 누적되어 차량의 위치가 크게 어긋나게 되는데, 본 알고리즘은 이와 같이 고정밀 추정이 요구되는 응용분야에 적용될 수 있다.

## References

- [1] 이혁중, 전주환, 송성찬, "밀리미터파(W밴드) FMCW SAR 기반 전방의 이동지상표적 탐지 및 위치와 속도 추정," 한국전자과학회논문지, 28(6), pp. 459-469, 2017년 6월.
- [2] F. Belfiori, W. van Rossum, and P. Hoogeboom, "2D-MUSIC technique applied to a coherent FMCW MIMO radar," in *IET International Radar Conference on Radar Systems(Radar 2012)*, Glasgow, UK, pp. 1-6, Oct. 2012.