The Journal of the Convergence on Culture Technology (JCCT)
Vol. 5, No. 1, pp.353-360, February 28, 2019. pISSN 2384-0358, eISSN 2384-0366

http://dx.doi.org/10.17703/JCCT.2019.5.1.353
JCCT 2019-2-44

신용거래 하에 운송비용이 포함된 주문 비용을 고려한 퇴화성 제품의 재고 모형

An Inventory Model for Deteriorating Products with Ordering Cost inclusive of a Freight Cost under Trade Credit

신성환*

Seong-Whan Shinn*

요 약 신용거래는 공급자가 고객의 수요를 증대 시킬 목적으로 경쟁 업체와의 가격 차별화 전략의 하나로 활용되어진다. 고객 입장에서 보면 공급자로부터 제품 대금에 대하여 일정 기간 동안 지불 유예가 허용되면, 재고 투자 비용이 절감되는 효과가 발생하고 결국 고객의 재고 정책에 긍정적인 영향을 미치게 된다. 전통적인 재고 모형의 경우 고객의 주문 비용은 주로 고정 비용으로 가정하였다. 그러나 많은 실제 문제의 경우, 고객은 고정 주문 비용과 함께 제품 운송을 위한 운송비용을 부담하고 있으며, 대부분의 운송비용은 구입량(주문량)에 따라 종속적으로 발생하게 된다. 본 연구에서는 공급자가 고객에게 제품 대금에 대하여 일정 기간 동안 신용거래를 허용하는 상황 하에서 고객의 주문 비용이 고정 주문 비용과 함께 주문량에 따라 종속적으로 발생하는 운송비용을 포함한 재고 모형을 분석하였다. 문제 분석을 위하여 재고는 시간이 경과함에 따라 일정률로 퇴화한다는 가정 하에 고객의 연간 총 재고 비용에 대한 모형을 수립하였고, 총비용을 최소화하는 경제적 주문량 결정을 위한 해법을 개발하였다.

주요어 : 재고관리, 경제적 주문량, 신용거래, 운송비용, 퇴화

Abstract Trade credit is being used as a price discrimination strategy by the suppliers in order to increase the customer's demand. From the viewpoint of the customer, if delayed payment is allowed for a certain period of time from the supplier, the effect of reducing the inventory carrying cost will positively affect the customer's order quantity. Also, in deriving the economic order quantity(EOQ) formula, it is tacitly assumed that the customer's ordering cost is a fixed cost. However in many business transactions, the customer pays the freight cost for the transportation of his order and so, the customer's ordering cost contains not only a fixed cost but also a freight cost which is a function of the order size. Therefore, in this study, we analyzed the inventory model which considers that the customer's ordering cost contains not only a fixed cost but also a freight cost which is a function of the customer's order size when the supplier permits a delay in payments. For the analysis, it is also assumed that inventory is exhausted not only by customer's demand but also by deterioration. Investigation of the properties of an optimal solution allows us to develop an algorithm whose validity is illustrated using an example problem.

Key words : Inventory, EOQ, Credit Period, Freight Cost, Deterioration

*정회원, 한라대학교 신소재화학공학과
접수일: 2018년 9월 28일, 수정완료일: 2018년 11월 5일
게재확정일: 2018년 12월 9일
Received: September 28, 2018 / Revised: November 05, 2018
Accepted: December 09, 2018
*Corresponding Author: swshinn@halla.ac.kr
Dept. of Advanced Materials & Chemical Engineering, Halla Univ, Korea

Ⅰ. 서 론

재고 모형에 대한 경제적 발주량(Economic Order Quantity: EOQ) 모형은 지금까지 여러 다양한 상황에 대한 확장 문제들이 발표되었고, 주요 확장 모형 중 하나로 공급자로부터 신용 거래(Trade Credit)가 허용되는 상황 하에서 재고 정책을 결정하는 문제가 발표된 바 있다. 일반적으로 신용거래는 신용거래를 허용하는 공급자나 제품을 구입하는 고객, 양측에게 모두 중요한 역할을 하게 된다. 공급자의 경우 신용거래는 경쟁사에 대한 가격 차별화의 수단으로 활용될 수 있으며, 이를 통하여 고객의 잠재적인 수요를 증가시키는 효과를 기대할 수 있다. 또한 고객의 경우, 신용거래 기간 동안에 제품 가격의 지불이 연기됨으로써 재고 투자비용의 절감을 기대할 수 있고, 이는 고객의 재고 정책에 긍정적인 영향을 미치게 된다.(Fewings [1]). 이와 같은 관점에서 공급자로부터 일정 기간 동안 신용 거래가 허용된다는 가정 하에 재고 정책을 결정하는 문제에 대한 연구가 폭넓게 수행되어 왔다. Goyal [2]과 Teng et al. [3]은 공급자가 신용거래를 허용하는 상황 하에서 경제적 주문량을 결정하는 수학적 모형을 제시하였다. Chang et al. [4]과 Ouyang et al. [5]은 공급자, 중간공급자 그리고 고객으로 구성된 2 단계 공급 사슬을 대상으로 최종 고객의 수요는 중간공급자의 판매 가격에 함수라는 가정 하에 판매 가격과 주문량을 동시에 결정하는 문제를 분석하였고, 결과적으로 공급자로부터 허용되는 신용 거래 기간은 중간공급자의 재고 주문 정책과 판매 가격 결정에 큰 영향을 미친다는 사실을 확인 하였다.

앞에서 언급 한 모든 연구는 제품 주문과 관련한 운송비의 고려 없이 제품 주문 비용을 고정비로 가정하여 분석하였다. 그러나 많은 실제 문제의 경우, 고객은 제품 운송과 관련하여 운송비용을 부담하게 되고, 대부분의 운송비용은 주문량(운송량)에 따라 종속적으로 발생하게 된다. Aucamp [6], Lee [7]와 Lippman [8, 9]은 고정 주문비용과 함께 주문량에 따라 운송비용이 발생한다는 가정 하에 경제적 주문량 모형에 대한 연구를 수행하였고, Shinn et al. [10]은 신용 거래 하에 구매 가격과 운송비용이 주문량에 따라 할인이 발생하는 경우의 재고 모형을 분석하였다. 또한 최근에 Shinn [11]은 팰릿(pallet) 단위 수송(트럭, 컨테이너, 박스, 팰릿 등)의 경우 운송 팰릿 수에 따라 운송비가 발생하는 특수성을 감안하여 보다 효율적인 해법을 제시한 바 있다.

재고 모형의 또 하나의 주요 주제 중 하나로 시간이 경과함에 따라 제품의 특성이 변질되는 퇴화성(deterioration) 제품에 대한 재고 문제를 생각 해 볼 수 있다. 앞에서 제시한 모든 연구 논문 들은 제품의 특성이 시간의 경과에 무관하게 일정하게 유지된다는 암묵적인 가정 하에 모형을 분석하였다. 이 가정은 시간의 경과해도 부패하지 않는 제품에 대해서는 타당하지만, 많은 제품의 경우에 시간이 경과함에 따라 제품의 특성이 퇴화되어 못 쓰게 되는 경우를 볼 수 있다. 이와 같은 상황을 고려하여 Ghare와 Schrader [12]는 재고가 고객의 수요와 함께 퇴화에 의하여 소진된다는 가정 하에 수정된 경제적 주문량 모형을 제시하였다. Cohen [13]은 이와 같은 퇴화성 제품에 대한 판매 가격 및 주문량 결정 문제를 분석하였고, 최근에 Tsao와 Sheen [14], 그리고 Shinn [15]은 신용 거래의 가정 하에 퇴화성 제품에 대한 재고 문제를 연구하였다.

본 연구에서는 공급자로부터 일정기간 신용 거래가 허용되는 상황 하에서 고정 주문비용과 함께 주문량에 따라 운송비용이 발생한다는 가정 하에 퇴화성 제품에 대한 경제적 주문량 모형에 대한 연구를 수행하고자 한다. 특히 운송비의 경우 Shinn [11]의 연구와 마찬가지로 팰릿 단위 수송의 경우로 가정하여 모형을 분석한다. 본 논문의 구성으로는 먼저 2장에서 수리 모형을 만들기 위한 가정과 함께 모형에 대한 수식화를 진행한다. 다음으로 3장에서는 수리 모형에 대한 특성 분석을 통하여 경제적 주문량 결정을 위한 해법을 제시하고, 4장에서 수치 예제를 통하여 해법의 타당성을 입증한다. 마지막으로 5장에서 최종 결론과 함께 향후 연구 방향에 대하여 논의하고자 한다.

Ⅱ. 수리 모형

본 연구는 Shinn [11]의 연구 결과를 퇴화성 제품의 경우로 확장한 모형으로 퇴화에 대한 가정을 제외하면, 기본적으로 Shinn [16]의 가정과 동일하다. 본 연구에서 사용되는 가정과 기호는 다음과 같다.

<가정>

(1) 고객의 수요는 일정하다.

(2) 재고 부족은 허용되지 않는다.

(3) 주문비용은 고정 주문비용과 함께 주문량에 따라 운송비가 발생한다.
(4) 제품은 일정율로 퇴화한다.
(5) 공급자는 제품 대금에 대하여 일정 기간 동안 지불유예(신용 거래)를 허용하고, 고객은 이 신용 거래 기간 동안 제품 대금의 일시적 유용이 가능하여 일정한 이자율(I)로 수익이 발생하게 된다. 유예 기간이 끝나게 되면, 구입한 제품에 대한 제품 대금이 공급자에게 지불되고, 이 때까지 남아있는 재고에 대해서 일정한 이자율(R)로 재고투자비용이 발생하게 된다.
<기호>
D = 고객의 연간 수요.
C = 단위 제품 가격.
Q = 주문량.
T = 주문주기.
tc = 공급자가 허용하는 신용 기간.
H = 재고투자비용을 제외한 순수 재고유지비용.
R = 재고투자비용(% 값).
I = 투자수익률(% 값).
$S(Q)$ = 주문량 Q, $(j-1)U < Q \leq jU$, $j = 1, 2, \cdots, \infty$ 의 주문 비용; $A+F_j$.
A = 고정 주문 비용.
F_j = 주문량 Q, $(j-1)U < Q \leq jU$, $j = 1, 2, \cdots, \infty$ 의 운송 비용; $P_0+(j-1)P$, $P_0 \geq P$.
λ = 퇴화율
$q(t)$ = t 시점의 재고 수준

본 연구에서 고려하는 운송비의 구조는 Lee [7]와 Shinn [11]의 모형과 마찬가지로 운송 단위가 U 로 일정한 경우를 고려한다. 운송비는 첫 번째 운송 단위(U)에 기본요금(P_0)이 부과되고, 추가 운송 단위 수 각각에 대해 운송비용(P)이 비례적으로 발생한다고 가정한다. 기본요금(P_0)과 추가 운송비용(P)이 같은 경우에는 운송량 Q 가 $(j-1)U < Q \leq jU$ 인 경우에 운송비용으로 jP 가 발생하게 된다. 또한 $P_0 > P$ 의 경우에는 운송 단위가 jU 에서 $(j+1)U$ 로 바뀔 때 마다 운송비용의 할인이 발생함을 알 수 있다.

Ghare and Schrader [12]가 언급한 대로 재고가 일정율(λ)로 퇴화하는 경우, 시점 t 의 퇴화량은 t 시점의 재고 수준에 비례하고 따라서 t 시점의 재고 감소율은

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\lambda q(t) - D \qquad (1)$$

이 된다. 식 (1)은 일차선형미분방정식으로 그 해를 구하면,

$$q(t) = q(0)e^{-\lambda t} - \frac{D}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) \qquad (2)$$

이 되고, 식 (2)는 고객의 수요와 시간에 따른 퇴화를 반영한 t 시점의 재고 수준을 나타낸다. $q^0(t)$를 시점 t 에 퇴화에 의한 재고 소모량을 고려하지 않은 재고 수준이라고 정의 하면, 퇴화에 의한 재고 소모량은

$$q^0(t) - q(t)$$
$$= (q(0) - Dt) - (q(0)e^{-\lambda t} - \frac{D}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})) \qquad (3)$$
$$= q(t)(e^{\lambda t} - 1) - Dt + \frac{D}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) \qquad (4)$$

이 된다. 따라서 주기당 주문량, Q 는

$$Q = (q^0(T) - q(T)) + DT \qquad (5)$$

이 된다. 수요가 일정한 재고 모형의 경우 재고투자비용으로 인하여 재고 수준이 0이 되었을 때 재주문(reorder)이 발생하게 되므로 $q(T) = 0$이 되고,

$$Q = \frac{D}{\lambda}(e^{\lambda T} - 1) \qquad (6)$$

이 된다. 그림 1은 시간대 별 재고 수준을 나타내는 그림으로 그림에서 점선은 고객의 수요를 나타낸다. 또한 1회 주문량이 Q 이므로 $q(0) = Q$가 되고, 결국 시점 t 의 재고수준은

$$q(t) = \frac{D}{\lambda}(e^{\lambda(T-t)} - 1),\ 0 \leq t \leq T \qquad (7)$$

이 된다.

이제 연간 총비용식, $TC(T)$를 주문주기(T)의 함수로 모형화 하기 위하여 $(j-1)U < Q \leq jU$를 T 의 범

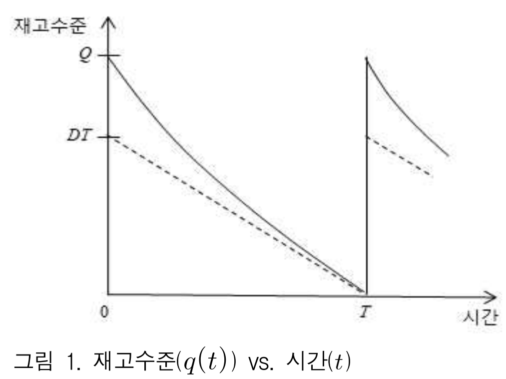

그림 1. 재고수준($q(t)$) vs. 시간(t)
Figure 1. Inventory level ($q(t)$) vs. Time (t).

위로 변경 해 보자. 식 (6)에 의하여 $L_j = \frac{1}{\lambda} ln(\frac{\lambda}{D}(jU)+1)$라 하면, $(j-1)U < Q \le jU$ 는 $L_{j-1} < T \le L_j$로 바꿀 수 있고, $TC(T)$는 다음의 네 가지 비용 항목으로 구성된다.

(1) 연간 구매비용 $= CQ/T = CD(e^{\lambda T}-1)/\lambda T$

(2) 연간 주문비용 $= \frac{A+F_j}{T}$,

$$L_{j-1} < T \le L_j,\ j = 1, 2, \cdots, \infty.$$

(3) 연간 재고유지비용 $= \frac{H}{T}\int_0^T q(t)dt$

$$= \frac{HD(e^{\lambda T}-\lambda T-1)}{\lambda^2 T}.$$

(4) 연간 재고투자비용(Goyal [2] 참조)

1) Case 1($tc \le T$) : 신용거래 기간(tc) 중의 판매 부분에 해당하는 제품 대금은 신용거래 기간 동안 지불이 유예되어 투자 수익률 I 로 이자 수익이 발생하게 된다. 그림 2 에 나타난 대로 $(0, tc)$ 동안의 평균 수요량은 $\frac{1}{2}Dtc$ 이고, 이 기간 동안의 수익은 $\frac{1}{2}Dtc \cdot tcCI$ 가 된다. 지불 유예 기간이 만료됨에 따라 제품 대금은 지불되고, (tc, T) 동안의 평균 재고량 $\frac{1}{(T-tc)}\int_{tc}^T q(t)dt$ 에 대해 재고투자비용 $CR\int_{tc}^T q(t)dt$ 이 발생하게 된다. 결과적으로

연간 재고투자비용 $= \frac{1}{T}\left\{CR\int_{tc}^T q(t)dt - \frac{CIDtc^2}{2}\right\}$

$$= \frac{1}{\lambda^2 T}CRD(e^{\lambda(T-tc)} - \lambda(T-tc)-1) - \frac{CIDtc^2}{2T}$$

이 된다.

(ii) Case 2($tc > T$) : 신용거래 기간(tc)이 주기 시간(T)보다 큰 경우 모든 제품 대금은 신용 거래 기간 동안 투자 수익률 I 로 수익이 발생하게 된다. 그림 3 에 나타난 대로 $(0, T)$ 동안의 평균 재고량은 $DT/2$ 이고, (T, t_c) 동안의 평균 재고량은 DT 가 되어

연간 재고투자비용

$$= -\frac{1}{T}\left\{\frac{DT}{2}TCI + DT(tc-T)CI\right\}$$
$$= \frac{CIDT}{2} - CIDtc$$

이 된다.

따라서 tc 와 T 의 상대적 크기에 따라 $TC(T)$는 다음의 두 가지 식으로 나타 낼 수 있다.

(1) Case 1($tc \le T$)

$$TC_{1,j}(T) = \frac{CD(e^{\lambda T}-1)}{\lambda T} + \frac{A+F_j}{T} + \frac{HD(e^{\lambda T}-\lambda T-1)}{\lambda^2 T} + \left(\frac{CRD(e^{\lambda(T-tc)}-\lambda(T-tc)-1)}{\lambda^2 T} - \frac{CIDtc^2}{2T}\right)$$
$$,\ L_{j-1} < T \le L_j,\ j = 1, 2, \cdots, \infty. \quad (8)$$

(2) Case 2($tc > T$)

$$TC_{2,j}(T) = \frac{CD(e^{\lambda T}-1)}{\lambda T} + \frac{A+F_j}{T} + \frac{HD(e^{\lambda T}-\lambda T-1)}{\lambda^2 T} + \left(\frac{CIDT}{2} - CIDtc\right)$$
$$,\ L_{j-1} < T \le L_j,\ j = 1, 2, \cdots, \infty. \quad (9)$$

III. 모형분석 및 해법

본 연구는 식 (8)과 (9)로 모형화된 고객의 연간 총비용을 최소화하는 최적 주문 주기(T^*)를 구하는 문제 이고, 일단 T^* 를 구하면, 식(6)에 의하여 최적 주문량

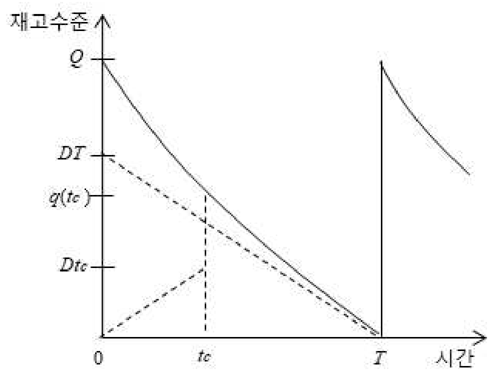

그림 2. 신용기간(tc) vs. 주기시간(T), $tc \le T$
Figure 2. Credit Period (tc) vs. Cycle Time (T).

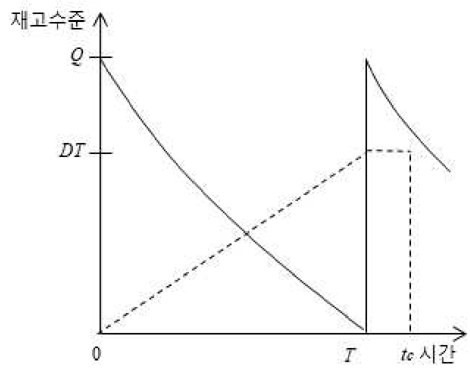

그림 3. 신용기간(tc) vs. 주기시간(T), $tc > T$
Figure 3. Credit Period (tc) vs. Cycle Time (T).

The Journal of the Convergence on Culture Technology (JCCT)
Vol. 5, No. 1, pp.353-360, February 28, 2019. pISSN 2384-0358, eISSN 2384-0366

(Q^*)을 계산 할 수 있다. 그러나 식 (8)과 (9)는 미분 가능하지만, 수학적으로 다루기 쉽지 않다. 따라서 다음과 같이 지수부(exponential term)에 대한 테일러 급수 전개(a truncated Taylor series expansion)

$$e^{\lambda T} \approx 1 + \lambda T + \frac{1}{2}\lambda^2 T^2 \tag{10}$$

를 적용하여 다음과 같이 근사식을 유도할 수 있다.

$$TC_{1,j}(T) = CD + \frac{A+F_j}{T} + \frac{(H+C\lambda)DT}{2} + \left(\frac{C(R-I)Dtc^2}{2T} + \frac{CRDT}{2} - CRDtc\right), \quad L_{j-1} < T \le L_j,\ j = 1, 2, \cdots, \infty, \tag{11}$$

$$TC_{2,j}(T) = CD + \frac{A+F_j}{T} + \frac{(H+C\lambda)DT}{2} + \left(\frac{CIDT}{2} - CIDtc\right), \quad L_{j-1} < T \le L_j,\ j = 1, 2, \cdots, \infty. \tag{12}$$

식 (11)과 (12)를 보면 퇴화성 제품의 경우 Shinn [11]의 모형에서 H 를 $H+C\lambda$ 로 대체 한 것을 제외하면, 동일한 비용식으로 모형화 됨을 알 수 있다. 따라서 우리는 Shinn [11]이 제시한 분석 과정과 유사한 방법으로 퇴화성 제품의 재고 모형을 분석 할 수 있다.

Shinn [11]이 언급한 대로 $R \ge I$의 경우, $TC_{i,j}(T)$는 볼록(Convex) 함수임을 알 수 있다. 따라서 각 $TC_{i,j}(T)$의 최소값 $T_{i,j}$는

$$T_{1,j} = \sqrt{\frac{2(A_1+F_j)}{H_1 D}}, \quad \text{where } A_1 = A + \frac{C(R-I)Dtc^2}{2} \text{ and } H_1 = H + C\lambda + CR, \tag{13}$$

$$T_{2,j} = \sqrt{\frac{2(A+F_j)}{H_2 D}}, \quad \text{where } H_2 = H + C\lambda + CI \tag{14}$$

가 되고, 식 (13)과 (14)로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

Property 1.

$T_{1,j} \ge tc$ 이면, $T_{2,j} \ge tc$이고, $T_{1,j} < tc$ 이면, $T_{2,j} < tc$이다. 또한 $T_{2,j} \ge tc$ 이면, $T_{1,j} \ge tc$이고, $T_{2,j} < tc$ 이면, $T_{1,j} < tc$이다. 따라서 $T_{1,j} \ge tc$이면, $TC_{2,j}(T)$는 $T < tc$의 범위에서 감소함수 이고, $T_{2,j} < tc$ 이면, $TC_{1,j}(T)$는 $T \ge tc$의 범위에서 증가함수이다.

<증명> 식 (13)으로부터 $T_{1,j} \ge tc$는

$$\sqrt{\frac{2(A+F_j)+C(R-I)Dtc^2}{(H+C\lambda+CR)D}} \ge tc \tag{15}$$

이고, 식 (15)의 양변을 정리하면,

$$2(A+F_j) + C(R-I)Dtc^2 \ge (H+C\lambda+CR)Dtc^2, \tag{16}$$

$$\sqrt{\frac{2(A+F_j)}{(H+C\lambda+CI)D}} \ge tc \tag{17}$$

이 된다. 식 (17)은 $T_{2,j} \ge tc$를 의미하고, $T_{2,j}$ 는 $TC_{2,j}(T)$의 최소값이므로 $T < tc$의 범위에서 $TC_{2,j}(T)$는 감소함수임을 알 수 있다. 또한 식 (15), (17)로부터 $T_{2,j} < tc$ 는, $T_{1,j} < tc$를 의미하고, $T_{1,j}$ 는 $TC_{1,j}(T)$의 최소값이므로 $T \ge tc$의 범위에서 $TC_{1,j}(T)$는 증가함수이다. Q.E.D.

Property 1은 임의의 j에 대해서 $TC_{i,j}(T)$, $i = 1, 2$의 최소값을 T_j^* 라고 할 때, T_j^*는 $T_{1,j}$와 $T_{2,j}$ 중에서 발생하고, 더욱이 $T_{1,j} \ge tc$이면, $T_j^* = T_{1,j}$, $T_{1,j} < tc$이면 $T_j^* = T_{2,j}$ 임을 의미한다. 마찬가지로 $T_{i,j}$와 $TC_{i,j}(T)$는 식의 구조를 통하여 $T_{i,j}$와 $TC_{i,j}(T)$에 각각에 대하여 다음과 같은 관계가 있음을 보일 수 있다.

Property 2.

각각의 i에 대해서 $T_{i,j} < T_{i,j+1}$, $j = 1, 2, \cdots, \infty$이다.

Property 3.

각각의 T 에 대해서 $TC_{i,j}(T) < TC_{i,j+1}(T)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \cdots, \infty$ 이다.

Property 1, Property 2 그리고 Property 3의 특성으로부터 다음의 정리 1과 2를 얻을 수 있으며, 이 두 정리들로부터 연간 총비용를 최소화하는 최적해 T^*의 후보값 T_o를 정의 할 수 있다.

Theorem 1. (Case 1($tc \le T$)에서의 T^*의 후보값)
Case 1($tc \le T$)에서 $L_{k-1} < tc \le L_k$이고, $L_{a-1} < T_{1,0} \le L_a$, $T_{1,0} = \sqrt{\frac{2(A_1+P_0-P)}{H_1 D}}$ 라고 할 때,

(1) $a > k$이고, $T_{1,a} \le L_a$ 이면, $T_0 = L_{a-1}, T_{1,a}$.
(2) $a > k$이고, $T_{1,a} > L_a$ 이면, $T_0 = L_{a-1}, L_a$.
(3) $a \le k$ 이고, $T_{1,k} \le tc$ 이면, $T^* < tc$.
(4) $a \le k$ 이고, $T_{1,k} \le L_k$ 이면, $T_0 = T_{1,k}$.
(5) $a \le k$ 이고, $T_{1,k} > L_k$ 이면, $T_0 = L_k$.

<증명> Case 1($T \ge tc$)의 경우, a와 k의 크기에 따라 $a > k$, $a = k$ 그리고 $a < k$의 세 가지 경우를 고려 할 수 있다. 먼저 Acaump[6]와 Lee[7]에 따르면,

$$TC_{1,j}(T) > TC_{1,j}(L_j),\ L_{j-1} < T \le L_j,\ j < a, \quad (18)$$
$$TC_{1,j-1}(L_{j-1}) > TC_{1,j}(L_j),\ j < a, \quad (19)$$
$$TC_{1,j}(T) > TC_{1,j-1}(L_{j-1}),\ L_{j-1} < T \le L_j\ ,\ j > a, \quad (20)$$
$$TC_{1,j+1}(L_{j+1}) > TC(L_j),\ j > a \quad (21)$$

이 성립함을 알 수 있다.

먼저, $a > k$의 경우, 만일 $T_{1,a} \le L_a$ 이면,

$$TC_{1,a}(T_{1,a}) \le TC_{1,a}(T),\ L_{a-1} < Q \le L_a \quad (22)$$
$$\le TC_{1,a}(L_a) \quad (23)$$

이고, 따라서 $T_o = L_{a-1},\ T_{1,a}$ 가 된다. 만일 $T_{1,a} > L_a$ 이면, $L_{a-1} < T \le L_a$인 T에서 $TC_{1,a}(T)$는 감소함수이므로 $T_o = L_{a-1},\ L_a$ 가 된다.

다음으로 $a = k$의 경우, k의 정의에 따라 $tc \in (L_{a-1}, L_a]$ 이다. 따라서 만일 $T_{1,a} \le tc$ 이면,

$$TC_{1,a}(tc) \le TC_{1,a}(T),\ tc \le T \le L_a \quad (24)$$
$$\le TC_{1,a}(L_a) \quad (25)$$
$$< TC_{1,j}(T),\ L_{j-1} < T \le L_j,\ j > a \quad (26)$$

의 관계가 성립하므로 $T \ge tc$ 영역의 연간 총비용 $TC(T)$는 tc에서 최소값이 존재한다. 그러나 Property 1과 tc에서 연간 총비용식은 연속이라는 사실로 부터 tc는 최적해의 후보로 고려 할 필요가 없다. 만일 $T_{1,a} > tc$ 의 경우에 $tc < T_{1,a} \le L_a$라면,

$$TC_{1,a}(T_{1,a}) \le TC_{1,a}(T),\ tc \le T \le L_a \quad (27)$$
$$\le TC_{1,a}(L_a) \quad (28)$$
$$< TC_{1,j}(T),\ L_{j-1} < T \le L_j,\ j > a \quad (29)$$

임을 알 수 있고, 따라서, $T_o = T_{1,a}$가 된다. 또한 $T_{1,a} > tc$의 경우에 $L_a < T_{1,a}$ 이면,

$$TC_{1,a}(L_a) \le TC_{1,a}(T),\ tc \le T \le L_a \quad (30)$$

이므로, $T_o = L_a$ 가 된다.

마지막으로 $a < k$의 경우, 식 (20)과 (21)에 의하여 만일 $T_{1,k} \le tc$이면, $T \ge tc$ 구간의 연간 총비용은 tc에서 최소값이 존재한다. 그러나 Property 1으로부터 tc는 최적해의 후보로 고려 할 필요가 없다. 만일 $T_{1,k} > tc$의 경우에 $T_{1,k} \le L_k$이면, $T_o = T_{1,k}$가 되고, $T_{1,k} > L_k$이면, $T_o = L_k$가 된다. *Q.E.D.*

Theorem 2. (Case 2($tc > T$)에서의 T^*의 후보값)

Case 2($tc > T$)에서 $L_{k-1} < tc \le L_k$이고, $L_{b-1} < T_{2,0} \le L_b$, $T_{2,0} = \sqrt{\dfrac{2(A+P_0-P)}{H_2 D}}$ 라고 할 때,

(1) $b < k$이고, $T_{2,b} \le L_b$ 이면, $T_0 = L_{b-1},\ T_{2,b}$.

(2) $b < k$이고, $T_{2,b} > L_b$ 이면, $T_0 = L_{b-1},\ L_b$.

(3) $b = k$ 이고, $T_{2,b} \le tc$ 이면, $T_o = L_{b-1},\ T_{2,b}$.

(4) $b = k$ 이고, $T_{2,b} > tc$ 이면, $T_0 = L_{b-1}$.

(5) $b > k$ 이면, $T_0 = L_{k-1}$.

<증명> Case 2($T < tc$)의 경우, b와 k의 크기에 따라 $b < k$, $b = k$ 그리고 $b > k$의 세 가지 경우를 고려 할 수 있다. 먼저 $b < k$의 경우, 만일 $T_{2,b} \le L_b$이면, $T_o = L_{b-1},\ T_{2,b}$가 되고, $T_{2,b} > L_b$이면, $T_o = L_{b-1},\ L_b$가 된다.

다음으로 $b = k$의 경우, k의 정의에 따라 $tc \in (L_{b-1}, L_b]$이다. 따라서 만일 $T_{2,b} < tc$이면, $T_o = L_{b-1}$, $T_{2,b}$가 되고, $T_{2,b} \ge tc$이면, $T_o = L_{b-1}$, $tc - \epsilon$ (ϵ는 매우 적은 수) 가 된다. 그러나 $tc - \epsilon$의 경우에는 Property 1과 $T = tc$에서 연간 총비용식은 연속이라는 사실로부터 최적해의 후보로 고려 할 필요가 없다.

마지막으로, $b > k$의 경우, b와 k의 정의로 부터 $T \in (L_{j-1}, L_j]$, $j \le k$ 인 T에서 $TC_{2,j}(T)$ 는 감소함수이다. 그러므로

$$TC_{2,j}(T) \ge TC_{2,j}(L_j),\ T \in (L_{j-1}, L_j],\ j \le k. \quad (31)$$

이고.

$$TC_{2,j-1}((L_{j-1}) > TC_{2,j}(L_j),\ j \le k. \quad (32)$$

이다. 이상의 결과로부터 $b > k$의 경우, $T_o = L_{k-1}$, $tc - \epsilon$임을 알 수 있지만, $tc - \epsilon$ 역시 Property 1과 연간 총 비용 함수가 $T = tc$ 에서 연속이라는 사실로부터 최적해의 후보로 고려 할 필요가 없다. 따라서 최적해를 구하기 위해 단지 $T = L_{k-1}$만 고려하면 된다.

Q.E.D.

이상의 정리 1과 2의 결과로부터 $TC(T)$를 최소화 하는 최적해 T^*의 후보 값 T_o를 정의 할 수 있고, 각 T_o에서의 연간 총비용을 계산 해 봄으로써 최적해를 구할 수 있다.

<해법>

단계 1. $L_{k-1} < tc \le L_k$인 k를 찾아라.

단계 2. $T_{1,0} = \sqrt{\frac{2(A_1 + P_0 - P)}{H_1 D}}$ 를 계산하고, $L_{a-1} < T_{1,0} \le L_a$ 인 a를 찾아라.

단계 3. $a > k$ 면, 단계 4로진행하라. $a \le k$ 면, 단계 5로 진행하라.

단계 4. $T_{1,a} \le L_a$면, $T_0 = L_{a-1}, T_{1,a}$에서 식 (11)로부터 총비용을 계산하고, 단계 6으로 진행하라. $T_{1,a} > L_a$면, $T_0 = L_{a-1}, L_a$에서 식 (11)로부터 총비용을 계산하고, 단계 6으로 진행하라.

단계 5. $T_{1,k} \le tc$면, 단계 6으로 진행하라. $tc < T_{1,k} \le L_k$면, $T_0 = T_{1,k}$에서 식 (11)로부터 총비용을 계산하고, 단계 6으로 진행하라. $T_{1,k} > L_k$면, $T_0 = L_k$에서 식 (11)로부터 총비용을 계산하고, 단계 6으로 진행하라.

단계 6. $T_{2,0} = \sqrt{\frac{2(A + P_0 - P)}{H_2 D}}$ 를 계산하고, $L_{b-1} < T_{2,0} \le L_b$ 인 b를 찾아라.

단계 7. $b < k$면, 단계 8로 진행하라. $b = k$면, 단계 9로 진행하라. $b > k$면, 단계 10으로 진행하라.

단계 8. $T_{2,b} \le L_b$면, $T_0 = L_{b-1}, T_{2,b}$에서 식 (12)로부터 총비용을 계산하고, 단계 11로 진행하라. $T_{2,b} > L_b$면, $T_0 = L_{b-1}, L_b$에서 식 (12)로부터 총비용을 계산하고, 단계 11로 진행하라.

단계 9. $T_{2,b} \le tc$면, $T_o = L_{b-1}$, $T_{2,b}$에서 식 (12)로부터 총비용을 계산하고, 단계 11로 진행하라. $T_{2,b} > tc$면, $T_0 = L_{b-1}$에서 식 (12)로부터 총비용을 계산하고, 단계 11로 진행하라.

단계 10. $T_0 = L_{k-1}$에서 식 (12)로부터 총비용을 계산하고, 단계 11로 진행하라.

단계 11. 단계 4, 5, 8, 9, 10 에서 계산된 총비용 중 최소값이 최적해가 된다.

Ⅳ. 예 제

공급자로부터 제품 대금에 대하여 일정 기간 동안 지불 유예가 허용되는 신용거래 상황 하에서 주문량(운송량)에 따라 비례적으로 발생하는 운송비용이 포함된 주문 비용을 고려한 퇴화성 제품의 재고 모형에서 신용거래 기간과 운송비용 그리고 퇴화율이 재고 정책에 미치는 영향을 분석하기 위하여 다음의 예제를 적용 해보았다.

$D = 3{,}200$[단위/년], $A = 50$[\$/회], $C = 3$[\$/단위], $H = 0.3$[\$/단위·년], $R = 0.15 (= 15\%)$, $I = 0.1 (= 10\%)$, $tc = 0.3$[년], $U = 300$[단위], $P_0 = 15$ [\$], $P = 10$[\$] 그리고 $\lambda = 0.3$.

앞의 3 절에서 제시한 해법을 통하여 이 예제의 해를 찾으면,

단계 1. $L_3 (= 0.2700) < tc (= 0.3) \le L_4 (= 0.3554)$이므로 $k = 4$이다.

단계 2. $T_{1,0} = 0.1703$이고, $L_1 (= 0.0925) < T_{1,0} \le L_2 (= 0.1824)$ 이므로 $a = 2$이다.

단계 3. $a (= 2) \le k (= 4)$이므로 단계 5로 진행하라.

단계 5. $T_{1,4} = 0.2101$이고, $T_{1,4} < tc (= 0.3)$ 이므로 Case 1 ($tc \le T$)에서는 최적해의 후보값이 존재하지 않는다. 따라서 총비용 계산 없이 단계 6으로 진행하라.

단계 6. $T_{2,0} = 0.1514$이고, $L_1 (= 0.0925) < T_{2,0} \le L_2 (= 0.1824)$ 이므로 $b = 2$이다.

단계 7. $b (= 2) < k (= 4)$이므로 단계 8로 진행하라.

단계 8. $T_{2,2} = 0.1514$이고, $L_1 (= 0.0925) < T_{2,2} \le L_2 (= 0.1824)$ 이므로 $T_0 = L_1, T_{2,2}$이 된다.

단계 11. $TC_{2,1}(L_1) = 10{,}237$이고, $TC_{2,2}(T_{2,2}) = 10{,}161$ 이므로 최적해는 $T_{2,2} = 0.1514$ 가 된다.

이상의 결과로부터 연간 총비용을 최소화하는 최적 주기 시간 $T^* = T_{2,2} (= 0.1514)$임을 알 수 있고, 이 때의 연간 총비용 $TC(T)^* = 10{,}161$이다. 또한 식 (6)에 의하여 최적 주문량 Q^* = 581 임을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

전통적인 재고 모형의 주요 확장 문제의 하나로 신용거래 하의 재고 문제가 여러 상황에 대하여 다양하게 분석되었지만, 주로 주문 비용이 고정비라는 가정 하에 연구되어 왔다. 그러나 많은 실제 문제의 경우, 고객은 제품 운송과 관련하여 운송비용을 부담하고 있으며, 대부분의 운송비용은 주문량(운송량)에 따라 종속적으로 발생하게 된다. 따라서 주문 비용에 고정 주문 비용과 함께 주문량에 따라 변동하는 운송비용을 고려한 재고 모형이 좀 더 현실적이라고 말 할 수 있다.

이와 같은 관점에서 본 연구는 공급자가 제품 대금에 대하여 일정 기간 동안 지불 유예를 허용하는 상황 하에서 고객의 주문 비용으로 고정 주문 비용과 함께 주문량에 따라 변동적으로 발생하는 운송비용을 포함한 재고 모형을 분석하였다. 또한 문제 분석을 위하여 재고는 재고 보유 시간이 경과함에 따라 일정율로 퇴화한다는 가정 하에 재고 모형을 수립하였다. 모형 수립 결과 퇴화성 제품에 대한 재고 모형은 수학적으로 매우 다루기 어려운 수리 모형으로 모형화 되었지만, 지수부(exponential term)에 대한 테일러 급수 전개(a truncated Taylor series expansion)를 통하여 근사식을 유도 할 수 있었고, 수리 모형의 특성을 분석하여 고객의 연간 총비용을 최소화하는 경제적 주문 정책 결정을 위한 해법을 제시하였다. 예제를 통하여 그 타당성을 확인 한 결과에 따르면, 공급자로부터 일정 기간 신용기간이 허용 될 때, 고객은 신용기간 동안 재고투자 비용의 절감이 가능하게 되고 그 결과 고객의 주문량을 증가시키는 효과가 있음을 알 수 있었다. 또한 운송 팰릿의 수에 따라 발생하는 운송비용의 영향으로 경제적 주문량 결정에 적재 단위가 영향을 미침을 알 수 있었고 시간의 경과에 따라 재고가 일정율로 퇴화한다는 가정은 주문량의 크기에 제한적인 요소로 작용한다는 사실도 확인 할 수 있었다.

References

[1] D. R. Fewings, “A credit limit decision model for inventory floor planning other extended trade credit arrangement”, Decision Science, Vol.23, pp.200-220, 1992.

[2] S. K. Goyal, “Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments”, Journal of Operational Research Society, Vol.36, No.4, pp.335-338, 1985.

[3] J. T. Teng, C. T. Chang, M. S. Chern and Y. L. Chan, “Retailer’s optimal ordering policies with trade credit financing”, International Journal of Systems Science, Vol.38, No.3, pp.269-278, 2007.

[4] H. C. Chang, C. H. Ho, L. Y. Ouyang and C. H. Su, “The optimal pricing and ordering policy for an integrated inventory model when trade credit linked to order quantity”, Applied Mathematical Modelling, Vol.33, pp.2978-2991, 2009.

[5] L. Y. Ouyang, C. H. Ho, and C. H. Su, “An optimization approach for joint pricing and ordering problem in an integrated inventory system with order-size dependent trade credit”, Computers & Industrial Engineering, Vol.57, pp.920-930, 2009.

[6] D. C. Aucamp, “Nonlinear freight costs in the EOQ problem”, European Journal of Operational Research. Vol.9, pp.61-63, 1982.

[7] C. Y. Lee, “The economic order quantity for freight discount costs”, IIE Transactions, Vol.18, pp.318-320, 1986.

[8] S. A. Lippman, “Optimal inventory policy with multiple set-up costs”, Management Science, Vol.16, No.1, pp.118-138, 1969.

[9] S. A. Lippman, “Economic order quantities and multiple set-up costs”, Management Science, Vol.18, No.1, pp.39-47, 1971.

[10] S. W. Shinn, H. Hwang and S. S. Park, “Joint price and lot size determination under conditions of permissible delay in payments and quantity discounts for freight cost”, European Journal of Operational Research, Vol.91, pp.528-542, 1996.

[11] S. W. Shinn, “An EOQ model with ordering cost inclusive of a freight cost under condition of permissible delay in payments”, Asia-pacific Journal of Multimedia Services Convergent with Art, Humanities, and Sociology, Vol.8, No.3, pp.477-487, 2018.

[12] P. M. Ghare and G. F. Schrader, “A model for an exponential decaying inventory”, Journal of Industrial Engineering, Vol.14, pp.238-243, 1963.

[13] M. A. Cohen, “Joint pricing and ordering policy for exponentially decaying inventory with known demand”, Naval Research Logistics Quarterly, Vol.24, pp.257-268, 1977.

[14] Y. C. Tsao and G. J. Sheen, “Joint pricing and replenishment decisions for deteriorating items with lot-size and time-dependent purchasing cost under credit period”, International Journal of Systems Science, Vol.38, No.7, pp.549-561, 2007.

[15] S. W. Shinn, “Buyer's price and inventory policy with price dependent demand for decaying items day terms supplier credit in a two-stage supply chain”, International Journal of Advanced Culture Technology“, Vol.6, No.3, pp.151-162, 2018.
https://doi.org /10.17703//IJACT2018.6.3.151