Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2019.32.1.027
Vol. 32 No. 1 (Feb. 2019), 27–44

An Analysis on the Characteristic and Origin of the Exhaustion Method

실진법의 특성과 기원에 대한 분석

Park Sun-Yong 박선용

This study analyses and discusses on the characteristic and the origin of the exhaustion method caused by the controversy over whether that method succeeded to the Antiphone's complete exhaustion idea and whether that method is similar to the method of limits. First, this study analyses 'principle of exhaustion method' which play an important role in that method in order to grasp the local characteristic of it. And this study speculates the origin of the exhaustion method by considering the time and situation of appearance and looking through the local characteristic of it. Also, this study takes a view of the overall characteristic of the exhaustion method by inquiring into the process of actual application of 'principle of exhaustion method' in a proof. As these results, this study reveals that the exhaustion method uprose not as a succession of Antiphone's idea but as a reaction to its idea, and that the exhaustion method has the recognized character of 'finitude' as distinct from the method of limits.

Keywords: exhaustion method, principle of exhaustion method, Antiphone, origin; 실진법, 실진법의 원리, 안티폰, 기원.

MSC: 01A20 ZDM: G15

1 서론

예비 및 현직 수학교사 교육에서 그리스 수학은 수학사의 주요한 주제 중 하나로 취급되는데, 그리스 수학의 내용 중에서도 일명 실진법(exhaustion method)은 가장 자주 다루어지는 것 중 하나이다. 실진법은 흔히 극한법과 관련이 있는 것으로 간주되는데, 어떤 수학적 아이디어의 발생의 기원을 분석하는 작업이야말로 수학사와 수학교육을 연결하는 기초이기에, 수학에서 극한이 지닌 중요성에 비추어볼 때 실진법에 대한 수학교사 교육은 역사발생적 원리의 입장에서 의미 있는 것이라 할 수 있다 [11].

Park Sun-Yong: Dept. of Math. Edu., Yeungnam Univ. E-mail: polya@yu.ac.kr
Received on Nov. 13, 2018, revised on Jan. 23, 2019, accepted on Feb. 25, 2019.

그런데 수학교사 교육에서 실진법은 하나의 소재, 즉 소개의 대상으로만 다루어지고 있는 실정이다. 물론, 이러한 수학사에 대한 단편적 소개는 수학사 및 수학교육학을 다루는 교사교육에서 늘 일어나는 것일 수도 있다. 또한, 수학교사 교육에서 전문적인 수준의 수학사를 정교하게 다룰 필요까지는 없을 것이며 수학사를 교수학적 변환의 관점에서 재조명하는 것이 바람직할 것이다. 하지만 이 연구를 통해 실진법에 대한 교육을 유독 문제시 삼는 것은 오늘날의 극한 개념과 관련하여 실진법의 특성을 수학교사 교육에서 매우 애매모호하게 취급하고 있는 현상이 발생하고 있기 때문이다.

구체적으로 말해, 실진법에 대해 극한법과 다르다고 하면서 동시에 극한법과 거의 대동소이하다고 어정쩡하게 소개하는 교육이 이루어지고 있는 것이다. 이와 관련해, 보편적인 수학교사용 교재에서는 다음과 같은 의견을 제시한다.

> 안티폰은 ...(중략)... 원적(圓積) 문제를 해결하는 과정에서 원에 내접하는 정다각형의 변의 수를 두 배씩 늘려감으로써 원과 정다각형 사이의 넓이의 차이를 궁극적으로 없앨 수 있다고 생각했다. ...(중략)... 안티폰의 이러한 생각은 에어독소스의 실진법의 기초를 이루게 된다. 실진법은 영역을 무한히 나눌 수 있다는 가정과 다음 명제에 기초한다.
>
> “어떤 양으로부터 절반 이상의 부분을 빼내고, 다시 나머지 부분으로부터 절반 이상의 부분을 빼내는 과정을 계속하면, 결국 나머지는 정해진 적은 양보다 더 적어진다.”1)
>
> ...(중략)... 아르키메데스는 다음과 같은 구적법을 통해 포물선의 넓이를 구하였다. ...(중략)... 결과적으로 포물선과 선분으로 둘러싸인 영역의 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \triangle\mathrm{APB} + \frac{1}{4}\triangle\mathrm{APB} + \frac{1}{4^2}\triangle\mathrm{APB} + \cdots + \frac{1}{4^n}\triangle\mathrm{APB} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\triangle\mathrm{APB} = \frac{4}{3}\triangle\mathrm{APB} \quad [7, \mathrm{p.}\ 248\text{–}50] \end{aligned}$$

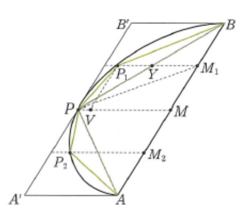

Figure 1. The quadrature of the parabola; 포물선의 구적

1) 유클리드의 원론X권의 첫 번째 명제인데, 이 연구에서 ‘실진법의 원리’라 일관되게 부르기로 한다.

하지만 이러한 논의와 관련해, 보이어는 "우리는 안티폰(그리고 후에 브라이손)이 정확히 무엇을 말했는지 모른다는 것을 명심해야 한다. 안티폰의 방법은 동시에 에우독소스의 방법과 또 그와 같은 내접된 다각형의 극한으로 원을 생각하는 우리의 개념과 대등하지만 단순히 다른 용어로 표현된 것으로 기술되어 왔다. 엄밀하게 이것은 사실이 아니다 [2, p. 37]."고 밝히며, 실진법과 극한을 사용하는 방법이 명백하게 다르다고 주장한다. 그러면서, 그는 "고대 수학사에 극한 개념의 어렴풋한 윤곽이 나타난다 하여도, 이 개념의 엄밀한 체계화는 19세기 이전의 저서에는 나타나지 않는다—그리스의 실진법에는 분명히 나타나지 않았다—는 것을 명심해야 한다 [2, p. 43]."고 말하며, 기하적인 실진법과 산술적인 극한법 사이의 차이를 더욱 강조한다.

보이어의 주장은, 안티폰의 방법이 "원과 정다각형 사이의 넓이의 차이를 궁극적으로 없앨 수 있다."와 같은 아이디어를 갖고 있었는지 분명하지 않고, 설사 그렇다 하더라도 안티폰의 방법이 에어독소스의 실진법에 영향을 끼친 것 같긴 하지만 실진법에는 '완전한 소진'의 아이디어가 들어있지 않으며, 이와 비교해, 17세기와 18세기의 초기 극한법에서는 '극한값에의 도달여부'에 대한 기나긴 다툼이 있었고 19세기의 극한법은 고대의 실진법과는 그 성격이 다르다는 것으로 요약된다.

그런데 Bressoud는 "실진법이 오히려 극한을 사용할 필요성을 없앴다."는 보이어의 주장을 수용하면서도, 실진법과 극한 개념 사이의 관련성을 어느 정도 인정해야 한다고 밝힌다. 그에 따르면, "(실진법을 처음으로 사용한) 아르키메데스와 에우독소스는 우리는 결코 넓이를 다 써버릴 수 없다고 주장했을 것이다. 단지 그 넓이에 점점 더 가까이 다가갈 뿐이다. 아르키메데스의 논법은 중요한 데, 이것이 무한급수 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots$ 에 대한 현대적인 정의를 암시하기 때문이다 [3, p. 13]."고 주장한다.

더욱이, 그는 아르키메데스가 실진법을 사용하면서 무한급수 또는 무한합을 명시적으로 사용한 적이 없음에도 불구하고 실질적으로 그것을 다루었을 것이라는 추측에 대한 근거로, 19세기 초의 코시를 포함한 수학자들이 아르키메데스가 무한과정을 다룬 방식을 검토한 후 극한법을 발전시켰다는 것을 제시한다. 실진법 안에 극한의 아이디어 자체가 명시적으로 나타난다고 할 수는 없지만 적어도 극한 개념의 씨앗이 들어있다는 것이다.

이상의 논의를 거치면서 자연스레 다음과 같은 여러 의문이 들게 마련이다: "안티폰의 아이디어가 실진법의 발생에 어떻게 영향을 미쳤다는 것인가?" "아르키메데스가 실진법을 구사할 때 거의 무한급수나 극한개념에 가까운 것을 정말로 사용했을까?" "극한법과 구별되는 실진법의 특성은 무엇인가?"

실진법과 극한법 사이의 관계를 정립함에 있어서 이러한 혼란 및 의문과 관련해, 연구자는 실진법의 기원과 특성을 고찰해야 할 필요성을 인식하게 되었다. 왜냐하면 실진법을 도입한 계기와 그것의 본질적 특성에 대한 심층적 고찰이 실진법과 극한법의 근본적인 공

통점과 차이를 드러낼 것이라 기대되기 때문이다. 이에, 이 연구에서는 실진법 증명을 작동시키는 ‘실진법의 원리’에 대해 탐색하고 안티폰의 아이디어와 관련해서 실진법의 기원에 대해 고찰하고 아르키메데스가 사용했던 실진법에 대한 논의를 통해 실진법의 특성에 대해 규명하고자 하였다.

2 실진법의 원리에 대한 분석

유클리드 원론V의 정의1과 4에서 각각 “비란 같은 종류인 두 양 사이의 크기 관계를 말한다.”, “두 양이 서로 어떤 비율을 가진다(비율이 있다)는 말은, 어느 것이든 곱하면 다른 것보다 더 커지게 할 수 있다는 뜻이다 [4, p. 8].”라고 밝히고 있듯이, 그리스의 비율이론 전체는 아르키메데스의 공리에 기초해서 양 사이의 크기 관계를 다룬다고 하겠는데, 실진법의 원리와 그에 따른 증명은 그 모습을 전형적으로 잘 보여준다고 할 수 있다. 이러한 특성을 감안하면서, 이제 유클리드의 원론X권의 첫 번째 명제인 ‘실진법의 원리’의 특징을 고찰해 보도록 하자.

<유클리드X, 법칙1>

> 두 개의 크기가 다른 양들을 주었다고 하자. 큰 것에서 자신의 절반보다 더 큰 양을 빼고, 남은 것에서 자신의 절반보다 더 큰 양을 빼고, 이렇게 계속 되풀이해라. 그러면 처음 주어진 작은 양보다 더 작은 양이 남게 된다.
>
> 크기가 다른 두 개의 양 AB, C를 주었는데, AB가 더 크다고 하자. AB에서 자신의 절반보다 더 큰 양을 빼고, 남는 것에서 자신의 절반보다 더 큰 양을 빼고, 이런 식으로 되풀이하면 결국에는 C보다 더 작은 양이 남게 됨을 보여야 한다.

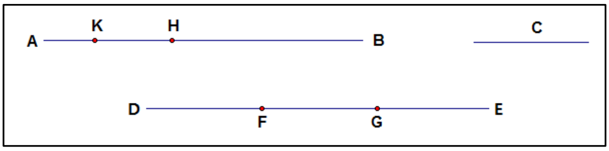

Figure 2. The first Proposition of the Elements X; 원론 X권의 법칙1

C에다 어떤 것을 곱해서 AB보다 더 크게 만들 수 있다.[5권 뜻매김4] 이렇게 만든 C의 곱을 DE라 하고, DE가 AB보다 더 크다고 하자. DE를 C와 크기가 같은 토막들 DF, FG, GE로 쪼개라.

AB에서 자신의 절반보다 더 큰 BH를 빼고, 남는 것 AH에서 AH의 절반보다 더 큰 HK를 빼라. 이 과정을 계속 되풀이하여 AB를 토막 낸 수가 DE를 토막 낸 수와 같아질

때까지 해라. 그러면 AK, KH, HB의 개수는 DF, FG, GE의 개수와 같다.

DE는 AB보다 더 크고, DE에서 자신의 절반보다 더 작은 EG를 빼고, AB에서 자신의 절반보다 더 큰 BH를 뺏으니, 남는 것 GD는 남는 것 HA보다 더 크다.

GD는 HA보다 더 크고, GD에서 자신의 절반인 GF를 빼고, HA에서 자신의 절반보다 더 큰 HK를 뺏으니, 남는 것 DF는 남는 것 AK보다 더 크다.

그런데 DF와 C는 크기가 같다. 그러므로 C도 AK보다 더 크다. 그러므로 AK는 C보다 작다. 그러므로 AB에서 빼고 남는 것 AK가 처음 주어진 작은 양 C보다 더 작다 [5, p. 4–5].

앞서 언급했듯이, 이 실진법의 원리는"C에다 어떤 것을 곱해서 AB보다 더 크게 만들 수 있다."는 아르키메데스의 공리를 이용해 "AB에서 빼고 남은 것 AK가 처음 주어진 양 C보다 더 작다."와 같은 결론을 유도함으로써 증명된다. 그런데 구조적 측면에서 이 증명은 다음과 같이 3단계로 이루어진 것으로 볼 수 있다.

1단계 : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\overline{\mathrm{AB}} < n_0 \times \overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{DE}}$

(여기서는 n_0가 3인 경우를 예시로 듦)

2단계 : $\overline{\mathrm{AH}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}} < \overline{\mathrm{DE}} - \overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{DG}}$

($\because \overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{DE}}$이고 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}} > \overline{\mathrm{C}}$ 이므로)

3단계 : $\overline{\mathrm{AK}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{DG}} < \overline{\mathrm{DG}} - \overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{DF}}$

($\because \overline{\mathrm{AH}} < \overline{\mathrm{DG}}$이고 $\overline{\mathrm{FG}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{DG}}$이므로)

그러면 이러한 증명과정의 핵심은 무엇일까? 연구자는 "C에다 어떤 것을 곱해서 AB보다 더 크게 만들 수 있다."와 "이 과정을 계속 되풀이하여 AB를 토막 낸 수가 DE를 토막 낸 수와 같아질 때까지 해라. 그러면 AK, KH, HB의 개수는 DF, FG, GE의 개수와 같다."라는 부분에 실진법의 원리의 가장 중요한 측면이 들어 있다고 생각한다.

사실, 이미 위의 1단계에서도 드러나지만 '실진법의 원리'는 유한한 절차의'존재'에 관한 명제이다. 1단계에서의 자연수 n_0는 'AB를 토막 낸 수' 또는 'DE를 토막 낸 수'일 뿐만 아니라 'AB에서 자신의 절반보다 더 큰 BH를 빼고 것', '남은 것 AH에서 AH의 절반보다 더 큰 HK를 빼는 것' 등을 순차적으로 수행하는 횟수$(n_0 - 1)$ 에 대한 것이기도 하다. 즉, 아르키메데스의 공리를 통해 보장되는 자연수 n_0의 존재성을 이용해 유한회인 $(n_0 - 1)$ 번의 절차를 거치면서 원하는 결과를 유도할 수 있음을 보이는 것이 이 명제의 핵심인 것이다.

만약 1단계에서의 자연수 n_0가 4라면, 이 정리를 만족시키는 'AB를 토막 낸 수'와 'DE를 토막 낸 수'도 마찬가지로 4가 되는데, 이 상황을 다루는 증명에서는 아래의 Figure 3에

서처럼 AM, MK, KH, HB의 개수와 DL, LF, FG, GE의 개수가 같게 되면서 정리가 성립함을 보인다고 할 수 있다. 구체적으로, 증명의 2단계에는 $\overline{\mathrm{AK}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}} < \overline{\mathrm{DG}} - \overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{DF}}$와 같은 내용이 추가될 것이고 마지막 3단계는 $\overline{\mathrm{AM}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AK}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{DF}} = \overline{\mathrm{DF}} - \overline{\mathrm{LF}} = \overline{\mathrm{DL}}$로 바뀔 것이다.

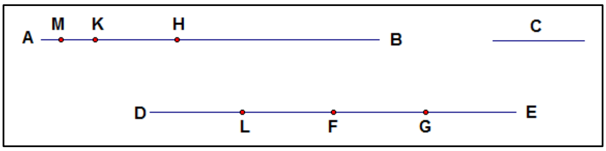

Figure 3. The principle of the exhaustion method; 실진법의 원리

한편, <유클리드 X, 법칙1>의 증명을 살펴보면 AB에서 자신의 절반인 BH를 빼고, 남는 것에서 AH의 절반인 HK를 빼는 과정을 계속 되풀이할 때에도 이 정리가 성립할 것임을 쉽게 파악할 수 있다. 즉, <유클리드 X, 법칙1>에 대한 딸린 정리인 '자신의 절반을 뺄 때에도 이 법칙이 성립한다.' 고 하겠다. 왜냐하면 2단계에서 '$\overline{\mathrm{AH}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$' 가 '$\overline{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$' 로 그리고 3단계에서 '$\overline{\mathrm{AK}} < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}$' 가 '$\overline{\mathrm{AK}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}$' 로 바뀔 뿐이며 나머지 증명은 그대로 유지되기 때문이다.

그런데 우리는 이 유클리드의 증명 속에서 BH, BK와 같이 AB의 크기에 점점 가까이 가는 것이 극한에서 다루는 것과 매우 유사함에 주목하게 된다. '근사' 의 관점에서 실진법의 원리가 아르키메데스의 공리로부터 유도되는 과정을 살펴보는 것은 극한법과 구별되는 실진법이 가진 특성을 파악하는 데에 도움이 될 것이다.

산술적인 근사의 관점에서 보게 되면, 유클리드의 기하적인 증명에서 'AB에서 빼고 남은 것 AK' 는 산술적으로 '구하고자 하는 양(극한값) S와 부분합 S_n와의 차이' 로 간주될 수 있다. 또한, 현대의 대수적 표현[2)]을 사용할 때 아르키메데스 공리는 '$\forall\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < \frac{S}{n_0(\epsilon)} < \epsilon$' 로 그리고 실진법의 원리의 결과는 '$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < |S_{n_0(\epsilon)} - S| < \epsilon$' 로 표현할 수 있는데, 이 표현방식을 활용해 아르키메데스의 공리로부터 실진법의 원리를 이끌어내는 방식을 설명하면 다음과 같다.

논의의 편의를 위해, <유클리드 X, 법칙1>의 딸린 법칙인 '자신의 절반을 뺄 때에도 이 법칙이 성립한다.' 에 대응하는 내용을 대수적으로 먼저 다루기로 하자. 우선, S의 남은 양을 절반씩 채워서 누적된 양을 나타내는 수열 T_n과 그에 대응해서 S에서 채워지지 않고 남은 양을 나타내는 수열 R_n을 생각해 보자.

$S = T_n + R_n,\ T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}R_n,\ R_{n+1} = \frac{1}{2}R_n$와 초기조건으로부터

2) '실진법은 근본적으로 기하적이지만 극한법은 산술적' 이라는 두 방법 사이의 확연한 차이를 인정한 상태에서의 고찰임을 밝힌다.

(1) $T_1 = 0, R_1 = S$

(2) $T_2 = \frac{1}{2}S, R_2 = \frac{1}{2}S$

(3) $T_3 = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2^2}S, R_3 = \frac{1}{2^2}S$

(4) $T_4 = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2^2}S + \frac{1}{2^3}S, R_4 = \frac{1}{2^3}S$

$\vdots$

(n_0) $T_{n_0} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2^2}S + \frac{1}{2^3}S + \cdots + \frac{1}{2^{n_0-1}}S = (1 - \frac{1}{2^{n_0-1}}S), R_{n_0} = \frac{1}{2^{n_0-1}}S$

이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

여기서 $2^{n-1} > n$ (n은 3이상 자연수)인 성질과 $\forall\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < \frac{S}{n_0(\epsilon)} < \epsilon$을 이용하면 $\forall\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < |S - S_{n_0(\epsilon)}| = R_{n_0(\epsilon)} = \frac{S}{2^{n_0(\epsilon)-1}} < \frac{S}{n_0(\epsilon)} < \epsilon$ 와 같은 결론을 <유클리드 X, 법칙1>에 대한 증명에서처럼 유도할 수 있다. 이것은 '어떤 양 S로부터 절반을 빼고, 다시 나머지 부분으로부터 절반을 빼는 과정을 계속하면, 결국 나머지는 정해진 양 ϵ보다 더 적어진다.'를 대수적으로 표현한다고 할 수 있다.

물론, 이로부터 '어떤 양 S로부터 절반 이상을 빼고, 다시 나머지 부분으로부터 절반 이상을 빼는 과정을 계속하면, 결국 나머지는 정해진 양 ϵ보다 더 적어진다.'를 자연스럽게 유도할 수 있다. 왜냐하면 S의 남은 양을 절반 이상씩 채워서 누적된 양을 나타내는 수열 S_n과 그에 대응해서 S에서 채워지지 않은 나머지를 나타내는 수열 r_n와 관련해서, $\forall n \in \mathbb{N}$에 대해 $S_n \geq T_n$, $R_n \leq r_n$이기 때문이다.

정리하면, $\forall\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < r_{n_0(\epsilon)} \leq R_{n_0(\epsilon)} = \frac{S}{2^{n_0(\epsilon)-1}} < \frac{S}{n_0(\epsilon)} < \epsilon$을 아르키메데스의 공리를 통해 유도해낼 수 있다고 하겠다. 즉, $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < |S_{n_0(\epsilon)} - S| < \epsilon$와 같은 실진법의 원리에서의 결과를 도출해낼 수 있는 것이다.

그렇다면, 이러한 결과는 '$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\epsilon) \longrightarrow 0 < |S_n - S| < \epsilon$'와 같은 오늘날의 극한과는 무슨 차이가 있는 것일까? 흥미롭게, 이 차이는 실진법의 기원에 대한 분석을 통해 더욱 선명하게 도출되는데 이에 대해서는 다음 절에서 살펴보도록 하자.

3 안티폰의 아이디어와 관련된 실진법의 기원

서론에서 언급했듯이, 그리스에서 실진법이 등장하기 이전부터 안티폰의 아이디어가 보편적으로 알려져 있었고 그것이 어떤 방식으로든 실진법의 출현에 영향을 미쳤다는 것은 분명한 것 같다. 그렇다면, 그의 아이디어는 어떻게 실진법의 형성에 영향을 미쳤던 것일까? 구체적으로 '한없이 많은 변의 수를 가진 다각형이 원과 일치한다.'는 것이 안티폰의 생각이었던 것일까?

만약 그렇다면 이러한 그의 생각이 에어독소스의 실진법에 어떻게 반영되었던 것일까?

이 실진법의 등장계기를 추측하는 데에 있어서 도움이 될 만한 안티폰의 저술은 남아있지 않다. 하지만 그와 소크라테스가 거의 같은 시기에 살았고, 그 이후에 플라톤과 에어독소스도 동시대에 살았다는 사항을 고려한다면, 플라톤의 제자인 아리스토텔레스가 안티폰의 아이디어에 대해 언급한 내용은 이 계기를 추측하는 데에 도움이 될 것이다. 아리스토텔레스는 원적문제와 관련하여 <물리학> 에서 안티폰에 대해 다음과 같이 언급한다.

> "한꺼번에 모든 것을 거부하는 것은 유용하지 않을 것인데, 근본적 원리로부터 출발하지만 거짓인 논증은 거부하고, 그렇지 않은 논증은 거부하지 않는 것이 유용하다 ; 부분으로 면적을 재는 것을 거부하는 것은 기하학자의 일이지만, 안티폰의 작업을 거부하는 것은 기하학자의 일이 아니다 [10, p. 311]."

이 아리스토텔레스의 언급을 표면적으로 해석한다면, 그는 원적문제와 관련해 안티폰의 작업을 긍정적으로 평가한 것처럼 보인다. 사실, 주석가 테미스티우스(Themistius)는 아리스토텔레스의 안티폰에 대한 언급을 실제로 다음과 같이 긍정적으로 해석하기도 하였다.

> "거짓 논증과의 투쟁이 남겨져 있었다. 원적문제를 해결하려 했던 두 명이 있는데, 키오스의 히포크라테스와 안티폰이다. 히포크라테스의 시도는 거부된다. (기하학의) 원리들을 지키지만, 그는 원에 내접하는 정사각형의 변과 관련된 초승달 모양에 대해서만 정사각형화함에 의해 그 증명에서 정사각형화해야 할 모든 초승달 모양에 대해 마치 정사각형화한 것처럼 간주하는 오류를 범했다. 하지만 기하학자는 안티폰에게 반대할 수 있는 것이 없다. 그는, 언젠가는 마지막 삼각형의 변이 직선임에도 불구하고 원의 둘레와 일치할 것이라고 생각하면서, 원 안에 정삼각형을 내접시키고 그 정삼각형의 각 변에 원주 상에 한 꼭짓점을 갖는 이등변삼각형을 만들고, 이 과정을 계속한다 [10, p. 312–3]."

하지만 아리스토텔레스의 안티폰에 대한 의견을, 이와 정반대로, 완전히 부정적으로 해석한 것이 더 보편적이었다고 할 수 있다. 예를 들어, 심플리키우스(Simplicius)는 다음과 같이 안티폰이 기하학의 원리조차 지키지 않았다고 혹평하였다.

> "기하학자는 원이 직선과 한 점에서 접한다는 가설을 내놓기 때문에, (안티폰의 논의에서는) 기하학 원리의 숨결조차 일어나지 않는다. 그 가설은 유클리드 원론의 세 번째 권에서 이미 증명된 것이기에, 기하학자는 가설로 내놓지도 않는다. 여기서 기하학의 원리는 어떤 직선이 원주와 일치할 수 없다는 것이라 말하는 것이 더 나은 것 같다. (중략) 직선과 원의 원주 사이의 공간에 대한 끈임 없는 분할은 결코 멈추지 않을 뿐만 아니라, 공간은 실제로 한없이 분할되기 때문에, 그 직선이

> 결코 원의 원주에 도달하지도 않을 것이다. 만약 직선이 원주에 도달하게 된다면, 양은 한없이 나눌 수 있다는 기하학적 원리를 어기게 되는 것이다. 에우데무스가 말했듯이, 안티폰에 의해 어겨진 원리는 바로 이 원리이다 [10, p. 313]."

우리는 테미스티우스와 심플리키우스의 주석을 분석했을 때 몇 가지 중요한 사항을 파악할 수 있다. 첫째, 두 사람의 공통적 언급에 기초할 때 안티폰이 '무한히 많은 변으로 이루어진 다각형이 존재하며 그것이 원과 일치한다.' 는 주장을 했을 것이라는 사항에 대해 일종의 신빙성을 확보할 수 있다. 안티폰 본인의 의견이 무엇인지 여전히 불분명한 것도 사실이지만, 적어도 후대의 학자들은 그렇게 받아들였다고 할 수 있다.

둘째, 에우데무스가 아리스토텔레스의 직속 제자였다는 것과 후대의 대다수의 주석가의 평가도 고려한다면 아리스토텔레스의 안티폰의 주장에 대한 의견이 부정적이었을 것이라는 주장이 더 설득력이 있다고 하겠다. 사실, 아리스토텔레스의 안티폰에 대한 의견을 완전히 부정적으로 해석한 것이 더 보편적이라고 할 수 있다 [1, p. 74].

이와 관련해, 현대의 퇴플리츠는 안티폰은 그 당시에도 문제의 초점을 놓친 사람이고 안티폰의 아이디어에 대해서는 "이러한 논증은 가는 펜으로 그린 구체적인 원에 대해서는 타당할 수 있지만, 기하학의 이상적인 원에 대해서는 타당하지 않기에 아리스토텔레스에 의해 기각되었다 [11, p. 12]." 고 단언한다.

셋째, 안티폰이 '무한히 많은 변으로 이루어진 다각형이 존재하며 그것이 원과 일치한다.' 는 주장을 했다면, 그의 주장은 연속체의 무한분할가능성을 부정하는 것인데 이러한 측면에 대해 고대 그리스의 학자들은 명확히 인식하고 있었다는 점이다.

이러한 분석결과에 기초하면, 고대의 실진법이 안티폰의 아이디어에 근거해 만든 방식인지에 대해 의문이 제기된다. 도리어, 심플리키우스의 주석에 근거하면 실진법은 안티폰의 '완전한 소진' 의 아이디어에 대한 저항으로부터 나왔다고 보는 것이 더욱 합리적이다 [2, 8, 9].

예를 들어, 퇴플리츠는 안티폰이 했던 추론, 즉 무한한 변 또는 충분한 변의 수를 가진 정다각형을 원으로 간주하는 추론의 불완전함에 대한 수학적 보충이 요구되었는데 이러한 필요가 실진법의 출현으로 이어졌을 것이라고 다음과 같이 추측하였다.

> "기하는 물리적인 그림이 아니라 이상적인 직선을 다루므로 이런 추론은 만족스럽지 않다. 보다 완전한 증명이 필요하다. n이 아무리 크더라도 원에 내접한 n각형과 원 사이에 차이가 존재한다는 사실로 인해 보조정리[3)]가 무효화되지 않음을 보여야 한다. 이런 유형의 어려움을 극복하기 위하여 그리스의 수학자들은 실진법의 원리[4)]를 적용하였다. 그리스의 수학자들은 근사의 모호하고 직관적인 증거에

3) 두 원의 넓이의 비는 각각 반지름의 제곱의 비와 같다.
4) 퇴플리트의 원문과 그에 대한 번역서에서는 '연속성의 공리(the continuity axiom)' 라 하였지만, 앞서 밝혔듯이, 이 연구에서는 논의의 일관성을 위해 이렇게 명명하였다.

> 만족하지 않고, 명료한 논리적 증명을 처음으로 내놓았는데, 실진법의 원리는 이 증명의 모든 근거를 제공한다. 실진법의 원리는 다음과 같이 공식화할 수 있다: a와 ϵ의 값이 $a > \epsilon$로 시작하더라도, a에서 a의 반을 빼고, 그 나머지에서 또 그 나머지의 반을 빼는 과정을 계속하면, 남아있는 값은 결국 ϵ보다 작아지게 된다 [11, p. 19–20]."

심플리키우스가 말한 기하학의 원리는 "공간은 실제로 한없이 분할되기 때문에, 그 직선이 결코 원의 원주에 도달하지 않는다. 따라서 원에 내접한 n각형과 원 사이에 차이가 존재한다." 이다. 이것은 연속체의 무한분할가능성에 대한 것으로서 수학적으로 아르키메데스의 공리에 의해 표현된다고 할 수 있다.

여기서, 자연스럽게 '실진법의 원리를 따르는 증명' 의 등장과 그 이유가 설명된다고 할 수 있다. 왜냐하면 당시의 지적 혼란을 해소하기 위해, 수학계는 도형의 완전한 소진을 부정하는 것에 기초한 증명방식을 고안했을 것으로 보이는데, 실진법의 원리는 완전한 소진을 부정하는 아르키메데스 공리로부터 유도될 뿐만 아니라 도형의 근사를 다루는 원리이기에, 실진법의 원리를 따르는 증명을 구원투수로서의 새로운 증명으로 도입했을 것이라 추측되기 때문이다.

이상의 분석을 반영하면, 앞 절에서 다루었던 '자연수 n_0의 존재', '유한회인 $(n_0 - 1)$번의 절차의 존재' 는 실진법의 원리와 그에 따른 증명에 어떤 확실한 의미를 던져 준다고 할 수 있다. 그 의미란, 실진법에서의 소진은 '완전한 소진' 이 아니라 '원하는 만큼의 소진' 이라는 것이다. 그리고 이러한 의미는 역으로 '자연수 n_0의 존재', '유한회인 $(n_0 - 1)$번의 절차의 존재' 에 대해 '원하는 만큼의 소진' 이 이루어지는 것에 대한 판단 기준으로서의 의미를 부여한다고 하겠다.

물론, 이 절에서 살펴본 실진법이 등장한 계기와 이러한 분석 결과는 앞 절에서 제기했던 실진법과 극한법의 차이가 무엇인지를 분명히 알려준다. '$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < |S_{n_0(\epsilon)} - S| < \epsilon$' 에 대해서는 '원하는 만큼의 소진이 이루어지는 유한단계를 거친 이후에 멈춘다. 더 이상 소진하는 단계는 수행되지 않는다.' 고 해석할 수 있다.

이에 비해, '$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\epsilon) \longrightarrow 0 < |S_n - S| < \epsilon$' 에 대해서는 나머지가 그 이전 단계보다 절반 이하라는 귀납적 조건이 계속 유지되기에 '원하는 만큼의 소진이 이루어진 이후에도 한없이 계속 소진이 일어난다.' 고 해석[5)]할 수 있다고 하겠다.

4 실진법의 전체적인 특성

실진법의 원리에 대한 분석을 통해 도출된 '원하는 만큼의 소진' 과 '유한한 절차의 존재' 와 같은 특징은 이 원리를 이용하는 실진법 증명에도 자연스럽게 반영되기 마련이다. 이 절에서,

5) 실진법에 대한 해석과 비교하기 위해, 의도적으로 동적인 해석을 부여하였다.

우리는 이러한 특징이 실진법에 어떻게 반영되고 있는지와 그런 결과로 실진법 증명은 어떤 전체적인 특성을 갖게 되는지에 대해 아르키메데스의 실진법 증명에 대한 고찰을 통해 논의하고자 한다.

서론에서 아르키메데스가 완전한 소진, 무한분할가능성, 실진법의 원리에 기초해 포물선 조각의 면적을 실진법과 구적법을 통해 구했다는 인용문을 도입한 바 있다. 그런데 '완전한 소진' 과 '무한분할가능성' 은 서로 양립할 수 없기에, 아르키메데스가 실제로 그렇게 하였는지에 대한 의구심이 들게 마련이다. 사실, 아르키메데스는 완전한 소진을 철저하게 부정하면서 무한분할가능성과 실진법의 원리에만 기초해 포물선 조각의 면적에 대해 증명하였다. 이와 관련해, 그가 완전한 소진을 부정했다는 것은 아래의 <포물선의 구적> 의 명제 22가 명확히 보여준다.

명제 22

면적 $A, B, C, D, \cdots$ 가 있는데 각각 순서대로 그 다음 것의 네 배가 되며 가장 큰 A가 '포물호 PQq의 안에 내접하면서 그 호와 같은 밑변과 높이를 가지는' 삼각형 PQq와 같다면

$$(A + B + C + D + \cdots) < (\text{포물호 } PQq\text{의 면적})$$

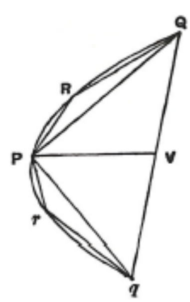

Figure 4. Proposition 22; 명제 22

R, r은 PQ, Pq의 절단으로 만들어진 조각들의 꼭짓점일 때, $\triangle PQq = 4(\triangle PQR + \triangle Pqr)$이 성립하는 이전 명제에서와 같이, $\triangle PQq = 8\triangle PQR = 8\triangle Pqr$이다.

그러므로 $\triangle PQq = A$이므로 $\triangle PQR + \triangle Pqr = B$이다. 같은 방식으로, 남는 포물호 조각들에 내접한 삼각형들을 모두 합쳤을 때 면적 C와 같게 됨을 증명하고, 이 과정을 반복한다.

따라서 $A + B + C + D + \cdots$ 는 어떤 내접하는 다각형의 면적과 같고, 포물호 조각의 면적보다 작다 [6, p. 249].

이 명제 22의 마지막 문장은, 아르키메데스가 극한 개념을 전혀 사용하지 않았을 뿐만 아니라 그가 근사를 다루는 맥락에서 '원하는 정도의 소진' 만을 고려했음을 명확히 보여준다. Heath는 아르키메데스의 저서에 대한 재해석을 통해, 포물호에 순차적으로 내접하는 모든 삼각형들을 '$A+B+C+D+\cdots$' 로 나타내었는데, 우리는 여기서의 '$\cdots$' 표현을 무한한 단계에까지 수행되는 것으로 해석해서는 안 되며, 그 표현이 주는 표면적 암시와 다르게, 아르키메데스의 의도는 유한한 단계에서 멈춘다는 것임에 유념할 필요가 있다. 즉, 그 표현은 나머지 포물호 조각들에 내접하는 삼각형들이 생성되는 방식과 그것들이 더해지는 방식이 계속해서 유지되면서 모든 삼각형들의 합이 누적되는 사항만을 제한적으로 나타내는 것에 불과하다고 하겠다.

사실, 아르키메데스가 '삼각형의 합들이 포물호 조각의 면적보다 작다.' 라고 말함으로써 '어떠한 단계의 삼각형들의 합도 결코 포물호 조각 자체가 될 수 없다.' 는 입장을 표명했다는 것은 그가 수행했던 근사 작업이 유한한 단계에서 멈추고 있음을 단적으로 보여준다고 하겠다. 한편, 이러한 '원하는 정도의 소진' 과 '유한단계까지의 근사' 라는 특징은 명제 23을 통해 더욱 확실하게 부각된다.

명제 23

면적 $A, B, C, D, \cdots, Z$ 이 있는데 가장 큰 것이 A 이고 각각 순서대로 그 다음 것의 네 배가 되면 $A+B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$ 이다.

면적 $b, c, d, \cdots$ 을 $b=\frac{1}{3}B$, $c=\frac{1}{3}C$, $d=\frac{1}{3}D$ 등과 같은 방식으로 취해본다.

그러면 $b=\frac{1}{3}B$ 이고 $B=\frac{1}{4}A$ 이므로 $B+b=\frac{1}{3}A$ 이 된다. 같은 방식에 의해 $C+c=\frac{1}{3}B$ 이다. $\cdots\cdots$

따라서 $B+C+D+\cdots+Z+b+c+d+\cdots+z=\frac{1}{3}(A+B+C+\cdots+Y)$ 이다.

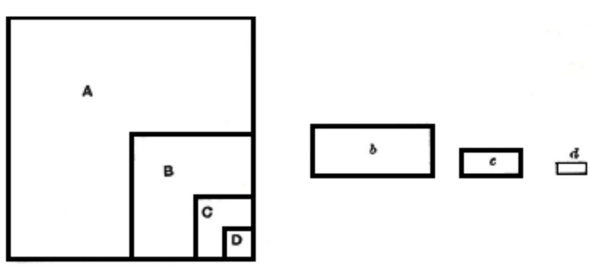

Figure 5. Proposition 23; 명제 23

그런데 $b+c+d+\cdots+y=\frac{1}{3}(B+C+\cdots+Y)$ 이다. 따라서 뺌에 의해 $B+C+D+\cdots+Z+z=\frac{1}{3}A$ 또는 $A+B+C+D+\cdots+Z+z=\frac{4}{3}A$ 이다 [6, p. 249–50].

물론, 명제 23은 귀납적 정의를 이용해 $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^{n-1} + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1} = \frac{4}{3}$를 유도하는 과정을 기하적으로 나타낸다고 할 수 있다. 그런데 이 명제를 다루는 방식에 따르면 "아르키메데스는 n번째 항 $\frac{1}{4^{n-1}}$에서 멈추고 급수의 나머지를 나타내는 항 $\frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}$을 더하였다 [2, p. 114]"는 사항이 분명하게 드러난다. 즉, 아르키메데스는 결코 $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^{n-1} + \cdots$와 같은 무한급수 또는 극한을 다루지 않았던 것이다. 사실, 명제 22의 $A + B + C + D + \cdots$은 명제 23의 $A + B + C + D + \cdots + Z$에 해당하며 유한한 단계에서 멈춘다고 하겠다.

이제 마지막으로, 실진법의 원리에 대한 분석으로부터 도출된 '원하는 정도의 소진'과 '유한단계까지의 근사'라는 특징이 실제로 어떻게 실진법 증명에까지 영향을 미쳤는지에 대해 구체적으로 살펴보도록 하자.

명제 24

포물선과 현 Qq에 둘러싸인 포물호 조각은 그 조각의 밑변과 높이를 가진 삼각형의 $\frac{4}{3}$가 된다. 가령 P가 포물호 조각의 꼭짓점일 때 $K = \frac{4}{3}\triangle PQq$라고 하자; 그러면 그 포물호 조각이 K와 같다는 것을 증명해야 한다.

그 포물호 조각이 K와 같지 않다면 그것은 더 크거나 작아야 한다.

Ⅰ. 그 포물호 조각의 면적이 K보다 크다고 가정하자.

그러면 PQ, Pq로 잘려져서 생긴 포물호 조각들에 그 조각들의 밑변과 높이를 가진 삼각형을 내접시키면, 이를테면 R, r 꼭짓점들을 가진 삼각형들을 내접시키면 그리고 남은 포물호 조각들에 같은 방식으로 삼각형들을 내접시키면, 포물호 조각에서 남는 조각들의 합이 조각 PQq가 K를 넘는 면적보다 더 작아진다.

그러므로 그렇게 형성된 다각형은 면적 K보다 커지게 된다; 그러나 $A = \triangle PQq$일 때 $A + B + C + \cdots + Z < \frac{4}{3}A$ [명제23] 이기 때문에 그것은 불가능하다.

따라서 포물호 조각의 면적은 K보다 클 수 없다.

Ⅱ. 만약 가능하다면, 그 포물호 조각의 면적이 K보다 작다고 가정하자.

$\triangle PQq = A$, $B = \frac{1}{4}A$, $C = \frac{1}{4}B$와 같은 방식으로 진행되어, K와 그 포물호 조각 사이의 차이보다 그 면적이 더 작은 어떤 면적 X에까지 이르게 되면,

$$A + B + C + \cdots + X + \frac{1}{3}X = \frac{4}{3}A = K \quad [\text{명제}23]$$

K가 $A + B + C + \cdots + X$보다 크긴 하지만 그 차이가 X보다 작고, K가 포물호의 면적보다 큰데 그 차이가 X보다 크기 때문에,

$A + B + C + \cdots + X >$ (포물호 조각)이 나오게 된다; 위의 명제 22에 의하면 이것은 불가능하다.

따라서 포물호 조각은 K 보다 작을 수 없다. 그리하여, 포물호 조각은 K 보다 클 수도 없고 작을 수도 없기 때문에 (포물호 PQq의 면적)$= K = \frac{4}{3}\triangle PQq$이다 [6, p. 251].

아르키메데스는 명제 24에서 "포물호 조각은 K 보다 클 수도 없고 작을 수도 없다."는 것을 귀류법을 통해 증명한다. 하지만 이 설명은 실진법 증명의 전체적 개요에 불과하기에, 귀류법이 실진법 증명의 겉모습을 보여주지만 그 핵심을 드러내는 것이라 말할 수는 없다. 물론, 그 특성은 실진법의 원리가 적용되는 장면에서 찾을 수 있다고 하겠는데, 명제 24의 증명에서는 그러한 모습이 두 군데에서 등장한다.

첫 번째는 "같은 방식으로 삼각형들을 내접시켜나가면, 포물호 조각에서 남게 되는 조각들의 합이 포물호 PQq가 K를 넘는 면적보다 더 작아진다."는 부분이고, 두 번째는 "같은 방식으로 진행되어, K와 그 포물호 조각 사이의 차이보다 그 면적이 더 작아지는 어떤 면적 X에까지 이르게 되면" 이라는 부분이다.

첫 번째 부분에서는, 그림 6에서와 같이 활꼴에 내접하는 삼각형이 그 활꼴의 절반 이상을 차지한다는 기하적 직관을 사용하여, 남은 포물호 조각에 같은 방식으로 삼각형들을 내접시켜 나가면 마찬가지로 그 포물호 조각에 새로 내접시키는 삼각형들이 기존에 남은 면적의 절반 이상을 차지한다는 사실을 이용한다.

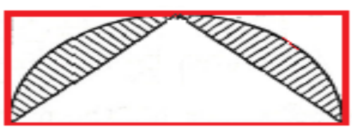

Figure 6. the geometric intuition; 기하적 직관

여기서 최초의 내접 삼각형으로부터 시작해 남은 포물호 조각들에 삼각형들을 같은 방식으로 내접시켜가면서, 각각의 단계마다 모든 삼각형들을 합체시켜 만든 다각형들을 P_1(최초의 내접삼각형), P_2, P_3, $\cdots$ 라고 생각해보자. 그렇게 가정하면, '포물호 $PQq - K$' 가 아무리 작더라도 기하적 직관을 통해 실질법의 원리에 대한 명제의 전제를 충족시킴을 확인했기에, 어떤 유한한 $(n_0 - 1)$ 단계 만에 '포물호 $PQq - P_{n_0}$' 이 '포물호 $PQq - K$' 보다 작게 된다고 말할 수 있다. 즉, '$P_{n_0} > K$' 라고 할 수 있다. 이로부터 명제 23의 결과를 이용하면 아래의 두 과정을 통해 '$P_{n_0} > K$' 에서 '$0 > \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n_0}\triangle PQq$' 의 모순에 이른다.

$$\triangle PQq + \frac{1}{4}\triangle PQq + (\frac{1}{4})^2\triangle PQq + \cdots + (\frac{1}{4})^n\triangle PQq = P_{n_0} > K = \frac{4}{3}\triangle PQq,$$

$$\begin{aligned} P_{n_0} &> K \\ &= \frac{4}{3}\triangle PQq \\ &= \triangle PQq + \frac{1}{4}\triangle PQq + (\frac{1}{4})^2\triangle PQq + \cdots + (\frac{1}{4})^{n_0}\triangle PQq + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n_0}\triangle PQq \end{aligned}$$

실진법의 원리가 적용되는 두 번째 장면에서는 $\triangle PQq = A,\ B = \frac{1}{4}A,\ C = \frac{1}{4}B$와 같이 그 이전의 양과 비교해 $\frac{1}{4}$이 나머지로 남는 상황을 이용한다. 나머지로서의 $(\frac{1}{4})^n$은 이전 단계에서의 어떤 양의 $\frac{3}{4}$을 채우면서 남는 양을 나타내기에, 실진법의 원리의 적용대상이 된다. 따라서 "K와 그 포물호 조각 사이의 차이보다 그 면적이 더 작게 되는 어떤 면적에 X까지 이르게 된다." 고 유도된다고 하겠다. 즉, $\exists X$ s.t. $(K -$ 포물호 $PQq) > X$가 성립하게 된다.

그러면, '$K -$ 포물호 $PQq > X$' 이 되고 '$K - (A + B + C + \cdots + X) = \frac{1}{3}X$' 이 명제 23에 의해 성립하므로 '$A + B + C + \cdots + X >$ 포물호 PQq' 의 모순이 유도된다.

그런데 이렇게 유도한 두 가지 모순의 실체는 무엇일까? '$0 > \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n_0}\triangle PQq$' 이 모순인 것은 나머지로서의 $\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n_0}\triangle PQq$이 항상 0보다 크다는 사실에 반한다는 것, 즉 연속체의 무한분할가능성에 위배된다는 것을 나타내는 것이고 '$A + B + C + \cdots + X >$ 포물호 PQq' 이 모순인 것도 연속체로서의 포물호 PQq는 무한히 분할될 수 있으며 완전히 소진되지는 않는다는 것에 대해 반함을 나타낸다고 하겠다.

이상의 논의에 비추어볼 때, 실진법의 원리를 적용하는 실진법 증명은 어떤 특성을 가진다고 할 수 있을까? 일단, 실진법 증명에서는 "포물호 조각에 새로 내접시키는 삼각형들이 기존에 남은 면적의 절반 이상을 차지한다." 는 것, 즉 '실진법의 원리의 조건' 을 부합한다는 사항을 Figure 6에서처럼 기하적 직관을 통해 정당화한다. 즉, 실진법 증명은 직관적이라 할 수 있다.

그리고 실진법 증명은 유한성을 갖추었다고 할 수 있다. 물론, 이는 실진법의 원리에 내재한 '원하는 만큼의 소진' 과 '유한한 절차의 존재' 와 같은 특징이 그대로 전이된 결과라 할 수 있다. 예를 들어, 포물호 조각에 삼각형들을 계속 내접시키면서 어떤 원하는 조건을 만족시키도록 할 때 그 삼각형들의 총합으로서의 도형은 유한단계를 거쳐 만들어진 어떤 다각형에 불과한 것이다. 또한, 실진법 증명은 논리적으로 정확하다고 볼 수 있다. 그 증명에서는 실진법의 원리를 적용하면서 무한분할가능성에 반하는 모순을 일관되게 유도하는 것으로 보인다.[6)]

구조적 측면에서 종합해 볼 때, 실진법 증명의 본질은 실진법의 원리를 적용하는 간접증명이라 할 수 있다. 즉, 실진법 증명을 통해 "결과적으로 우리는 논리적으로 완벽한 간접증명을 하였다. 무한과정으로 인한 신비는 실진법의 원리[7)]에 흡수되었다. 이 원리를 한 번 받아들이게 되면 모든 증명에서 새롭고 애매한 직관적인 증거에 의지할 필요가 없어진다. 이것이 그리스의 실진법의 의미이다 [11, p. 22]." 요약하면, 실진법 증명은 '익숙하고 분명한 기하적인 직관' 과 '실진법의 원리' 에만 기초해서 유한단계를 거치면서 논리적으로 정확하게 수행하는 증명이라

6) 실진법이 지니는 이러한 직관성, 유한성, 논리적 정확성은 그리스 기하학 전체의 본질적 특성이기도 하다. 이와 관련해, 보이어는 "(에어독소스의) 업적들은 모든 점에서 유한하고, 직관적으로 분명하고, 논리적으로 정확한 사고에 바탕을 둔다. 방법과 정신적인 면에서 유클리드의 후기 연구는 플라톤보다 에우독소스에게 훨씬 더 의존하는 것을 볼 것이다 [2, p. 35]." 고 주장한 바 있다.

7) 원문에는 '연속성의 공리(the continuity axiom)' 로 나옴

볼 수 있다.

5 결론 및 시사점

안티폰의 '완전 소진' 아이디어는 실진법의 뿌리일까? 이 연구의 결과는, 실진법은 그 아이디어를 인정하는 것으로부터가 아니라 그것을 부정하는 것에서부터 출발했음을 보여준다. 즉, 안티폰의 아이디어가 실진법의 뿌리인 것은 맞지만 실진법은 그 아이디어에 대한 계승이 아니라 그에 대한 반작용으로 출현하게 된 것임을 알려준다.

그러면 실진법과 극한법은 거의 같은 것일까? 대수적으로 볼 때, 실진법에서의 결과는 $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < |S_{n_0(\epsilon)} - S| < \epsilon$을 나타낸다. 이와 비교해, 극한법에서 극한값을 가질 경우에 $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\epsilon) \longrightarrow 0 < |S_n - S| < \epsilon$와 같이 나타낸다. 분명히 유사한 부분이 있다. 하지만 이 연구에서의 결과는 실진법에서는 의식적으로 오직 '유한한 단계'[8)]만을 다루고, 극한법에서와는 달리, '그 이후' 를 취급하지는 않음을 명확히 보여준다.

역사적으로, 실진법과 극한법의 유사성에 대한 잘못된 인식은 이미 17세기부터 발생했던 것으로 보인다. 보이어에 따르면, "exhaustion이란 단어는 17세기까지는 이것(남은 크기를 우리가 원하는 만큼 작게 만들 수 있다는 사실)과 연관되어 쓰이지 않았는데, 그때는 수학자들이 고대 그리스 과정과 즉시 미분적분학으로 이끌며 진정으로 크기를 '소모한(exhausted)' 그들 자신의 새로운 방법들을 나타내기 위해 그 단어를 다소 모호하고 무비판적으로 사용하였다 [2, p. 39]." 고 한다.

실진법이란 잘못된 명칭부여가 수학계에 '남은 부분을 전부 소진하게 되어, 기하적 대상물의 (수) 열이 마침내 어떤 기학적 대상이 되고 만다.' 는 인상을 줄곧 낳았다고 볼 수 있다. 즉, 소진한다는 어감에 의해 '정다각형의 열이 언젠가는 원이 된다.' 와 같은 심상을 형성시켜왔던 것이다. 그리고 이러한 소진법에 대한 잘못된 이미지에 기초해서, 극한법에 대해서도 '어떤 수열이 어떤 극한값에 닿는 것을 다룬다.' 라는 인식이 자리했던 것이다.

이러한 사항을 고려해, 만약 실진법과 극한법이 '완전 소진' 아이디어를 공유하기에 실진법이 극한법의 뿌리라고 말한다면, 이 주장이 유효한 범위는 실진법에 대한 잘못된 이해가 '도달을 인정하는' 초기의 극한법의 형성에 영향을 주었다는 것에 한정해서라고 하겠다.

서론에서, 우리는 수학교사 교육에서 실진법과 극한법이 '완전소진' 의 아이디어를 공유한다는 듯이 가르치고 있다는 문제를 제기한 바 있다. 하지만 실진법과 극한법이 안티폰 아이디어를 계승한 듯이 다루는 교육은 '오해가 오해를 불러일으켰던' 수학의 흑역사를 재현하는 것에 해당한다. 더욱이, 이는 예비 수학자 및 수학교사에게 극한법이 도달가능성을 다루는

8) 이 논문에서의 집합기호 $\mathbb{N}$은 논의의 편의를 도입한 것일 뿐이며, 실진법과 극한법 안에 '집합론적인 측면' 이 있음을 의미하는 것은 전혀 아니다.

것이라는 개념이미지를 고착화시킬 위험마저 있다.

그런데 이처럼 실진법의 특성에 대한 오해의 발생과 관련해, 연구자는 퇴플리츠의 애매한 진술이 일정부분 영향을 미쳤다고 생각한다. 연구자를 포함해 많은 수학교육학자들은 그가 역사발생적 원리의 입장에서 기술한 미분적분학 책을 오랫동안 참고해 왔는데, 그가 실진법과 관련해 언급했던 다음과 같은 내용이 심각한 오해를 유발했다고 할 수 있다.

> "유클리드는 실진법의 원리에 기초한 증명을 언급했는데, 이는 안티폰이 [Figure 7]와 같이 원적문제에서 제안했던 것과 동일한 아이디어에서 비롯되었다 [11, p. 11]."

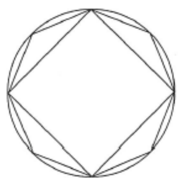

Figure 7. Antiphone's idea; 안티폰의 아이디어

물론, 이러한 언급이 수학교사용 교재에서 안티폰의 아이디어, 무한분할가능성, 실진법의 원리가 실진법 증명의 기초를 이룬다는 설명으로까지 이어졌다고 할 수 있다. 하지만 퇴플리츠는 안티폰의 '완전소진' 아이디어가 수학적으로 타당하지 않기에 이를 보충하는 수단으로 실진법이 등장했다는 것을 명확하게 언급하였다. 즉, 그는 안티폰의 아이디어와 무한분할가능성 및 실진법의 원리가 동시에 성립할 수 없다는 것을 밝혔던 것이다.

이런 사항을 고려할 때, 오해를 불러일으킨 퇴플리츠의 언급은 다음과 같이 재해석해야 할 것이다: 유클리드는 실진법의 원리에 기초한 증명을 언급했는데, 이는 안티폰이 원적문제에서 제안했던 아이디어에서 비롯되었는데 정확히는 그 아이디어에 대한 반작용으로부터 나왔다.

References

1. H. G. Apostle, *Aristotle's Philosophy of Mathematics*, Chicago, The University of Chicago Press, 1952.
2. C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, New York, Dover Publications, 1949. 김경화 역, 미적분학사—그 개념의 발달, 서울, 교우사, 2004.
3. D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*(2e), MAA, 1997. 허민 역, 실해석학(2판)—전혀 새로운 접근—, 교우사, 2009.
4. T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York, Dover Publications, 1956. 이무현 역, 기하학 원론—비율, 수—, 교우사, 1998.
5. ________, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York, Dover Publications, 1956. 이무현 역, 기하학 원론 —무리수—, 교우사, 1998.

6. ________, *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, 2010.
7. Kim N. H. et al, *Mathematics Curriculum and a Study of Teaching Materials*, Seoul, Kyung-Moon, 2017. 김남희 외, 수학교육과정과 교재연구, 서울, 경문사, 2017.
8. W. R. Knorr, *Infinity and Continuity : The Interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity*, In N. Kretzmann(ed.), Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought, Cornell University Press, 1982.
9. T. Kouremenos, Mathematical Rigor and the Origin of the Exhaustion Method, *Centaurus* 39(3) (1997), 230–252.
10. I. Thomas, *Greek Mathematics 1*, Cambridge, Harvard University, 1967.
11. O. Toeplitz, *The Calculus : A Genetic Approach*, The University of Chicago Press, 1963. 우정호, 임재훈, 박경미, 이경화 역, 퇴플리츠의 미적분학, 경문사, 2006.