韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2019.58.1.1
2019. 2. 제 58권, 제 1호, 1-20.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2019, Vol. 58, No. 1, 1-20.

‘역 분수 문제’에 대한 5학년 학생들의 해결 방법 분석

방정숙(한국교원대학교 교수)
조선미(한국교원대 대학원 학생)+

I. 서론

분수와 대수는 학교 수학에서 매우 중요한 학습 주제이면서 동시에 학생들이 가장 학습하기 어렵다고 생각하는 주제 중의 하나이다(NCTM, 2000). 범자연수가 전부였던 학생들의 수 체계가 분수를 통해 유리수로 확장되기 때문에 학생들에게 분수의 개념은 복잡하다. 또한, 학생들은 분수가 맥락에 따라 가지는 다양한 의미를 이해하고 연결해야 하며, 분수의 연산을 학습할 때는 알고리즘의 개념적 의미를 파악해야 하기 때문에 분수를 더욱 어렵게 생각한다(박현재, 김구연, 2018; Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2011).

한편 대수는 형식적이고 기호적인 특징으로 인해 중학교 수학에서 본격적으로 도입된다. 전통적으로 산술 학습이 구체적인 수와 연산에 대한 계산 과정에 중점을 두는 것에 반하여 대수는 구조와 관계에 초점을 두고 이를 일반화하는 것을 강조한다(Kieran, Pang, Schifter, & Ng, 2016). 이러한 산술과 대수의 차이로 인해 많은 학생들이 대수를 본격적으로 학습하는 중등학교에서 어려움을 겪는다(우정호, 김성준, 2007; Carraher & Schliemann, 2007). 이에 따라 최근에는 초등학교에서부터 대수적 사고를 강조하여 산술 학습과 대수 학습을 연결해야 한다는 주장이 제기되고 있다(방정숙, 최지영, 2011; Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Kieran et al., 2016).

초등학교에서 대수적 사고의 중요성이 부각되는 것과 관련하여 분수 지식과 대수 학습 사이의 관련성에 관한 관심도 높아지고 있다. 미국의 수학 자문 패널(The National Mathematics Advisory Panel, 2008)에서는 분수를 개념적으로 이해하는 것이 대수를 배우는 데 필수적이며 분수 연산을 쉽고 빠르게 할 수 있는 능력은 대수 학습의 기본이 된다고 주장하면서 분수와 대수 사이의 관계를 강조하고 있다. Barnett-Clarke 외(2011)에서도 대수에서 다루는 대부분의 예들은 분수로 표현되기 때문에 대수 학습은 분수를 이해하지 않고서는 불가능하며 이러한 표현을 잘 다루기 위하여 분수에 관한 지식이 필요하다고 주장한다.

하지만 학생들의 분수 이해 능력에 초점을 두고 대수적 사고와의 관련성에 관해 조사한 연구는 부족한 편이다. 이에 분수 지식과 대수적 사고 사이의 관계를 연구한 몇 개의 예외적인 논문을 살펴보면 분수를 능숙하게 다룰 수 있는 능력은 대수를 이해하는 데 필수적이며 대수에서의 성취를 예측할 수 있는 지표라는 결과를 보여준다(Empson, Levi, & Carpenter, 2011; Pearn & Stephens, 2018). 특히 Pearn과 Stephens(2018)는 선행 연구를 바탕으로 초등학생들에게 ‘역 분수 문제(Reverse Fraction Problems)’를 제시하여 학생들의 해결 방법을 탐색하고 이와 관련하여 학생들이 어떻게 분수 구조(fractional structure)를 이해하고 활용하며 일반화할 수 있는지 분석하였다. 여기서 ‘역 분수 문제’란 예를 들어, “10개의 동그라미가 있는데, 이것은 처음에 가지고 있던 동그라미 수의 $\frac{2}{3}$이다. 처음에 가지고 있던 동그라미의 수는 몇 개인가?”와 같이, 부분에 해당하는 양(partial quantity) 10과, 이 양과 동치인 분수(equivalent fraction of partial quantity) $\frac{2}{3}$가 주어졌을 때 전체에 해당하는 양(the quantity of an unknown whole), 즉 분수 $\frac{3}{3}$에 해당하는 양을 구하는 문제이다(Pearn & Stephens,

---

* 접수일(2018년 10월 18일), 수정일(1차: 2018년 11월 14일, 2차: 2018년 12월 19일), 게재확정일(2018년 12월 20일)
* ZDM 분류 : C32
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 역 분수, 대수적 사고, 수학적 구조, 문제 해결 방법
† 교신저자

2018, p. 241).

이와 같은 연구 배경을 바탕으로 본 연구에서는 아직 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들을 대상으로 '역 분수 문제'를 어떻게 해결하는지 그 방법을 살펴보고자 하였다. 사실 분수의 나눗셈을 학습한 이후에는 '역 분수 문제'를 쉽게 해결할 수 있기 때문에, 5학년 학생들을 대상으로 하여 주어진 문제에 어떻게 접근하는지 그 해결 과정을 살펴보는 데 초점을 두었다. 구체적으로 여러 문제 맥락(예를 들어 부분에 해당하는 양이 연속량 또는 이산량인 경우)에 따라 학생들의 문제 해결 방법이 어떻게 달라지는지 자세히 살펴보고, 어떤 문제 맥락에서 상위 해결 방법을 더 많이 사용하는지를 중점적으로 분석하였으며 해결 과정에서 드러나는 대수적 사고를 부가적으로 탐색하고자 하였다.

II. 이론적 배경

1. 분수와 대수적 사고에 관한 선행연구 고찰

분수 지식과 대수적 사고에 관한 연구는 학생들이 가진 분수 지식과 대수적 사고를 바라보는 관점에 따라 다음과 같이 나누어 살펴볼 수 있다. 첫째, 방정식을 해결할 때 학생들이 분수 지식을 어떻게 사용하는지를 살펴본 연구이다(이혜민, 신인선, 2011; Lee & Hackenburg, 2014). 특히 이 연구들에서는 분수 지식을 스킴의 관점에서 살펴보았는데 이혜민과 신인선(2011)의 연구에서는 방정식을 배우지 않은 초등학교 5학년 학생 2명을 대상으로 $ax=b$형태의 일차방정식을 조작적으로 해결하는 과정에서 분수 스킴과 조작을 어떻게 사용하는지를 조사하였다. 연구 결과에 따르면, 미지수와 주어진 양 사이의 동치 관계를 세우는 데 학생들은 반복 분수 스킴(iterative fraction scheme)을 사용하였으며, 동치관계를 세우고 나서 미지수를 찾는데 동치 분수가 중요한 역할을 한다는 것을 발견하였다. Lee와 Hackenburg(2014)의 연구에서는 18명의 중등학생을 대상으로 임상면담을 실시한 후, 역 반복 분수 스킴(reversible iterative fraction scheme)을 가지고 분수를 승수(multipliers)로 사용하는 7학년 학생을 대상으로 사례연구를 진행하였다. 이 연구에서는 분수에 관한 지식이 두 미지의 양 사이의 관계를 곱셈적으로 표현하는 방정식을 쓰는 데 영향을 준다는 것과 대수적 맥락에서 구조와 관계를 파악하는 데 도움이 된다는 것을 밝혔다.

둘째, 학생들이 분수 문제를 해결할 때 사용하는 관계적 사고가 대수적 사고의 전조가 된다는 생각과 관련된 연구이다(Empson et al., 2011; Pearn & Stephens, 2016, 2018; Siegler et al., 2012). 이 연구들은 분수에 관한 지식이 뛰어난 학생들이 대수 지식과 관련된 문제에서도 성과를 나타낸다는 결과들을 보고하고 있다. Siegler 외(2012)는 고등학교 학생들의 대수 및 전반적인 수학 성취와 관련된 수학적 지식은 무엇인가를 조사하기 위해 미국과 영국의 학생들을 대상으로 종적 연구를 진행하였다. 미국과 영국의 초등학교 학생들이 가진 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 분수에 관한 지식을 조사한 다음, 이 학생들이 고등학생이 되었을 때의 수학적 지식을 조사하였다. 연구 결과에 따르면 학생들의 지능, 부모의 교육 수준과 같은 외부 요인을 통제하였을 때, 초등학교 학생들의 분수에 관한 지식과 자연수의 나눗셈에 관한 지식이 고등학교에서 학생들의 대수를 비롯한 전반적인 수학적 성취에 영향을 주는 유일한 요소임이 드러났다. 즉 초등학교에서 자연수의 나눗셈과 분수를 잘 이해한 학생들이 중등학교에서 대수를 배울 때 높은 성취를 나타낸다는 것이다. Empson 외(2011)는 학생들이 분수를 관계적인 양으로 이해하게 되면 계산을 단순화하고 식을 변형하기 위해 양을 분해하고 합성할 수 있게 된다고 하였다. 학생들이 연산에 관해 관계적으로 사고하는 능력을 기른다면 식을 의미 있게 추론할 수 있으며 대수적으로 사고하는 데 도움이 된다. 또한, Pearn과 Stephens(2016)의 연구에서는 초등학교 5~6학년 학생들을 대상으로 지필 평가를 시행하였는데 연구 결과에 따르면, 분수 관련 문제를 능숙하게 해결한 학생들이 대수 지식에 관한 문제도 잘 해결하였다. 이를 통해 연구자는 분수 문제를 잘 해결하는 것이 대수적으로 사고하는 것과 관계가 깊다고 주장하였다.

이와 같이 분수에 관한 지식과 대수적 사고 사이에는 깊은 관련성이 있음을 알 수 있다. 이에 본 연구에서는 Pearn과 Stephens(2016, 2018)에서 제시한 '역 분수 문제'를 우리나라 5학년 학생들에게 제시하고, 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 특징에 관해 면밀히 살펴보았다.

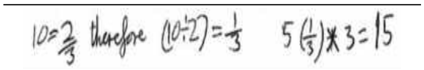
2. Pearn과 Stephens(2018) 연구의 개관

Pearn과 Stephens(2018)는 ‘역 분수 문제’를 중심으로 분수를 다루는 능력과 대수적 사고 사이의 연결에 관한 연구를 진행하였다. 우선, 예비 연구로 수학적 능력이 뛰어난 6학년 학생들 18명을 대상으로 ‘역 분수 문제’를 제시하고 그 해결 방법을 분석하였다. 후속 연구로 학업 수준이 다양한 5학년 학생들 26명과 6학년 학생들 20명의 학생들에게 지필 평가로 ‘역 분수 문제’를 해결하도록 한 후 17명을 선정하여 면담한 결과를 분석하였다. 본 연구의 목적상 지필 평가를 중점적으로 살펴보면 다음과 같다.

Pearn과 Stephens(2018)는 선행 연구를 바탕으로 (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007; Stephens & Ribeiro, 2012) 대수적 사고의 특징인 동치(equivalence)의 이해, 동치를 이용한 변형, 일반화할 수 있는 방법의 사용에 초점을 두고 학생들의 해결 방법을 분석하였다. 구체적으로, ‘역 분수 문제’를 성공적으로 해결한 학생들이 사용한 문제 해결 방법은 무엇인지, 이 학생들이 사용한 문제 해결 방법은 어떤 특징이 있는지, 학생들이 사용한 문제 해결 방법이 대수적 사고와 관계가 있는지 등을 탐색하였다.

Pearn과 Stephens(2018, p.241)의 지필 평가에서는 [표 1]에 제시한 바와 같이 총 3개의 문제를 활용하였다. 예비 연구에 참여한 6학년 학생들 18명 중 3문제를 모두 해결한 학생은 11명이었으며 그 중 수학적으로 의미 있는 풀이를 한 7명의 문제 해결 방법을 분석한 결과, 학생들은 부분에 해당하는 양과 분수 사이의 동치를 이해하고, 부분에 해당하는 양을 분자로 나누어 단위분수에 해당하는 양을 찾은 다음, 분모를 곱하여 전체에 해당하는 양을 구하는 방법을 사용하고 있었다.

학생들의 해결 방법을 살펴보기 위해 1번 문제의 예를 들면, [그림 1]과 같이 수학적 표기와 표현은 정확하지 않았지만 곱셈 방법을 활용하여 수학적으로 의미 있는 풀이를 하였다. 학생들은 단순히 그림을 그리거나 묶어서 세는 방법으로 문제를 해결한 것이 아니라 부분에 해당하는 양과 그 양과 동치인 분수 사이의 관계를 파악하였으며 양 변에 동일한 수를 곱하고 나누는 방법을 활용하여 문제를 해결함으로써 대수적으로 사고하고 있었다. 이는 대수 방정식을 해결하는 방법과 유사하다고 볼 수 있다.



[그림 1] ‘역 분수 문제’에 대한 학생들의 해결 방법의 예 (Pearn & Stephens, 2018, p. 243)
[Fig. 1] An example of students’ solution methods about Reverse Fraction Problems

[표 1] Pearn과 Stephens(2018)에서 제시한 ‘역 분수 문제’
[Table 1] Reverse Fraction Problems presented in Pearn and Stephens (2018)

문제 맥락				문제 번호	문제
부분에 해당하는 양		부분에 해당하는 양을 나타내는 분수	그림 제시		
이산량	자연수	진분수	○	1	10개의 동그라미가 있는데 이것은 처음에 가지고 있던 동그라미 수의 $\frac{2}{3}$이다. 처음에 가지고 있던 동그라미의 수는 몇 개인가?
		진분수	×	2	수지가 가지고 있는 CD의 수는 케이가 가진 CD의 수의 $\frac{4}{7}$이다. 수지가 가진 CD의 수는 12개이다. 케이가 가진 CD의 수는 몇 개인가?
		가분수	○	3	14개의 동그라미가 있는데 이것은 처음에 가지고 있던 동그라미 수의 $\frac{7}{6}$이다. 처음에 가지고 있던 동그라미의 수는 몇 개인가?

한편, Pearn과 Stephens(2018)의 예비 연구에서는 수학적 능력이 뛰어난 6학년 학생들만 연구 대상으로 하였으나, 후속 연구에서는 수학적 능력이 다양한 5학년 학생들과 6학년 학생들을 대상으로 하여 동일한 문제를 가지고 지필 평가를 하였는데, 전체 46명 중 7명의 학생들이 곱셈 방법과 고급 곱셈 방법을 활용하여 문제를 해결할 수 있었다. 그리고 이 학생들 중 일부를 면담한 결과, ‘역 분수 문제’에서 부분에 해당하는 양과, 그 양을 나타내는 분수를 임의의 양으로 제시한 경우에도 일반화할 수 있는 방법으로 문제를 해결하는 경향이 드러났다. 이를 통해 연구자들은 ‘역 분수 문제’를 해결할 때 곱셈 방법을 사용하는 것은 일반화의 전조(precursor)가 된다는 것과, 일반화할 수 있는 방법을 사용한다면 이는 대수적 사고를 드러내는 것이라고 주장하였다. 이에 본 연구에서는 우리나라 학생들이 기존에 학습하지 않은 유형인 ‘역 분수 문제’ 에 대해 어떻게 접근하는지, 특히 상위 해결 방법인 곱셈 방법을 얼마나 어떻게 사용하는지에 초점을 두고 분석하였다.

Ⅲ. 연구 방법

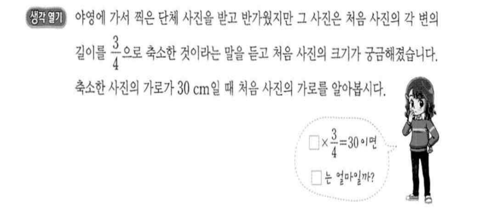
1. 연구 대상

본 연구는 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들이 ‘역 분수 문제’를 어떻게 해결하는지를 분석하고 문제 해결 과정에서 나타나는 특징을 살펴보는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 서울특별시에 소재한 초등학교 4개교와 충청북도에 소재한 초등학교 5개교를 편의 표집하여 총 9개교에서 5학년 각 1학급씩을 선정하여 전체 207명의 학생들에게 평가지를 제공하였다. 이 중 선행학습 여부를 조사하여 분수의 나눗셈을 학습한 38명의 학생들은 분석 대상에서 제외하였다.

Pearn과 Stephens(2018)의 연구에서 지필 평가는 총 3문제로 구성된 반면에([표 1] 참조), 본 연구에서는 문제 맥락에 따른 학생들의 해결 방법을 자세히 분석하기 위해서 총 12문제로 확장하였다(이에 대해서는 다음 절에서 상세히 기술함). 본 연구의 목적상 학생들이 ‘역 분수 문제’를 어떻게 해결하는지 분석하는 데 초점을 두었기 때문에, 해결한 문제의 수가 3개 이하인 123[1]명의 학생들은 분석 대상에서 제외하여 결과적으로 46명의 학생들을 최종 분석 대상으로 하였다.

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사 도구는 Pearn과 Stephens(2018)의 ‘역 분수 문제’와 우리나라 수학 교과서 6학년 1학기 4단원 <비와 비율>의 문제를 참고하였다(교육부, 2018). 예를 들어 ‘비율과 비교하는 양으로 기준량 구하기’ 차시에서는 [그림 2]와 같이 비교하는 양 30과 비율 $\frac{3}{4}$이 주어졌을 때 기준량을 구하는 문제를 제시하고 있는데, 이 문제의 구조는 ‘역 분수 문제’와 유사하다. 다만, 선행 연구에서 사용된 ‘역 분수 문제’는 모두 이산량을 사용한 반면에, [그림 2]의 경우는 연속량을 사용하고 있음에 주의를 기울일 필요가 있다.



[그림 2] ‘역 분수 문제’와 관련된 우리나라 교과서 문제의 예(교육부, 2018, p. 114)
[Fig. 2] An example of problems in the mathematics textbooks related to Reverse Fraction Problems

또한 ‘역 분수 문제’에 제시된 수가 바뀌더라도 일반화할 수 있는 곱셈 방법을 학생들이 어느 정도 일관되게 사용하는지 알아보기 위해서는 선행 연구 중 지필 평가에서 사용한 3문제가 충분하지 않다고 생각되었다. 이와 더불어 [표 1]을 자세히 살펴보면 문제 1과 문제 2의 경우 동일한 진분수 맥락에서 그림이 제시된 경우와 그렇지 않은 경우로 학생들의 해결 방법을 비교할 수 있다. 또한, 문제 1과 문제 3에서는 동일하게 그림이 제시된 맥락에서 부분에 해당하는 양이 진분수인지 가분수인지

1) 본 연구에 참여한 5학년 학생들에게 ‘역 분수 문제’는 기존에 학습하지 않은 유형의 문제이기 때문에 낮은 정답률이 특이하지는 않다고 생각된다. 이는 유사한 맥락에서 Pearn과 Stephens(2018)의 연구와 비교해 봐도 예상할 수 있다.

에 따라 분석이 가능하다. 하지만 부분에 해당하는 양을 모두 이산량과 자연수의 경우로만 제한한 것과, 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 가분수이면서 그림을 제시하지 않은 경우는 학생들이 어떻게 문제를 해결하는지 살펴볼 수 없다는 점에서 문제 맥락을 보다 체계적으로 보완할 필요가 있다고 판단하였다.

이에 다양한 문제 맥락을 고려하여 [표 2]와 같이 문제를 추가하였다. 우선 Pearn과 Stephens(2018)에서는 제시하지 않았던 부분에 해당하는 양이 연속량인 경우와 분수인 맥락을 추가하였다. 그런 다음 각각의 문제 맥락에서 학생들의 반응을 비교할 수 있도록 부분에 해당하는 양이 이산량인지 연속량인지, 그리고 자연수인지 분수인지, 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지 가분수인지, 그림이 제시되었는지 아닌지에 따라 평가지의 문제를 구성하였다. 이때 이산량에서 부분에 해당하는 양이 분수인 경우는 자연스러운 맥락이 아니라고 판단되어 다루지 않았다.

한편, 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수는 그대로 두고 부분에 해당하는 양만 변화시켰을 때 학생들이 여전히 같은 해결 방법을 사용할 수 있는지 알아보기 위해 문제 1~6번과 7~12번의 분수를 동일하게 제시하였다. 예를 들어, 문제 1번에서는 부분에 해당하는 양을 10, 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수를 $\frac{2}{3}$로 제시하였고, 같은 맥락에서 그림만 제시하지 않은 문제 7번에서는 분수 $\frac{2}{3}$는 그대로 두고 부분에 해당하는 양만 12로 변화를 주었다. 이와 관련하여 Pearn과 Stephens(2018)는 만약 학생들이 문제에 제시된 수가 바뀌어도 계속해서 같은 방법을 사용하여 문제를 해결한다면, 이를 일반화의 강력한 증거로 해석할 수 있다고 주장하였다.

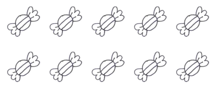
이러한 과정을 통해 개발된 검사 도구는 초등 수학

[표 2] 본 연구에서 사용한 ‘역 분수 문제’
[Table 2] Reverse Fraction Problems presented in this study

문제 맥락				문제 번호	문제의 예
부분에 해당하는 양		부분에 해당하는 양을 나타내는 분수	그림 제시		
이산량	자연수	진분수	○	1	민서가 가지고 있는 사탕의 수는 10개입니다. 이것은 지현이가 가지고 있는 사탕 수의 $\frac{2}{3}$입니다. 지현이가 가지고 있는 사탕의 수는 몇 개일까요?
			×	7	
		가분수	○	2	경수가 현재 가지고 있는 바둑알의 수는 21개입니다. 이것은 경수네 집에 있는 바둑알 수의 $\frac{7}{6}$입니다. 경수네 집에 있는 바둑알 수는 몇 개일까요?
			×	8	
연속량	자연수	진분수	○	3	내 연필의 길이는 20cm입니다. 이것은 예림이 연필 길이의 $\frac{4}{7}$입니다. 예림이 연필의 길이는 몇 cm일까요?
			×	9	
		가분수	○	4	내 몸무게는 18kg입니다. 이것은 성현이 몸무게의 $\frac{3}{2}$입니다. 성현이의 몸무게는 몇 kg일까요?
			×	10	
연속량	분수	진분수	○	5	내 필통의 무게는 $\frac{3}{7}$g입니다. 이것은 선영이 필통 무게의 $\frac{3}{5}$입니다. 선영이 필통의 무게는 몇 g일까요?
			×	11	
		가분수	○	6	교실 커텐의 길이는 $\frac{4}{7}$m입니다. 이것은 창문 세로 길이의 $\frac{4}{3}$입니다. 창문 세로의 길이는 몇 m일까요?
			×	12	

교육 전문가 1명 및 대학원에서 초등 수학 교육으로 박사 과정 중인 교사 4명의 검토를 받았다. 구체적으로 선행연구의 문제를 본 연구의 목적에 따라 문제 맥락별로 적절하게 추가하였는지, 5학년 학생들이 해결하기에 적합한 난이도의 문제인지, 어떻게 문제의 순서 및 그림을 제시하는 것이 보다 타당한지 등의 측면에서 검토를 받았다. 그런 다음 문제의 타당도, 문제 수의 적절성, 평가상의 유의점 등을 확인하기 위해 대전광역시 소재 C초등학교 5학년 1개 학급을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사의 결과를 토대로 수정한 사항을 요약하면 다음과 같다. 먼저 문제의 내용을 학생들이 이해하기 쉽도록 수정하였다. 예를 들어, 문제 1번을 예비 검사에서는 '지현이가 가지고 있는 사탕 수의 $\frac{2}{3}$는 민서가 가지고 있는 사탕의 수입니다. 민서가 가지고 있는 사탕의 수는 10개입니다. 지현이가 가지고 있는 사탕의 수는 몇 개일까요?'와 같이 제시하였는데 학생들이 문제의 의미를 파악하는 데 어려움을 겪는다고 판단하여 본 검사에서는 어순을 변경하여 제시하였다. 또한, 부분에 해당하는 양을 분수로 제시한 경우(5번, 6번, 11번, 12번)에 학생들이 문제를 잘 해결하지 못했다는 점을 참고하여 보다 문제에 쉽게 접근할 수 있도록 분수를 작게 조정하였다. 예를 들어, 예비 검사에서는 문제 11번의 분수를 $\frac{4}{5}$와 $\frac{4}{9}$로 제시하였는데 본 검사에서는 $\frac{3}{4}$과 $\frac{3}{5}$으로 수정하여 제시하였다. 모든 문제는 학생들의 사고 과정을 보다 면밀히 살펴볼 수 있도록 문제 해결 방법을 자세히

[표 3] '역 분수 문제'에 대한 학생들의 해결 방법 설명 및 예
[Table 3] Explanations and examples of students' solution methods used for Reverse Fraction Problems

1번 문제) 민서가 가지고 있는 사탕의 수는 10개입니다. 이것은 지현이가 가지고 있는 사탕 수의 $\frac{2}{3}$입니다. 지현이가 가진 사탕의 수는 몇 개일까요?	
문제 해결 방법	설명
형식화 방법	· 분수의 나눗셈을 이용하여 문제를 해결하는 방법 예) $\frac{2}{3}\div2=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\times3=\frac{3}{3}$, $10\div2=5$, $5\times3=15$ / $10\div\frac{2}{3}=10\times\frac{3}{2}=15$
곱셈 방법	· 부분에 해당하는 양을 분자로 나누어 단위분수에 해당하는 양을 구한 다음, 이에 분모를 곱하여 전체에 해당하는 양을 찾는 방법 예) $10\div2=5$, $5\times3=15$ / $\frac{2}{3}=10$, $\frac{1}{3}=5$, $5\times3=15$ · 단위분수에 해당하는 양을 구한 다름, 이를 분자와 분모에 곱하여 전체에 해당하는 양을 찾는 방법 예) $\frac{1}{3}=5$, $2\times5=10$, $3\times5=15$
부분적 곱셈 방법	· 단위분수에 해당하는 양을 구한 다음, 필요한 양만큼을 더하거나 빼서 전체에 해당하는 양을 찾는 방법 예) $10\div2=5$, $10+5=15$ / $2\times5=10$, $10+5=15$ / $\frac{1}{3}=5$, $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=15$
덧셈 방법	· 단위분수에 해당하는 양을 구한 다음, 이를 반복해서 더하는 방법으로 전체에 해당하는 양을 찾는 방법 예) $10\div2=5$, $5+5+5=15$ / $\frac{1}{3}=5$, $5+5+5=15$ / $\frac{1}{3}=5$, $\frac{2}{3}=10$, $\frac{3}{3}=15$
그림 방법	· 문제에 주어진 그림을 이용하거나 새로운 그림을 그려 문제를 해결하는 방법 · 그림만을 이용하여 문제를 해결하는 경우에는 그림 방법으로 분류함. · 그림을 이용하고 덧셈 방법, 부분적 곱셈 방법, 곱셈 방법, 형식화 방법을 함께 사용하는 경우에 각각 그림+덧셈 방법, 그림+부분적 곱셈 방법, 그림+곱셈 방법, 그림+형식화 방법으로 분류함.

기술하도록 하였다.

3. 자료 수집 및 분석

학생들은 각 반 담임교사의 감독 아래 약 40분 동안 평가지에 답과 해결 과정을 기록하였다. 평가가 끝난 후, 평가지를 수집하여 각 문제에 대한 학생들의 반응을 정답, 오답, 무응답으로 구분하였고 정답의 경우에는 어떤 해결 방법을 사용하였는지에 관해 분석하였다.

문제 해결 방법을 분류할 때는 Pearn, Pierce 그리고 Stephens(2017)에서 제시한 분석틀을 바탕으로 하되, 보다 체계적인 분석을 위해 분류 기준을 좀 더 세분화하였다. 검사 도구의 경우와 마찬가지로 초등 수학 교육 전문가 1명 및 초등 수학 교육으로 박사 과정 중인 교사 4명에게 이에 대한 검토를 받았다. 이 과정에서 특히 선행연구에서 분류하지 않았던 문제 해결 방법을 어떤 기준으로 분류할 것인지, 그 기준이 타당한지에 초점을 두고 살펴보았다.

먼저 Pearn 외(2017)에서 학생들이 단위분수에 해당하는 양을 찾고 덧셈을 한 경우 덧셈(additive) 방법, 덧셈과 곱셈을 함께 사용한 경우는 부분적 곱셈(partially multiplicative) 방법, 곱셈만 사용한 경우는 곱셈(multiplicative) 방법으로 분류한 것을 본 연구에도 그대로 적용하였다. Pearn 외(2017)에서는 분수의 나눗셈으로 문제를 해결한 경우를 고급 곱셈 방법(advanced multiplicative)으로 명명하여 분류하였으나 본 연구에서는 형식화 방법으로 구분하였다([표 3] 참조).

그러나 그림(visual) 방법의 경우에는 Pearn 외(2017)의 분석틀로 학생들의 사고 과정을 면밀히 살펴보기에 부족함이 있다고 판단하여 다음과 같이 분석틀을 세분화하였다. Pearn 외(2017)에서는 주어진 그림을 분할하거나 새로운 그림을 그려 문제를 해결한 경우를 단순히 그림 방법으로 분류하였다. 이에 반해 본 연구에서는 그림을 이용한 방법을 그림 방법, 그림+덧셈 방법, 그림+부분적 곱셈 방법, 그림+곱셈 방법, 그림+형식화 방법으로 구분하였다. 예를 들어, 그림+덧셈 방법을 사용한 학생은 단위분수에 해당하는 양을 찾은 다음 전체에 해당하는 양을 구하기 위해 반복된 덧셈을 사용한다는 점에서는 덧셈 방법을 사용한 학생과 같지만 문제를 해결할 때 주어진 그림을 분할하거나 새로운 그림을 그리는 방법을 함께 사용한다는 점에서 차이가 있다. 이와 같이 분석틀을 좀 더 세분화함으로써 문제에서 그림을 제시하는 것이 학생들의 문제 해결 과정에 어떤 도움을 주는지 좀 더 면밀히 살펴보고자 하였다.

한편 학생들의 해결 방법을 분석할 때 수학의 형식적인 측면에서 다소 정교함이 부족한 풀이 과정을 볼 수 있었다. 예를 들어 부분에 해당하는 양 10과 그 양을 나타내는 분수 $\frac{2}{3}$가 서로 같은 양을 나타내고 있다는 것을 '$\frac{2}{3}$=10'으로 표현하는 경우이다. 이는 Pearn과 Stephens(2018)에서도 드러난 경우인데, 초등학생들의 표현임을 감안하여, 수학적 표기는 정확하지 않더라도 학생들의 의미 있는 사고 과정을 파악할 수 있는 경우는 모두 정답으로 인정하고 분석의 범위에 포함하였다.

학생들의 문제 해결 방법을 분류할 때는 학생들이 가장 많이 사용한 방법을 기준으로 하였으며 방법의 수가 동률인 경우는 보다 상위 해결 방법으로 구분하여 표기하였다. 예를 들어, 해결한 문제의 수 4개 중 2개는 부분적 곱셈 방법, 2개는 곱셈 방법으로 해결한 학생의 문제 해결 방법은 곱셈 방법으로 분류하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

본 장에서는 먼저 학생들이 '역 분수 문제'를 해결하기 위해 어떤 방법을 사용했는지에 초점을 두고 살펴보았으며, 문제 해결 과정에서 나타나는 대수적 사고를 분석하였다. 그런 다음 문제 맥락별 정답률과 해결 방법을 비교・분석하여 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 맥락과 상위 해결 방법을 사용하는 맥락의 특징에 관해 알아보았다.

1. 학생들이 사용한 문제 해결 방법

1) 전체적인 경향

본 연구의 분석 대상이 된 46명의 학생들이 사용한 문제 해결 방법을 분석한 결과는 다음과 같다. [표 4]에서 알 수 있는 바와 같이, 5학년 학생들이 가장 많이 사용한 방법은 곱셈 방법으로 전체의 82.60%를 차지하고 있으며, 다음으로 그림 방법, 부분적 곱셈 방법, 덧셈 방법 순으로 나타났다. 분수의 나눗셈을 아직 배우지 않은

학생들을 대상으로 하였기 때문에 형식화 방법을 중점적으로 사용하여 문제를 해결한 학생들은 없었다. 그림 방법을 사용한 학생들의 경우 4명 중 3명은 그림+부분적 곱셈 방법을 사용하였고 1명은 그림+곱셈 방법을 사용한 것으로 나타났다. 이는 그림 방법을 사용한 학생들 대부분이 단순히 그림을 분할하거나 묶어 세는 방법으로 문제를 해결한 것이 아니라 보다 수준이 높은 방법들을 함께 사용했다는 것을 의미한다.

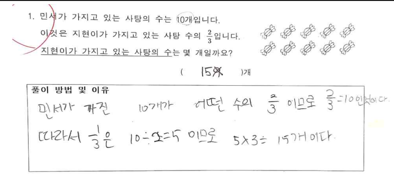
[표 4] 학생들이 사용한 문제 해결 방법 (N=46)
[Table 4] Solution methods used for Reverse Fraction Problems (N=46)

구분	그림 방법	덧셈 방법	부분적 곱셈 방법	곱셈 방법	형식화 방법	합계
학생 수 (%)	4 (8.69)	1 (2.17)	3 (3.12)	38 (82.60)	-	46 (100)

한편 어떤 학생들은 부분에 해당하는 양이나 분수가 달라져도 동일한 방법을 사용하여 문제를 해결하였으며 어떤 학생들은 문제에 따라 방법을 다르게 사용하였다. 이에 46명의 학생들 중 한 가지 방법만을 사용하여 문제를 해결한 학생들이 얼마나 있는지 분석해 보았더니 17명(36.96%)으로 나타났다. 이 중 16명은 곱셈 방법만을 사용하여 문제를 해결하였고 1명은 그림+곱셈 방법만으로 문제를 해결하였다. 이를 통해 상위 해결 방법인 곱셈 방법을 사용하는 학생들이 부분에 해당하는 양이나 분수를 다르게 제시하더라도 동일한 해결 방법으로 문제를 해결할 가능성이 더 높다는 사실을 확인할 수 있었다.

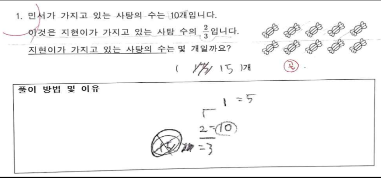
2) 세부적인 특징

본 연구의 5학년 학생들이 '역 분수 문제'를 해결하기 위해 가장 많이 사용한 방법은 곱셈 방법이다. 곱셈 방법을 사용한 학생들은 부분에 해당하는 양을 분자로 나누어 단위분수에 해당하는 양을 구한 다음 분모를 곱하여 전체에 해당하는 양을 구하였다. 예를 들어, [그림 3]과 같이 학생들은 부분에 해당하는 양 10과 그 양을 나타내는 분수 $\frac{2}{3}$가 같은 양을 나타내기 때문에 부분에 해당하는 양을 분자로 나누어 단위분수 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양 5를 구하고 이에 분모 3을 곱하여 전체에 해당하는 양이 15임을 구했다.



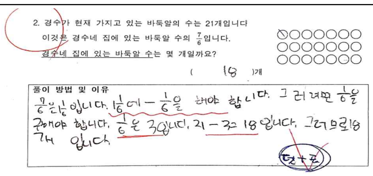
[그림 3] 곱셈 방법의 예
[Fig. 3] An example of multiplicative methods

어떤 학생들은 분자와 분모에 같은 양을 곱하는 방법으로 문제를 해결하기도 하였다. [그림 4]의 학생은 분자 2가 지현이가 가지고 있는 사탕 수 10과 같은 양을 나타내기 때문에 1(단위분수 $\frac{1}{3}$)에 해당하는 양은 5이고 구하고자 하는 양은 분모 3에 해당하는 양인 15라는 것을 알아냈다.



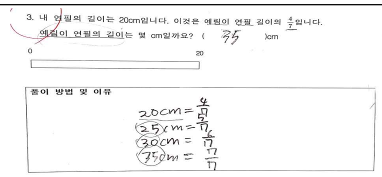
[그림 4] 곱셈 방법의 다른 예
[Fig. 4] Another example of multiplicative methods

부분적 곱셈 방법을 사용한 학생들은 곱셈 방법을 사용한 학생들처럼 단위분수에 해당하는 양을 구한 다음 바로 분모를 곱하여 전체에 해당하는 양을 찾는 것이 아니라 필요한 양만큼을 더하거나 빼는 방법으로 문제를 해결하였다. 예를 들어 [그림 5]와 같이 전체에 해당하는 양 $\frac{6}{6}$을 구하기 위해서는 문제에서 주어진 $\frac{7}{6}$에 해당하는 양에서 $\frac{1}{6}$에 해당하는 양을 빼야 한다. 따라서 이 학생은 $\frac{7}{6}$에 해당하는 양은 21이고 $\frac{1}{6}$에 해당하는 양은 3인 것을 이용하여 21에서 3을 빼서 전체에 해당하는 양이 18임을 구하였다.



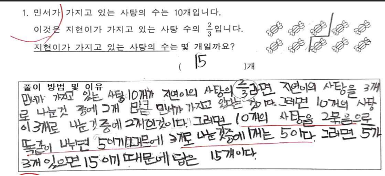
[그림 5] 부분적 곱셈 방법의 예
[Fig. 5] An example of partially multiplicative methods

덧셈 방법을 사용한 학생들은 앞서 언급한 곱셈 방법, 부분적 곱셈 방법을 사용한 학생들처럼 전체에 해당하는 양을 구하기 위해 바로 곱셈을 하거나 필요한 양만큼을 더하거나 빼는 대신 단위분수에 해당하는 양을 반복해서 더하는 방법으로 전체에 해당하는 양을 구하였다. 학생들은 [그림 6]과 같이 $\frac{4}{7}$에 해당하는 양이 20임을 확인한 후 단위분수 $\frac{1}{7}$에 해당하는 양 5를 반복해서 더함으로써 $\frac{7}{7}$에 해당하는 양이 35라는 것을 알아냈다.

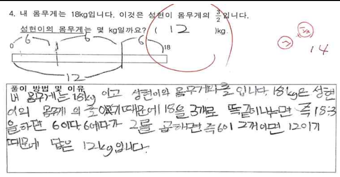


[그림 6] 덧셈 방법의 예
[Fig. 6] An example of addictive methods

그림 방법을 사용한 학생들은 문제에서 주어진 그림을 이용하거나 직접 그림을 그려서 문제를 해결하였다. 하지만 학생들은 그림만으로 문제를 해결하기보다는 앞서 언급한 곱셈 방법, 부분적 곱셈 방법, 덧셈 방법을 함께 사용하는 경우가 많았다. [그림 7]과 [그림 8]은 각각 이산량, 연속량 맥락에서 학생들이 그림을 사용하여 곱셈 방법으로 문제를 해결한 예이다. [그림 7]의 학생은 문제에서 주어진 그림을 2묶음으로 나누어 1묶음(단위분수 $\frac{1}{3}$)에 해당하는 양이 5이고, 전체에 해당하는 양은 5개의 3배인 15개라는 것을 확인하였다. [그림 8]의 학생은 띠 그림을 3등분하여 한 칸(단위분수 $\frac{1}{2}$)에 해당하는 양이 6이고, 구하고자 하는 양은 띠 그림에서 두 칸(분수 $\frac{2}{2}$)에 해당하는 양이라는 것을 파악하였다.

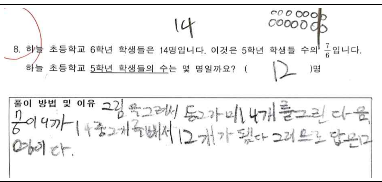


[그림 7] 그림 방법의 예 ①
[Fig. 7] The first example of visual methods



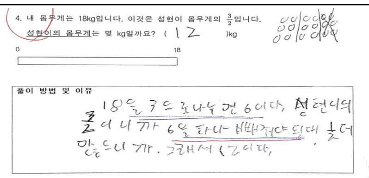
[그림 8] 그림 방법의 예 ②
[Fig. 8] The second example of visual methods

한편, 일부 학생들은 문제를 해결하기 위해 그림이 주어지지 않은 문제에 직접 그림을 그리기도 하고 제시된 맥락을 바꾸기도 하였다. 예를 들어, [그림 9]의 학생은 동그라미를 14개 그린 다음 14개가 $\frac{7}{6}$에 해당하는 양이므로 $\frac{6}{6}$에 해당하는 양을 구하기 위해서 $\frac{1}{6}$에 해당하는 양 2를 빼서 5학년 학생의 수가 12명이라는 것을 알아냈다.



[그림 9] 그림 방법의 예 ③
[Fig. 9] The third example of visual methods

다른 예로, [그림 10]의 학생은 문제에 제시된 연속량 맥락의 그림을 사용하지 않고 이산량 맥락의 그림을 그려 문제를 해결하였다. 이 학생은 동그라미를 18개 그린 다음 이를 3묶음으로 나누어 단위분수 $\frac{1}{2}$에 해당하는 양 6을 구하고 18에서 6만큼을 빼서 $\frac{2}{2}$에 해당하는 양 12를 구했다.



[그림 10] 그림 방법의 예 ④
[Fig. 10] The fourth example of visual methods

3) 문제 해결 과정에서 드러난 대수적 사고

앞에서 제시한 바와 같이, 학생들이 '역 분수 문제'를 해결하는 과정에서 사용한 문제 해결 방법은 다양했지만 세 가지 공통점을 찾을 수 있었다. 첫째, 학생들은 부분에 해당하는 양과 분수가 서로 같은 양을 나타내고 있다는 것을 파악하였다. 예를 들어 1번 문제에서 학생들은 민서가 가지고 있는 사탕의 수가 10개이고 이것이 지현이가 가지고 있는 사탕 수의 $\frac{2}{3}$라면 이 문제에서 $\frac{2}{3}$에 해당하는 양은 10과 같은 양을 나타낸다는 것을 이해하였다. 어떤 학생들은 부분에 해당하는 양 10이 $\frac{2}{3}$에서 분자 2와 동일한 양을 나타낸다고 생각하기도 하였다.

둘째, 학생들은 전체에 해당하는 양이 분수 $\frac{n}{n}$, 즉 1에 해당하는 양이 된다는 것을 이해하였다. 예를 들어, 1번 문제에서 학생들은 지현이가 가지고 있는 사탕의 수를 구하려면 전체를 나타내는 분수 $\frac{3}{3}$에 해당하는 양 또는 분모 3에 해당하는 양을 구해야 한다는 것을 알고 있었다.

셋째, 학생들은 전체에 해당하는 양을 구하기 위해 단위분수에 해당하는 양을 먼저 구해야 한다는 것을 파악하였다. 예를 들어, 1번 문제에서 학생들은 전체를 나타내는 분수 $\frac{3}{3}$에 해당하는 양을 구하기 위해 단위분수 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양을 먼저 구했다. 그런 다음 단위분수에 해당하는 양을 반복해서 더하는 방법(덧셈 방법), 부분에 해당하는 양에서 필요한 양만큼을 더하거나 빼는 방법(부분적 곱셈 방법), 단위분수에 해당하는 양에 바로 분모를 곱하는 방법(곱셈 방법)을 이용하여 문제를 해결하였다.

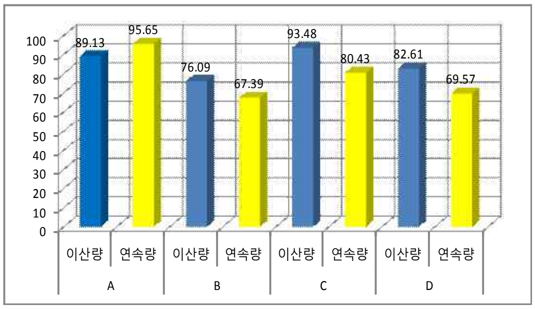
이와 같은 공통점은 Pearn과 Stephens(2018)에서 대수적 사고의 특징으로 제시했던 동치의 이해, 동치를 이용한 변형과 일맥상통한다. 즉 학생들은 '역 분수 문제'의 의미를 이해하고 문제에 제시된 분수의 구조를 파악함으로써 부분에 해당하는 양과 분수 사이의 동치 관계를 이해할 수 있었으며, 다양한 방법을 사용하여 아직 학습하지 않은 문제를 해결할 수 있었다.

2. 문제 맥락에 따른 학생들의 정답률 및 해결 방법 분석

1) 문제 맥락별 정답률

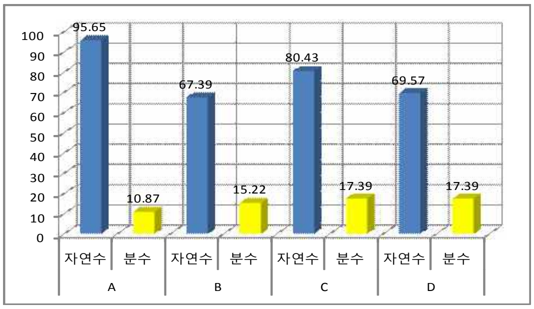
5학년 학생들이 어떤 맥락의 문제를 더 잘 해결하는지 알아보기 위해 문제 맥락에 따른 정답률을 비교해 보았다([표 5] 참조). 선행 연구에 비해 문제 맥락을 좀 더 체계적으로 다양하게 구성하였기 때문에, 문제를 해결한 학생들이 보다 쉽게 접근할 수 있는 문제 맥락에 관한 정보를 얻을 수 있었다. 본 절에서는 문제 맥락별 정답률만 간단히 살펴보고 후속 절에서 문제 맥락별로 학생들이 어떤 해결 방법을 사용했는지 구체적인 분석 결과를 제시하였다.

첫째, 부분에 해당하는 양이 이산량인지 연속량인지에 따른 정답률은 전반적으로 이산량 맥락에서 더 높았다(1번과 3번, 7번과 9번, 2번과 4번, 8번과 10번). 다만 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수이고 그림이 제시된 1번과 3번 맥락에서는 연속량인 경우에 정답률이 더 높았다. 학생들은 이산량 맥락에서 상대적으로 그림 방법을 사용하여 문제를 해결한 경우가 많았는데(후속 절의 [표 6]과 [표 7]에서 자세히 다룸), 이는 문제의 구조를 파악하기 위해 주어진 그림을 이용하거나 그림을 그릴 때 연속량 맥락보다는 이산량 맥락에 더 쉽게 접근할 수 있었기 때문인 것으로 유추된다.



* A: 자연수, 진분수, 그림 ○ B: 자연수, 진분수, 그림 ×
C: 자연수, 가분수, 그림 ○ D: 자연수, 가분수, 그림 ×

[그림 11] 부분에 해당하는 양이 이산량인지 연속량인지에 따른 정답률
[Fig. 11] A percentage of correct answers according to the problem contexts in which the partial quantity with a natural number is discrete or continuous



* A: 연속량, 진분수, 그림 ○ B: 연속량, 진분수, 그림 ×
C: 연속량, 가분수, 그림 ○ D: 연속량, 가분수, 그림 ×

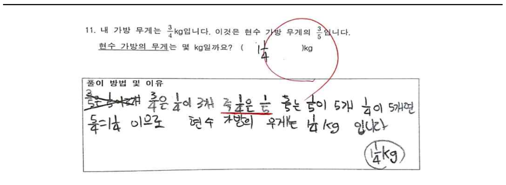
[그림 12] 부분에 해당하는 양이 자연수인지 분수인지에 따른 정답률
[Fig. 12] A percentage of correct answers according to the problem contexts in which the partial quantity is a natural number or a fraction

둘째. 부분에 해당하는 양이 자연수인지 분수인지에 따른 정답률을 살펴보았다(3번과 5번, 9번과 11번, 4번과 6번, 10번과 12번). 부분에 해당하는 양이 연속량, 분수인 맥락([그림 13]의 문제 참조)에서는 학생들이 정답을 맞힌 빈도수가 자연수 맥락에 비해 현저히 낮다.

앞서 언급한대로 학생들이 ‘역 분수 문제’를 해결하기 위해서는 부분에 해당하는 양과 분수가 서로 같은 양을 나타내고 있음을 파악하고 전체에 해당하는 양이 분수 $\frac{n}{n}$(=1)이라는 것을 이해하여 단위분수에 해당하는 양을 구해야 한다. 하지만 이 문제에서는 부분에 해당하는 양을 분수로 제시하였기 때문에 5학년 학생들이 문제의 구조를 파악하는 데 어려움을 겪었을 것으로 판단된다.

[표 5] 문제 맥락별 정답률 (N=46)
[Table 5] A percentage of correct answers according to the problem contexts

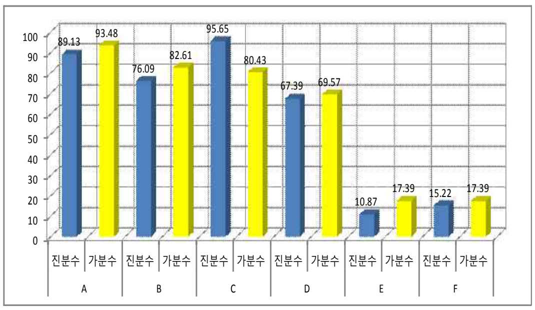
문제 맥락				문제 번호	빈도수(%)
부분에 해당하는 양		부분에 해당하는 양을 나타내는 분수	그림 제시		
이산량	자연수	진분수	○	1	41(89.13)
			×	7	35(76.09)
		가분수	○	2	43(93.48)
			×	8	38(82.61)
연속량	자연수	진분수	○	3	44(95.65)
			×	9	31(67.39)
		가분수	○	4	37(80.43)
			×	10	32(69.57)
연속량	분수	진분수	○	5	5(10.87)
			×	11	7(15.22)
		가분수	○	6	8(17.39)
			×	12	8(17.39)



[그림 13] 부분에 해당하는 양이 분수인 맥락에서 곱셈 방법을 사용하여 문제를 해결한 예

[Fig. 13] An example of multiplicative methods for the problems in which the partial quantity with a fraction is continuous

셋째, 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지 가분수에 따른 정답률을 비교해 보았을 때는 대체적으로 가분수 맥락에서 문제의 정답률이 더 높은 것을 확인하였다(1번과 2번, 7번과 8번, 3번과 4번, 9번과 10번, 5번과 6번, 11번과 12번). 하지만 예외적으로 부분에 해당하는 양이 연속량이고 그림이 제시된 맥락인 3번과 4번에서는 진분수 맥락의 정답률이 더 높았다.



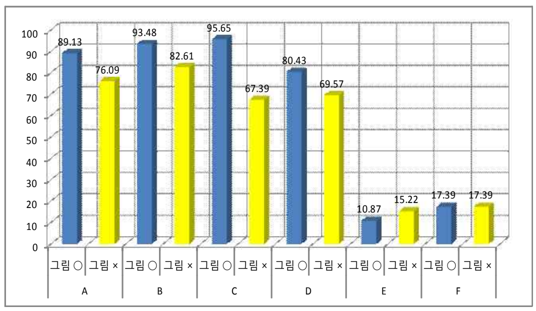
* A: 자연수, 이산량, 그림 ○ B: 자연수, 이산량, 그림 ×
C: 자연수, 연속량, 그림 ○ D: 자연수, 연속량, 그림 ×
E: 분수, 연속량, 그림 ○ F: 분수, 연속량, 그림 ×

[그림 14] 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지 가분수인지에 따른 정답률

[Fig. 14] A percentage of correct answers according to the problem contexts in which the equivalent fraction of partial quantity is a proper fraction or an improper fraction

학생들은 가분수 맥락에서 그림+부분적 곱셈 방법과 부분적 곱셈 방법을 상대적으로 많이 사용하는 것으로 드러났는데(후속 절의 [표 6], [표 7], [표 8]에서 자세히 다룸), 이는 학생들이 전체에 해당하는 양 $\frac{n}{n}$을 구하기 위해 가분수 맥락에서 필요한 양만큼 빼는 것을 진분수 맥락에서 필요한 양만큼 더하는 것보다 더 쉽게 생각할 수도 있음을 드러낸다. 예를 들어, $\frac{7}{6}$에 해당하는 양에서 $\frac{6}{6}$만큼을 구하기 위해 $\frac{1}{6}$에 해당하는 양을 빼는 과정과, $\frac{2}{3}$에 해당하는 양에서 $\frac{3}{3}$만큼을 구하기 위해 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양을 더하는 과정 중 전자를 더 쉽게 할 수 있다는 것이다. 이러한 경향은 연속량 맥락보다 이산량 맥락에서 더 두드러지게 나타났으며, 이산량 맥락에서는 특히 그림+부분적 곱셈 방법을 많이 사용하였다. 이는 앞서 분석한 바와 같이 학생들이 그림을 이용하여 필요한 양만큼 빼는 방법을 사용할 때 이산량 맥락을 연속량 맥락보다 좀 더 쉽게 접근할 수 있기 때문으로 판단된다.

넷째, 그림 제시 여부에 따라 정답률을 비교해 보았더니 대부분 그림이 제시된 경우에 학생들이 문제를 더 잘 해결하는 것으로 드러났다(1번과 7번, 2번과 8번, 3번과 9번, 4번과 10번, 5번과 11번, 6번과 12번). 특히 부분에 해당하는 양이 연속량이고 자연수인 맥락에서 그림을 제시하였을 때 정답률이 확연히 높아짐을 알 수 있다. 그러나 부분에 해당하는 양이 분수인 경우에는 그림을 제시하는 것이 정답의 빈도수에 크게 영향을 끼치지 않음을 알 수 있다.



* A: 자연수, 이산량, 진분수 B: 자연수, 이산량, 가분수
C: 자연수, 연속량, 진분수 D: 자연수, 연속량, 가분수
E: 분수, 연속량, 진분수 F: 분수, 연속량, 가분수

[그림 15] 그림 제시 여부에 따른 정답률

[Fig. 15] A percentage of correct answers according to the problem contexts in which the diagram is presented or not

2) 문제 맥락별 해결 방법

본 절에서는 학생들이 어떤 문제 맥락에서 상위 해결 방법인 곱셈 방법과 형식화 방법을 더 많이 사용하는지 알아보기 위해 맥락별로 학생들이 사용한 해결 방법을 분석하였다. 특히 선행 연구를 바탕으로 하되, 여러 가지 문제 맥락을 고려하여 추가 문제를 구성하였기 때문에, 보다 자세히 맥락에 따른 학생들의 해결 방법을 살펴볼 수 있을 것이라고 기대되었다. 이를 위해 오답과 무응답인 경우는 제외하고 정답에 한해 문제 해결 방법의 빈도 수 및 비율(%)을 기록하였으며, 학생들이 사용한 해결 방법 중 곱셈 방법이 차지하는 비율을 중심으로 각 문제 맥락을 비교하여 살펴보았다.

첫째, 부분에 해당하는 양이 이산량, 자연수인 맥락에서 학생들이 사용한 문제 해결 방법을 살펴보면 [표 6]과 같다. 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 각각 진분수, 가분수로 같은 맥락에서 그림이 있는 경우와 없는 경우를 비교해 보면(1번과 7번, 2번과 8번) 그림이 있는 문제보다 그림이 없는 문제에서 곱셈 방법의 비율이

[표 6] 이산량, 자연수 문제 맥락에서 학생들이 사용한 해결 방법
[Table 6] Students’ solution methods for the problems in which the partial quantity with a natural number is discrete

문제 맥락				문제 번호	문제 해결 방법		빈도수(%)
부분에 해당하는 양		부분에 해당하는 양을 나타내는 분수	그림 제시				
이산량	자연수	진분수	○	1 (N=41)	그림 사용	그림	1(2.44)
						그림+덧셈	-
						그림+부분적 곱셈	2(4.88)
						그림+곱셈	**8(19.51)**
					덧셈		1(2.44)
					부분적 곱셈		2(4.88)
					곱셈		**27(65.85)**
			×	7 (N=35)	그림 사용	그림	-
						그림+덧셈	1(2.86)
						그림+부분적 곱셈	1(2.86)
						그림+곱셈	**1(2.86)**
					덧셈		3(8.57)
					부분적 곱셈		1(2.86)
					곱셈		**28(80.00)**
		가분수	○	2 (N=43)	그림 사용	그림	1(2.33)
						그림+덧셈	1(2.33)
						그림+부분적 곱셈	7(16.27)
						그림+곱셈	**8(18.60)**
					덧셈		1(2.33)
					부분적 곱셈		3(6.98)
					곱셈		**22(51.16)**
			×	8 (N=38)	그림 사용	그림	-
						그림+덧셈	-
						그림+부분적 곱셈	5(13.15)
						그림+곱셈	-
					덧셈		-
					부분적 곱셈		3(7.89)
					곱셈		**30(78.95)**

더 높았다. 하지만 그림이 있는 문제에서는 그림+곱셈 방법의 사용이 곱셈 방법 다음으로 높은 비율을 차지하였다. 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지, 가분수인지에 따라 비교해 보면(1번과 2번, 7번과 8번) 그림이 있는 문제와 그림이 없는 문제 모두 진분수인 경우에 곱셈 방법의 비율이 더 높았다.

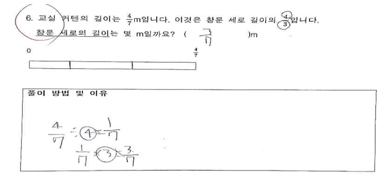
둘째, 부분에 해당하는 양이 연속량, 자연수인 맥락에서 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 각각 진분수, 가분수로 같은 경우에 그림이 있는 문제와 그림이 없는 문제를 비교해 보았다(3번과 9번, 4번과 10번). 분석한 결과, 그림이 없는 문제에서 그림이 있는 문제보다 곱셈 방법의 비율이 더 높았으며, 그림이 있는 문제에서는 그림+곱셈 방법의 사용이 곱셈 방법 다음으로 많았다. 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지, 가분수인지에 따라 비교해 보면(3번과 4번, 9번과 10번) 그림이 있는 경우와 그림이 없는 경우 모두 진분수 맥락에서 곱셈 방법의 비율이 더 높았다. 이는 앞서 분석한 이산량, 자연수의 문제 맥락과 동일한 결과이다.

[표 7] 연속량, 자연수 문제 맥락에서 학생들이 사용한 해결 방법
[Table 7] Students' solution methods for the problems in which the partial quantity with a natural number is continuous

문제 맥락: 부분에 해당하는 양		문제 맥락: 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수	문제 맥락: 그림 제시	문제 번호	문제 해결 방법		빈도수(%)
연속량	자연수	진분수	○	3 (N=44)	그림 사용	그림	-
						그림+덧셈	-
						그림+부분적 곱셈	2(4.55)
						그림+곱셈	**8(18.18)**
					덧셈		1(2.27)
					부분적 곱셈		5(11.36)
					곱셈		**28(63.64)**
			×	9 (N=31)	그림 사용	그림	-
						그림+덧셈	-
						그림+부분적 곱셈	1(3.23)
						그림+곱셈	-
					덧셈		-
					부분적 곱셈		1(3.23)
					곱셈		**29(93.54)**
		가분수	○	4 (N=37)	그림 사용	그림	1(2.70)
						그림+덧셈	-
						그림+부분적 곱셈	4(10.81)
						그림+곱셈	**6(16.22)**
					덧셈		1(2.70)
					부분적 곱셈		4(10.81)
					곱셈		**21(56.76)**
			×	10 (N=32)	그림 사용	그림	-
						그림+덧셈	-
						그림+부분적 곱셈	1(3.13)
						그림+곱셈	**1(3.13)**
					덧셈		2(6.24)
					부분적 곱셈		2(6.24)
					곱셈		**26(81.25)**

한편 [표 6]과 [표 7]의 이산량과 연속량의 맥락을 비교하기 위해 같은 문제 맥락별로 살펴보았더니 그림이 있는 진분수 맥락(1번과 3번)에서만 이산량의 경우에 곱셈 방법의 비율이 더 높았다. 다시 말해, 그림이 없는 진분수 맥락(7번과 9번), 그림이 있는 가분수 맥락(2번과 4번), 그림이 없는 가분수 맥락(8번과 10번)에서는 모두 연속량 맥락에서 곱셈 방법의 비율이 더 높은 것으로 나타났다.

셋째, 부분에 해당하는 양이 연속량, 분수인 맥락에서는 다른 맥락과 다르게 소수의 학생들이 형식화 방법을 사용하기도 하였다. 이 학생들은 예를 들어 [그림 16]과 같이 부분에 해당하는 양 $\frac{4}{7}$을 분자 4로 나누어 단위분수에 해당하는 양 $\frac{1}{7}$을 구한 다음, 분모 3을 곱하여 전체에 해당하는 양 $\frac{3}{7}$을 구하였다. 부분에 해당하는 양을 분자로 나누고 분모를 곱한다는 점에서 곱셈 방법과 유사해 보이지만 보다 정확한 대수적 표현을 사용했다는 점에서 차이가 있다. 그런데 [표 8]에서와 같이 문제 5번에서는 형식화 방법을 사용한 학생들이 없어 그 원인을 살펴보았더니 5번 문제에서 형식화 방법으로 문제 해결을 시도하였으나 계산 실수를 한 학생들이 상대적으로 많았다. 이는 5학년 학생들이 아직 분수의 나눗셈을 배우지 않아 형식화 방법에 익숙하지 않기 때문으로 판단된다.



[그림 16] 형식화 방법의 예
[Fig 16] An example of advanced multiplicative methods

한편, 부분에 해당하는 양이 연속량, 분수인 맥락에서 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 각각 진분수, 가분수로 같은 경우에 그림이 있는 문제와 그림이 없는 문제에서(5번과 11번, 6번과 12번) 학생들이 사용한 해결 방법을 비교해보면 그림이 없는 문제에서 곱셈 방법과 형식화 방법을 사용한 비율이 더 높았다. 이는 앞서 살펴본 문제 맥락들과 일치하는 부분이다. 한편 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지, 가분수인지에 따라 비교했을 때는(5번과 6번, 11번과 12번) 그림이 있는 경우와 그림이 없는 경우 모두 가분수인 경우에 형식화 방법의 비율이 더 높았는데 이는 앞서 분석한 문제 맥락들과는 상반되는 결과이다.

[표 8] 연속량, 분수 문제 맥락에서 학생들이 사용한 해결 방법
[Table 8] Students' solution methods for the problems in which the partial quantity with a fraction is continuous

문제 맥락				문제 번호	문제 해결 방법	빈도수(%)
부분에 해당하는 양		부분에 해당하는 양을 나타내는 분수	그림 제시			
연속량	분수	진분수	○	5 (N=5)	부분적 곱셈	1(20.00)
					곱셈	4(80.00)
					형식화	-
			×	11 (N=7)	부분적 곱셈	1(16.67)
					곱셈	4(50.00)
					형식화	2(33.33)
		가분수	○	6 (N=8)	부분적 곱셈	1(12.50)
					곱셈	4(50.00)
					형식화	3(37.50)
			×	12 (N=8)	부분적 곱셈	-
					곱셈	4(50.00)
					형식화	4(50.00)

이와 같이 문제 맥락별로 학생들의 해결 방법에 관해 분석한 결과를 문제 맥락별 정답률과 비교하여 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 전반적으로 연속량의 문제 맥락에서 상위 해결 방법의 비율이 높았다. 학생들은 부분에 해당하는 양이 자연수, 진분수이고 그림이 제시된 맥락을 제외한 나머지 문제 맥락에서 연속량일 경우에 곱셈 방법을 다른 방법에 비해 더 많이 사용하였다. 반면 정답을 맞힌 빈도수를 비교했을 때는 이산량의 맥락이 연속량의 경우보다 더 높았다. 학생들이 이산량 맥락에서 그림 방법을 상대적으로 많이 사용하여 문제를 잘 해결한 것을 바탕으로 연속량 맥락에서 분수의 연산을 지도할 때에도 그림을 좀 더 쉽게 사용할 수 있도록 도움을 줄 필요가 있다.

둘째, 부분에 해당하는 양이 분수로 제시된 문제 맥락에서 학생들은 주로 상위 해결 방법을 이용하여 문제를 해결하였다. 부분에 해당하는 양이 분수인 경우에 정답의 빈도수가 다른 문제에 비해 현저히 낮기 때문에 단순히 비율을 비교하기에는 어려움이 있다. 하지만 정답을 맞힌 학생들이 거의 없는 문제에서 학생들이 주로 사용한 방법이 곱셈 방법과 형식화 방법이라는 것은 앞서 분석한 바와 같이 상위 해결 방법을 사용하는 학생들이 부분에 해당하는 양이나 분수가 바뀌어도, 즉 부분에 해당하는 양을 분수로 제시하더라도 일반화할 수 있는 방법을 사용하여 문제를 해결할 수 있는 가능성이 높다는 사실을 드러낸다.

셋째, 대체적으로 진분수의 문제 맥락에서 다른 방법에 비해 상위 해결 방법의 비율이 높은 편이었다. 학생들은 부분에 해당하는 양이 연속량, 분수로 제시된 맥락을 제외한 나머지 문제 맥락에서 진분수일 경우에 곱셈 방법을 사용하는 비율이 더 높았다. 하지만 정답을 맞힌 빈도수는 진분수 맥락보다 가분수 맥락에서 더 높게 나타났다. 앞서 학생들이 가분수 맥락에서 상대적으로 그림+부분적 곱셈 방법, 부분적 곱셈 방법을 많이 사용한 것을 확인하였는데 이를 바꿔 말하면 진분수 맥락에서는 이러한 방법의 사용이 어렵다는 것을 의미한다. 이를 통해 진분수 맥락에서 학생들이 좀 더 쉽게 접근할 수 있는 문제 해결 방법에 대한 고민이 필요해 보인다.

넷째, 모든 문제 맥락에서 그림이 없는 경우에 상위 해결 방법이 차지하는 비율이 더 높았다. 학생들은 부분에 해당하는 양이 이산량인지 연속량인지, 자연수인지 분수인지, 부분에 해당하는 양을 나타내는 분수가 진분수인지 가분수인지에 관계없이 그림이 없는 문제에서 다른 방법에 비해 곱셈 방법과 형식화 방법을 더 많이 사용하였다. 이는 Pearn과 Stephens(2018)에서 학생들에게 그림을 제공하지 않는 것이 보다 상위 해결 방법인 곱셈 방법을 사용하도록 이끌 수 있다고 밝힌 것과 유사한 결과이다. 하지만 정답을 맞힌 빈도수는 그림이 있는 문제가 그림이 없는 문제보다 더 높았으며. 그림이 있는 경우에는 그림+곱셈 방법을 사용하는 학생들의 비율이 상대적으로 높았다. 이는 앞서 살펴본 바와 같이 그림의 제시가 학생들이 문제의 구조를 파악하고 이해하는 데 도움을 주었기 때문으로 유추된다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들이 '역 분수 문제'를 해결하기 위해 어떤 문제 해결 방법을 사용하는지, 어떤 문제 맥락에서 상위 해결 방법을 더 많이 사용하는지를 중심으로 상세히 살펴보았다. 특히 학생들이 주어진 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 특징을 대수적 사고의 관점에서 분석한 결과, Pearn과 Stephens(2018)가 제시하였던 동치의 이해, 동치를 이용한 식의 변형, 일반화할 수 있는 해결 방법의 사용 등을 확인할 수 있었다. 이와 같은 결과를 토대로 결론 및 논의를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 문제의 의미를 이해하고 구조를 파악하는 활동은 학생들이 대수적으로 사고할 수 있도록 돕는다. 본 연구에서 5학년 학생들은 문제의 구조를 파악하여 아직 학습하지 않은 유형의 문제를 해결할 수 있었다. 구체적으로 학생들은 '역 분수 문제'를 해결하면서 부분에 해당하는 양과 분수가 서로 같은 양을 나타낸다는 것을 파악하고, 전체에 해당하는 양이 분수 $\frac{n}{n}$이 된다는 것을 이해하였으며, 이를 구하기 위해 단위분수에 해당하는 양을 구해야 한다는 것을 파악하였다. 이는 대수적 사고의 특징으로 간주되는 동치에 대한 이해, 동치를 이용한 식의 변형 등과 일맥상통한다. 즉 학생들은 문제의 의미를 이해하고 구조를 파악함으로써 부분에 해당하는 양과 분

수 사이의 동치를 이해하고 다양한 방법을 사용하여 새로운 유형의 문제를 해결할 수 있었다. 이에 교사들은 학생들이 문제를 해결할 때 문제의 의미를 이해하고 문제에 내포된 구조를 파악할 수 있도록 도와야 한다(Lampert, 2001). 구조를 파악하는 활동을 통해 학생들은 대수적으로 사고할 수 있으며 수학적으로 좀 더 의미 있게 문제를 해결할 수 있다(Kieran et al., 2016).

둘째, 그림을 제시하는 것은 초등학교 학생들이 문제의 구조를 시각화하는 데 도움을 주기 때문에 문제 해결에 효과적이다. 본 연구에서 5학년 학생들은 ‘역 분수 문제’를 해결하기 위해 곱셈 방법 다음으로 그림 방법을 많이 사용하였다. 하지만 본 연구의 학생들은 Pearn과 Stephens(2018)에서 제시한 것과 달리 단순히 그림을 분할하거나 묶어서 세는 방법으로 문제를 해결하지 않고 그림을 이용하여 문제의 구조를 시각적으로 표현한 다음 곱셈 방법과 같은 상위 해결 방법을 함께 사용하였다. 또한 학생들이 정답을 맞힌 빈도수를 비교했을 때 그림이 있는 문제 맥락의 빈도수가 그림이 없는 문제 맥락의 빈도수보다 대체적으로 더 높았다. 이와 같은 결과는 그림의 제시가 학생들이 문제의 구조를 파악하고 이해하는 데 도움을 준다는 사실을 뒷받침한다(Cooper & Warren, 2011; Moss & McNab, 2011). 이에 특히 초등학교 학생들을 대상으로 대수적 사고를 신장하기 위한 활동을 할 때 문제의 구조 파악에 도움이 되는 시각적 표현을 적극적으로 활용할 필요가 있다.

셋째, 학생들이 보다 쉽게 접근할 수 있는 문제 맥락과 상위 해결 방법을 더 많이 사용하는 문제 맥락에는 차이가 있다. 이는 본 연구에서 선행 연구에 비해 문제 맥락을 좀 더 체계적으로 구성한 것을 바탕으로 문제 맥락별 정답률과 해결 방법을 비교하여 살펴본 결과이다. 구체적으로 학생들은 부분에 해당하는 양이 이산량, 자연수이고 부분에 해당하는 양이 가분수이며 그림이 제시된 맥락에서 문제를 더 잘 해결하였다. 반면 상위 해결 방법을 더 많이 사용하는 문제 맥락은 부분에 해당하는 양이 연속량, 분수이며 부분에 해당하는 양이 진분수이고 그림이 제시되지 않은 경우로 나타났다. 이를 통해 보다 상위 해결 방법을 사용할 수 있는 학생들은 다른 학생들에 비해 쉽게 접근하기 어려운 문제도 잘 해결한다는 것을 알 수 있다. 즉 상위 해결 방법을 사용하게 되면 맥락에 관계없이 방법을 일반화하여 사용할 가능성이 더 높다는 것이다(Pearn & Stephens, 2018). 또한 학생들이 보다 쉽게 접근할 수 있는 맥락의 특징을 확인한 것은 분수의 연산을 처음 접하는 학생들의 지도에 시사점을 제시할 수 있다. 정답률이 높은 문제 맥락에서 학생들이 어떤 방법을 사용하여 문제를 해결하였는지 상세하게 살펴봄으로써 보다 의미 있는 분수 연산의 지도에 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

넷째, 학생들의 사고 과정을 좀 더 면밀히 살펴보기 위해서는 학생들에게 제시되는 문제와 분석틀을 좀 더 체계적으로 설계할 필요가 있다. 본 연구에서는 선행연구(Pearn & Stephens, 2018)에서 제시한 문제를 수정하고 보완하여 문제의 수를 12문제로 늘리고, 문제 맥락을 다양하게 구성하였다. 그 결과, 46명의 학생들 중 17명의 학생들이 곱셈 방법을 일관되게 사용하여 문제를 해결한 것을 확인하였으며, 학생들이 보다 쉽게 접근할 수 있는 문제 맥락과 상위 해결 방법을 더 많이 사용하는 문제 맥락에 관해 구체적으로 살펴볼 수 있었다. 또한 Pearn 외(2017)에서는 그림을 이용하여 문제를 해결한 경우를 그림 방법으로만 분류한 것에 반해, 본 연구에서는 그림 방법과 다른 방법의 혼용 여부에 따라 좀 더 세분화하여 학생들의 방법을 분석하였다. 그 결과 문제에 그림을 제시하는 것이 학생들이 문제를 해결하고 대수적으로 사고하는 데 도움을 준다는 것을 파악할 수 있었는데 이는 해결 방법의 분석틀을 좀 더 세분화했기에 얻을 수 있는 시사점이다.

마지막으로, 학생들이 상위 해결 방법을 사용하여 문제를 해결하는 것은 해결 방법을 일반화하고 대수적으로 사고하는 데 도움이 된다. 앞서 분석한 바와 같이 부분에 해당하는 양이나 분수를 다르게 제시하더라도 계속해서 같은 방법으로 문제를 해결한 학생들이 사용한 방법은 곱셈 방법이었다. 특히 부분에 해당하는 양이 분수인 문제 맥락의 경우, 정답을 맞힌 학생들이 많지 않았는데 그 학생들의 대부분이 곱셈 방법과 형식화 방법을 사용하여 문제를 해결하였다. 이는 Pearn과 Stephens(2018)가 대수적 사고의 특징으로 강조했던 일반화할 수 있는 방법의 사용과 관계가 있다. 즉 상위 해결 방법을 사용한 학생들은 문제에서 제시된 수가 바뀌어도 자신의 해결 방법을 일반화하여 계속해서 같은 방법으로 문제를

해결할 수 있었다. 하지만 본 연구의 지필 결과만으로 상위 해결 방법을 사용하는 학생들이 다른 방법을 사용한 학생들에 비해 좀 더 대수적으로 사고한다고 단언하기에는 무리가 있다. 대수적 사고를 지원하는 것은 해결 방법의 일반화 뿐 아니라 이를 표현하고 정당화하는 과정도 포함하기 때문이다(Blanton et al., 2011). 이에 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 대수적 사고의 특징을 좀 더 다각도로 분석할 수 있는 연구를 진행할 필요가 있다. 아무튼 본 연구를 통해 부족하나마 분수와 대수적 사고 간의 밀접한 관계를 부각시키고, 초등학교에서 분수 연산을 지도할 때 학생들이 문제의 구조를 파악하고 이를 다양한 맥락에서 일반화할 수 있는 방법에 관해 생각해 볼 수 있는 기회를 제공함으로써 학생들의 대수적 사고를 진작하는 데 도움이 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2018). 수학 6-1. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018). *Elementary mathematics 6-1*, Seoul: Chunjae Education.

박현재, 김구연 (2018). 초등학생의 분수와 분수 연산에 대한 이해 양상. 수학교육 57(4). 453-475.

Park, H. J. & Kim, G. Y. (2018). Examining how elementary students understand fractions and operations. *The Mathematical Education 57*(4). 453-475.

방정숙, 최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. 수학교육 50(1), 41-59.

Pang, J. S. & Choi, J. Y. (2011). An analysis of the whole numbers and their operations in mathematics textbooks: Focused on algebra as generalized arithmetic. *The Mathematical Education 50*(1), 41-59.

우정호, 김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습: 지도 방향 탐색. 수학교육학연구 17(4), 453-475.

Woo, J. H. & Kim, S. J. (2007). Analysis of the algebraic thinking factors and search for the direction of its learning and teaching. *Journal of Educational Research in Mathematics 17*(4), 453-475.

이혜민, 신인선(2011). 산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme에 관한 사례 연구. 초등수학교육 14(3), 261-275.

Lee, H. M. & Shin, I. S. (2011). Case Study on the fractional scheme for enhancing the connection between the arithmetic and the algebraic thinking. *Education of Primary School Mathematics 14*(3), 261-275.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2017). 유리수의 필수 이해 (방정숙, 송상헌, 김동원, 이지영, 정유경, 김정원 공역). 서울: (주)교우. (원저 2011년 출판)

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cooper, T. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Kunth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). New York: Springer.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). New York: Springer.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education 38*(3), 258 - 288.

Kieran, C., Pang. J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer Open eBooks.

Lampert, M. (2016). 가르치는 것은 왜 그렇게 어려울까? (방정숙, 권민성 공역). 서울: 경문사. (원저 2001년 출판)

Lee, M. Y. & Hackenberg, A. J. (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education 12*(4), 975-1000.

Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students'reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). New York: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). 학교수학을 위한 원리와 규준 (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역). 서울: 경문사. (원저 2000년 출판)

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for success: The final report of the national mathematics advisory panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Pearn, C., Pierce, R., & Stephens, M. (2017). In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 4, (pp. 1-8). Singapore: PME.

Pearn, C. & Stephens, M. (2016). Competence with fractions in fifth or sixth grade as a unique predictor of algebraic thinking? In B. White, M. Chinnappan, & S. Trenholm (Eds.), *Proceeding of the 39th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 519-526). Adelaide: MERGA.

Pearn, C. & Stephens, M. (2018). Generalizing fractional structures: A critical precursor to algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 237-260). Switzerland: Springer.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science 23*(10), 691-697.

Stephens, M. & Ribeiro, A. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *Revista Latinoamericano de Investigacion en Matematica Educativa 15*(3), 373-402.

An analysis of solution methods by fifth grade students about ‘reverse fraction problems’

Pang, JeongSuk
Department of Elementary Education (Mathematics Education), Korea National University of Education,
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr

Cho, SeonMi†
Graduate School of Korea National University of Education
E-mail: halifax01@naver.com

As the importance of algebraic thinking in elementary school has been emphasized, the links between fraction knowledge and algebraic thinking have been highlighted. In this study, we analyzed the solution methods and characteristics of thinking by fifth graders who have not yet learned fraction division when they solved ‘reverse fraction problems’ (Pearn & Stephens, 2018). In doing so, the contexts of problems were extended from the prior study to include the following cases: (a) the partial quantity with a natural number is discrete or continuous; (b) the partial quantity is a natural number or a fraction; (c) the equivalent fraction of partial quantity is a proper fraction or an improper fraction; and (d) the diagram is presented or not. The analytic framework was elaborated to look closely at students’ solution methods according to the different contexts of problems. The most prevalent method students used was a multiplicative method by which students divided the partial quantity by the numerator of the given fraction and then multiplied it by the denominator. Some students were able to use a multiplicative method regardless of the given problem contexts. The results of this study showed that students were able to understand equivalence, transform using equivalence, and use generalizable methods. This study is expected to highlight the close connection between fraction and algebraic thinking, and to suggest implications for developing algebraic thinking when to deal with fraction operations.

---

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : reverse fraction, algebraic thinking, mathematical structure, problem solving methods
† Corresponding author