

부재간 결합부의 동적 특성 분석 및 강성 예측

윤성호*,#

*금오공과공대학교 기계공학과

Analysis of the Dynamical Characteristics and Prediction of Stiffness for the Joint between Members

Seong-Ho Yun*,#

*Department of Mechanical Engineering, KUMOH NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(Received 3 December 2018; received in revised form 4 December 2018; accepted 26 December 2018)

ABSTRACT

This paper describes the analysis of dynamic characteristics and prediction of the stiffness for the joint between structural members. In the process of deriving the governing equations, the stiffness values responsible for the moment and shear force were modelled by using linear and torsional springs in the middle of a clamped-clamped beam. The sensitivities of the natural frequency and modal assurance criterion were investigated as a function of the dimensionless linear and torsional spring stiffness. The reliability of the predictions for the linear and torsional stiffness values was verified by the inverse computations of the stiffness matrix. The predictive and exact theoretical stiffness values were compared for the stiffness element in the finite element formulation, and their results show an excellent correlation. It is strongly anticipated that although the proposed methodology is currently limited to the analytical utilization, it will provide a useful tool to estimate unknown joint stiffness values based on the experimental natural frequency and mode shape.

Key Words : Dynamical Stiffness(동적 강성), Flexible Joint(유연 결합), Frequency Sensitivity(진동수 민감도), Modal Assurance Criterion Sensitivity(모드일치 민감도)

1. 서 론

기계, 항공, 조선, 자동차 등의 구조물에서 조인트 또는 결합부가 시스템 전체의 동적 거동에 매우 심각한 영향을 미치고 있다. 구조물의 동적인 응답의 정확한 예측은 이러한 결합부를 어떻게 설계하느냐에 따라서 달라지게 된다^[1,2].

대부분 결합부의 동적인 메카니즘 이해의 부족

으로 설계 초기에 과도한 강성을 부여한 결과 심각한 설계 오차를 야기시키고 있다. 부재들 간의 결합부를 단순히 강체 결합으로 간주하였고 동적 하중에 따른 결합부의 유연성이나 비선형적인 거동이 결여되어 있는 상태이다^[3,4].

조인트 모델의 신뢰도를 향상시킬 수 있는 방법 중의 하나는 결합부 형상을 자세한 3차원으로 만드는 것일 수 있으나 비용과 시간이 많이 든다. 더욱이 결합부를 표현할 수 있는 수치 모델도 명확하지 않으며 만일 그 모델이 성공적임에도 불구하고 대규모의 구조물을 다룰 때는 실제적이지 못

Corresponding Author : shyun@kumoh.ac.kr

Tel: +82-54-478-7324, Fax: +82-54-478-7319

하다. 특히 대형 및 복합 구조물의 경우 모델이 대형화되면 그 어려움은 더욱 커지게 된다. 이를 극복하기 위하여 여러 형태의 결합부를 강제 결합 또는 단순한 모델로 치환하는 경우가 대부분이다. 결합부의 동적 거동에 크게 영향을 주는 인자는 국부적인 유연성(local flexibility)과 에너지 소멸(energy dissipation)이나 기계 구조물의 경우 전자가 후자보다 모우드 파라메타에 영향이 크다고 알려져 있다^[5].

본 논문에서는 결합부의 모멘트와 전단력을 대표하도록 비틀림 및 선형 스프링을 사용하였다. 정량적으로 산정하기 위하여 마주보는 2개의 동일한 외팔보의 끝단에 스프링을 설정하였다^[6]. 모달 파라메타 민감도의 거동을 분석하고 이로부터 결합강성을 예측하는 기법을 소개하고 역산정법으로 유한요소의 강성행렬로부터 결합부 위치에서 강성을 정확히 산정할 수 있음을 검증하였다.

2. 이론 및 해석

2.1 결합부의 동역학적 정식화

본 연구에서 그림 1과 같이 각각 좌우단이 고정되어 보의 중간에 결합부를 대표적으로 나타내는 선형 스프링(linear spring)과 비틀림 스프링(torsional spring)으로 표시하였다. 보의 위치 x 에서 시간 t 일 때 좌우 보에서 횡방향의 변위를 $w_i = [w_{il}(x, t), w_{ir}(x, t)]^T$ 라고 가정한다. 여기서 아래 첨자 i 는 i 번째 모드, l 은 좌측 보를, r 은 우측 보를 표시하며 윗 첨자 T 는 전치(transpose)를 나타낸다. n 개의 정규 모드 중에서 i 번째 모드 $\phi_i(x)$ 에 대하여 확장이론(expansion theorem)을 적용하면 횡변위는 식 (1.a,b)로 표현된다.

$$w_l(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_{il}(x) q_i(t) \quad (1.a)$$

$$w_r(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_{ir}(x) q_i(t) \quad (1.b)$$

보의 질량이 $m(x)$ 인 운동에너지 T 는 식 (2)로 계산된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell m(x) [\dot{w}_l^2(x, t) + \dot{w}_r^2(x, t)] dx \quad (2)$$

여기서 $(\dot{\cdot})$ 은 시간 t 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (1.a,b)를 식 (2)에 대입하여 정리하면 운동에너지는 식 (3)과 (4)로 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{q}_i^2(t) \quad (3)$$

$$M_i = \int_0^\ell m(x) \phi_{il}^2(x) + \int_\ell^{2\ell} m(x) \phi_{ir}^2(x) dx \quad (4)$$

정규 모드 $\phi_i(x)$ 는 식 (3)의 일반화된 질량 M_i 에 대하여 다음의 직교(orthogonality) 성질이 식 (5)와 같이 만족한다.

$$\int_0^\ell m(x) \phi_{il}(x) \phi_{jl}(x) dx = \int_\ell^{2\ell} m(x) \phi_{ir}(x) \phi_{jr}(x) dx = 0 \quad (i \neq j), \text{ 또는 } M_i \quad (i = j) \quad (5)$$

상기와 비슷한 유도 방식을 따르면 보의 탄성에너지 U 는 식 (6)으로 표현된다.

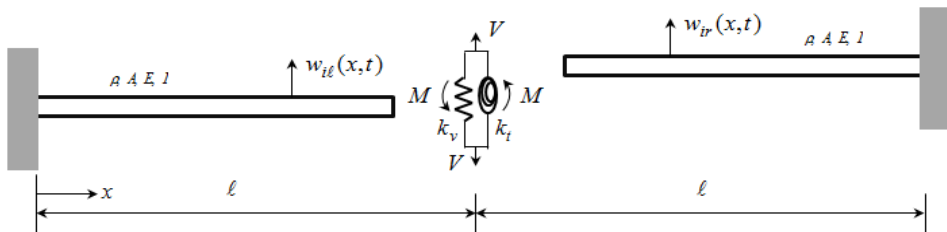


Fig. 1 A generic model for the lumped joint

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI [w_l''(x,t) + w_r''(x,t)] dx \quad (6)$$

여기서 $(\cdot)'$ 은 보의 위치 x 에 대한 미분을 나타내고 E 는 탄성계수, I 는 보의 단면 2차 모멘트이다. 식 (1.a,b)를 식 (6)에 대입하면 일반화된 강성 K_i 가 정의되고 탄성에너지는 식 (7)과 (8)로 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_i q_i^2(t) \quad (7)$$

$$K_i = \int_0^\ell EI \phi_{il}''(x) dx + \int_\ell^{2\ell} m(x) \phi_{ir}''(x) dx \quad (8)$$

또한 일반화된 힘 Q_{Ei} 는 외력 $f(x,t)dx$ 에 의한 가상 변위(virtual displacement) δq_i 로 표현된 일 W_E 로부터 식 (7)과 (8)으로 구해진다.

$$\delta W_E = \sum_{i=1}^n Q_{Ei} \delta q_i(t) \quad (9)$$

$$Q_{Ei} = \int_0^\ell [f_l(x,t) \phi_{il}(x) + f_r(x,t) \phi_{ir}(x)] dx \quad (10)$$

그림 1에서 결합부에 표시된 전단력 V 와 모멘트 M 에 의한 일 W_J 로부터 일반화된 조인트의 힘 Q_{Ji} 는 식 (11)과 (12)로 표현된다.

$$\delta W_J = \sum_{i=1}^n Q_{Ji} \delta q_i(t) \quad (11)$$

$$Q_{Ji} = [\phi_{il}(\ell) \phi'_{il}(\ell) - \phi_{ir}(\ell) - \phi'_{ir}(\ell)] \times [V_l M_l V_r M_r]^T \quad (12)$$

운동에너지 T 와 탄성에너지 U 를 라그랑지 방정식(Lagrange's equation)에 적용하여 다음의 n 개 운동 방정식을 식 (13)으로 유도할 수 있다.

$$M_i \ddot{q}_i(t) + K_i \ddot{q}_i(t) - Q_{Ji} = Q_{Ei}, (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

식 (1.a,b)에서 정규 모드들은 모달 질량 M_i 가 1이 되도록 정규화 되었으며 고유 진동수 $\omega_i^2 = K_i/M_i$ 로 산정되었다. 식 (10)에서 보의 단위 길이 당 외력 $f(x,t)$ 가 없다면 운동방정식은 식 (14)로 축약되어 표현된다.

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 \ddot{q}_i(t) - Q_{Ji} = 0, (i = 1, \dots, n) \quad (14)$$

만일 조인트 부위가 선형적으로 거동하면 모달 강성은 ω_i^2 으로 정식화되고 비선형이 있다면 세 번째 항 Q_{Ji} 가 이러한 역할을 담당하게 된다. 결합부에서의 전단력 V 와 모멘트 M 은 모드 형상 $\phi_i(x)$, 선형 스프링 강성 k_v 와 비틀림 스프링 강성 k_t 로 식 (15.a,b)로 표현될 수 있다.

$$V = EI \phi'''(\ell) = \pm k_v \phi(\ell) \quad (15.a)$$

$$M = -EI \phi''(\ell) = \pm k_t \phi'(\ell) \quad (15.b)$$

여기서 복호에서 양의 부호는 좌측의 보를 음의 부호는 우측 보에 작용하는 결합력을 보여주고 있다.

2.2 결합부의 강성 검증 알고리즘

자유도의 개수가 n 인 구조물에 대하여 질량행렬이 M , 강성행렬이 K 일 때 고유치 문제는 다음의 식 (16)과 같이 표현된다.

$$(K - \lambda M) \phi = 0 \quad (16)$$

여기서 모달 해석시 정규직교 모우드가 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ 이고, 그에 해당하는 고유치가 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 으로 주어져 있다고 가정한다.

이 때 양의 실수 $\tau (\leq \lambda_j)$ 를 선택하고 식 (17.a,b)와 같이 변형된 고유벡터 \mathbf{b}_j 를 정의한 후에 변형된 모달 행렬 B 는 질량행렬 M 과 함께 식 (18)과 같이 정의한다.

$$\mathbf{b}_j = \mu_j M \boldsymbol{\phi}_j, \quad \mu_j = \sqrt{\lambda_j - \tau} \quad (17.a,b)$$

$$B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n] \quad (18)$$

일반적으로 대칭이고 양적으로 정의된(positive definite) 강성행렬 K 는 식 (19)과 같이 표현되고 식 (17.a,b)와 (18)을 식 (19)에 대입하여 계산하면 식 (20)와 같다.

$$K = BB^T + \tau M \quad (19)$$

$$K\boldsymbol{\phi}_j = M\mu_j^2\boldsymbol{\phi}_j + \tau M\boldsymbol{\phi}_j = (\mu_j^2 + \tau)M\boldsymbol{\phi}_j \quad (20)$$

따라서 주어진 정규직교 모드와 고유치, 질량행렬이 주어지면 미지의 강성을 식 (19)로부터 추출할 수 있음을 알 수 있다.

2.3 수치해석

그림 1에서 2개의 보 중간에 결합부가 존재하지 않는 경우, 길이가 2ℓ 이고 양단이 고정인 보에서 홀수 번째 모드에서 중앙부는 전단력이 전무하고 최대의 모멘트가 작용하게 된다. 반대로 짝수 번째의 모드에서는 중앙부에서 모멘트는 전무하고 최대의 전단력이 작용한다.

길이가 ℓ 인 보에서 한쪽 단이 고정이고 다른 한쪽 단은 선형 및 비틀림 스프링으로 상기의 식 (15.a,b)를 적용하여 경계조건을 설정할 수 있다. 무차원 선형 스프링 강성 K 와 무차원 비틀림 스프링 강성 G 를 식 (21.a,b)로 설정하였다.

$$K = \frac{k_v \ell^3}{EI}; \quad G = \frac{k_t \ell}{EI} \quad (21.a,b)$$

그림 2와 3은 고유 진동수의 민감도를 보여주고 있는데 결합부가 없는 경우 강성 $K = G = \infty$ 로 간주한 고정-고정보를 기준으로 $K = G = 10^{-10} \sim 10^{10}$ 일 때의 고유진동수를 비교하였다. $K = G = 10^{-2} \sim 10^2$ 에서 유연한 결합 성질을 나타냄을 관찰할 수 있다. 민감도 0%는 차이가 없이 완전히 일치함을 의미한다.

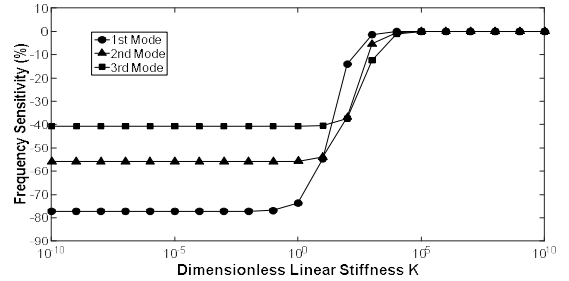


Fig. 2 Natural frequency sensitivities as a function of dimensionless linear stiffness K

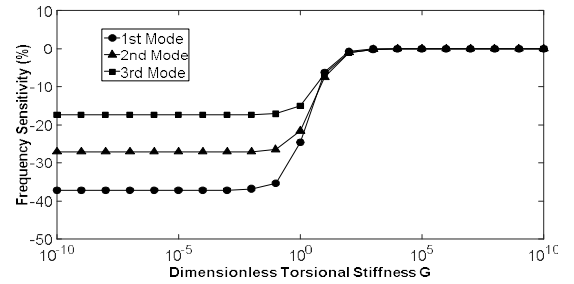


Fig. 3 Natural frequency sensitivities as a function of dimensionless torsional stiffness G

그림 4와 5는 결합부가 없는 경우 강성 $K = G = \infty$ 로 간주한 고정-고정보의 모드 형상 $\bar{\phi}_i(x)$ 를 기준으로 비교하였다. 비교의 대상이 되는 모드 $\phi_i(x)$ 가 $\bar{\phi}_i(x)$ 와 얼마나 유사한지를 나타내는 척도로서 MAC (Modal Assurance Criterion)를 사용한다. 이러한 유사도의 정량적인 척도는 식 (22)로 표현이 된다.

$$MAC(\phi_i, \bar{\phi}_i) = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \bar{\phi}_i(x) \right|^2}{\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(x) \phi_i(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(x) \bar{\phi}_i(x) \right)} \quad (22)$$

고유 진동수의 민감도에서 관찰한 바와 같이 매우 유사하게 $K = G = 10^{-2} \sim 10^4$ 에서 유연한 결합 성질을 나타냄을 관찰할 수 있다. 비틀림 강성 G 보다 선형 강성 K 가 조인트의 강건성에 미치는 영향이 훨씬 큼을 알 수 있다.

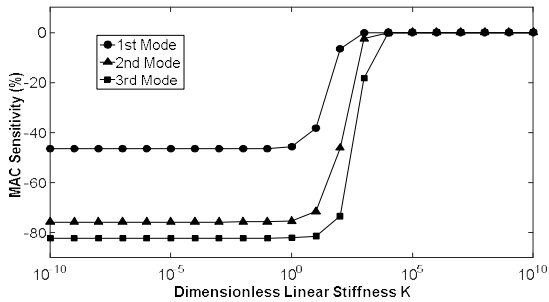


Fig. 4 Modal assurance criterion sensitivities as a function of dimensionless linear stiffness

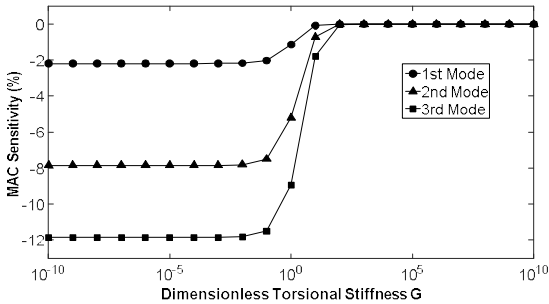


Fig. 5 Modal assurance criterion sensitivities as a function of dimensionless torsional stiffness

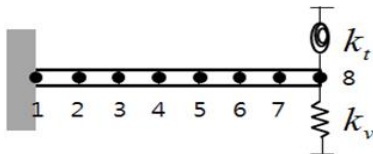


Fig. 6 An example of finite element model for one cantilever beam

그림 6은 외팔보의 끝단에 설정된 선형 및 비틀림 스프링 강성을 조인트로 대표하고 7개의 유한요소로 나누어 동적 거동을 예측하고자 한다.

보의 전체 길이 $\ell = 1.2m$, 유한요소 길이 $\ell_e = 0.1714m$, 직사각형의 단면 가로 (b) \times 세로 (h) = $0.05m \times 0.025m$, 재료의 밀도 $\rho = 7,850kg/m^3$, I 는 단면 2차모멘트, 재료의 탄성 계수 $E = 2 \times 10^{11}N/m^2$ 이다. 그림 6에서 유한요소 격자 분할에 따른 $(i-1)$ 번째와 i 번째 요소의 강성행렬 요소를 고려하면 요소 i 번째 자유도는

$[w_i \ \theta_i \ w_{i+1} \ \theta_{i+1}]^T$ 이다. w 는 횡방향 변위이고 θ 는 기울기이다. 따라서 고정단으로부터 $n(=7)$ 번째 요소에 스프링이 부착되어 있어 선형 강성행렬의 요소 $k_{2n-1,2n-1}$ 과 비틀림 강성행렬의 요소 $k_{2n,2n}$ 은 식 (23.a,b)와 같다.

$$k_{2n-1,2n-1} = \frac{EI}{\ell_e^3} \left[12 + K \left(\frac{\ell_e}{\ell} \right)^3 \right] \quad (23.a)$$

$$k_{2n,2n} = \frac{EI}{\ell_e^3} \left[4\ell_e^2 + G \left(\frac{\ell_e}{\ell} \right) \ell_e^2 \right] \quad (23.b)$$

Table 1 Natural frequency sensitivity for 2 cantilever beams with tip joints

Spring	Mode	Observed natural frequency [Hz]	Rigid model natural frequency [Hz]
Linear	1	49.66	62.08
	2	113.86	201.31
	3	257.94	420.96
Torsional	1	20.51	22.52
	2	109.04	121.72
	3	274.29	300.97

Table 2 Computations of dimensionless linear and dimensionless torsional stiffnesses

Spring	Mode	Sensitivity [%]	Dimensionless stiffness	Average Dimensionless stiffness
Linear	1	20.0	39.8107	38.3277
	2	41.4	37.1535	
	3	38.7	38.0189	
Torsional	1	8.9	3.5481	3.6314
	2	10.4	3.6308	
	3	8.9	3.7154	

Table 3 Comparisons of theoretical and predictive linear and torsional stiffnesses

Stiffness element	Theory stiffness	Predicted stiffness	Error [%]	Verified Equation Error [%]
$K_{13,13} [N/m \times 10^7]$	3.1253	3.1304	0.2	0.0
$K_{14,14} [Nm/rad \times 10^5]$	3.3813	3.4322	1.6	0.0

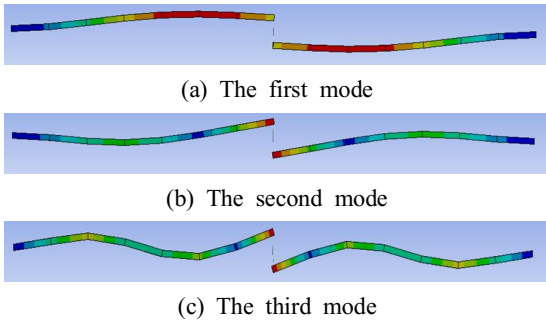


Fig. 8 Mode shapes due to flexible joint by change in linear spring stiffness

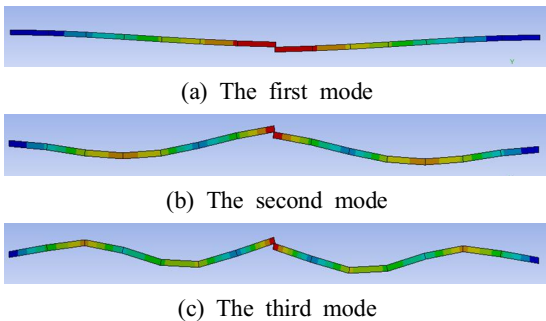


Fig. 9 Mode shapes due to flexible joint by change in linear spring stiffness

좌우가 대칭인 2개의 외팔보 중간에 미지의 강성을 가진 선형 및 비틀림 스프링을 설치하였고 고유진동수를 상용 프로그램을 사용하여 측정하였다^[7]. 표 1에 각각 1차부터 3차 모드까지의 측정 고유진동수를 정리하였고 해당 모드를 그림 8과 9에 나타냈다.

산정 민감도는 그림 2와 3의 세로축에 해당하며 이에 상응하는 무차원 강성은 가로축에서 추출한 것을 표 2에 나타냈다. 평균치의 무차원 강성을 식 (23.a,b)에서 실제의 추출 강성을 표 3에 정리하였고 오차는 2%이내임을 관찰할 수 있으며 식 (19)를 사용하여 검증하였다.

3. 결론

본 연구에서는 부재간 유연결합 강성을 추출하고자 서로 마주보는 외팔보의 끝단에 선형과 비트

림 스프링을 설치하여 정식화하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 무차원 강성의 함수로 고유진동수의 민감도를 추출하였고 약 $10^{-2} \sim 10^2$ 에서 유연함을 알 수 있다.
2. 모드 형상을 강제결합과 비교하여 모드일치도 (MAC)를 관찰한 결과 무차원 강성이 $10^{-2} \sim 10^4$ 에서 유연함을 알 수 있다.
3. 14자유도를 가진 외팔보의 유한요소 모델에서 추출한 결합 강성의 오차는 거의 없음을 알 수 있다.
4. 고유치의 매개변수가 실험적으로 확보되면 결합부 강성을 직접 추출할 수 있는 기반이 마련되었다.

후 기

“이 연구는 금오공과대학교 학술연구비로 지원되었음(2016-104-043)”

REFERENCES

1. Hong, J. P., Gong, B. C., Choi, S. D., Choi, H. J. and Lee, D. S., “Study on Structure Design of High-Stiffness for 5 - Axis Machining Center,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 10, No. 5, pp. 7-12, 2011.
2. Han, S. G., Chun, S. Y. and Kang, S. K., “Durability Design of the Thickness of Bicycle Frames,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 14, No. 6, pp. 84-89, 2015.
3. Bortman, J., and Szabo, B. A., “Analysis of Fastened Structural Connections,” AIAA Journal, Vol. 30, pp. 2758-2764, 1992.
4. Yun, S.-H. and Bauchau, O. A., “Improving Modal Parameter Predictions for Jointed Airframe Panel, Part I: Experiments,” Journal of the American Helicopter Society, Vol. 43, No. 2, pp. 164-171, 1998.

5. Goege, D., Fuellekrug, U., Sinapius, M. et al, "Advanced Test Strategy for Identification and Characterization of Nonlinearities of Aerospace Structures," AIAA Journal, Vol. 43, No. 5, pp. 974-986, 2005.
6. Yun, S.-H., "Dynamical Predictions of the Structural Connection by the Reduced Approach," Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea, Vol. 27, No. 6, pp. 589-596, 2014.
7. Ansys Workbench, ANSYS, Inc., USA. 2017.