

Characteristics of Ocean Wave Radiation Patterns in a Dense Layer of Fluid

Eun-Hong Min^{ID*}, Ha-Yun Choi^{ID*}, Young-Gyu Kim^{ID**}, Kwang-Jun Paik^{ID*} and Weon-Cheol Koo^{ID*}

^{*}Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Inha University, Incheon, Korea

^{**}Agency for Defense Development, Changwon, Korea

밀도층 유체에서 해양 방사파 패턴 특징

민은홍^{ID*} · 최하윤^{ID*} · 김영규^{ID**} · 백광준^{ID*} · 구원철^{ID*}

^{*}인하대학교 조선해양공학과

^{**}국방과학연구소

KEY WORDS: Brunt-Väisälä frequency 부력 주파수(브룬트-바이살라 주파수), Internal wave 내부파, Stratification 성층화, Density gradient layer 연속 밀도층, Discrete density layer 불연속 밀도층

ABSTRACT: The sea is stratified with water that has different densities because of pressure, temperature, and salinity. When conducting studies of internal waves in the ocean, the fluid is assumed to have layers that have discrete densities. This assumption is made because it is difficult to achieve layers that exhibit gradual changes in the density of the water. In this study, we used previous studies on ocean waves and their radiation issues in the density layer fluid to investigate the characteristics of internal waves in the ocean and their radiation patterns induced by a moving body in a stratified fluid. We also studied the difference in wave radiation between the density gradient layer and the discrete density layer. We found that the wave radiation patterns depended on the velocity of the moving body and the change in the density of the water. The crest apex shift phenomenon was observed in the density gradient in the layer of fluid.

1. 서 론

일반적으로 유체 내부에 밀도층이 존재하고 밀도 경계층에서 전파되는 파동을 내부파(Internal wave)라고 한다. 이러한 내부파는 파주기나 복원력의 종류 등으로 구분되는데, 조석주기(12시간, 24시간)와 같이 긴 주기를 가지면 내부조석(Internal tide)이라 하고, 전향력(Coriolis force)에 의해 나타나는 관성운동 주기(관성주기)를 갖는 파동을 내부 관성파(Internal inertial wave)라고 하며, 단주기를 갖는 내부파 중 솔리톤(Soliton) 형태의 파동을 내부고립파(Internal solitary wave)라고 한다. 또한, 전향력을 복원력으로 갖는 파동을 로스비파(Rossby wave), 중력 또는 부력을 복원력으로 갖고 유체내부에서 전파되는 파동을 내부중력파(Internal gravity wave)라고 한다.

해양 유체의 밀도는 압력, 온도, 염도 등 다양한 요인에 의해 변하게 되는데, 이로 인해 해양 내부에는 밀도차에 의한 유체층

이 발생하게 되고, 그 밀도층의 경계에서 해양 내부파가 발생하게 된다. 이 같은 해양 내부파의 존재는 남중국해(Liu et al., 1998)와 지브롤터 해협(Alpers and La Violette, 1993) 등에서 관측된다고 보고되었다. 해양 내부파는 보통 밀도 차이가 크지 않은 유체층에서 발생하기 때문에 복원력이 작아 일반적으로 그 주기가 수면파에 비하여 상당히 길고 파고가 매우 큰 특징이 있다. 이러한 특성으로 인해, 해양 내부에서 생성 및 전파되는 파는 표면파와 차이를 보이며 과학적인 이해가 필요하지만, 이에 대한 실질적인 연구는 아직까지 상당히 제한적이다. 그 이유는 해양 내부파를 실제 해양과 같은 밀도층 유체환경으로 수치 모델링하거나 실험을 위한 유체 계층화를 정밀하게 구현하는데에 어려움이 있기 때문이다.

유체 밀도층을 구현하는 방법에는 서로 다른 밀도층으로 구별되는 불연속 밀도층(Discrete density layer)으로 가정하는 방법과 수심에 따라 밀도가 점진적으로 변하는 연속 밀도층(Density

Received 8 October 2018, revised 8 January 2019, accepted 22 February 2019

Corresponding author Weoncheol Koo: +82-32-860-7348, wckoo@inha.ac.kr ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4384-0996>

It is noted that this paper is revised edition based on proceedings of KAOST 2018 in Jeju.

© 2019, The Korean Society of Ocean Engineers

This is an open access article distributed under the terms of the creative commons attribution non-commercial license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

gradient layer)으로 구현하는 방법이 있다. 불연속 밀도층은 통상 상부유체와 하부유체 밀도가 서로 다른 이층유체로 가정한다. Yeung and Nguyen(1999a)은 밀도가 서로 다른 유한한 깊이의 두 유체층에서 그린 함수를 도출하고, 그 결과를 통해 유체 깊이의 비, 밀도비에 따른 유체표면과 두 유체 경계층에 나타나는 파형에 대해 조사하였다.

Ten and Kashiwagi(2004)는 이층 유체에서 운동하는 부유체의 방사문제를 경계 적분방정식을 사용하여 풀고 그 결과를 실험값과 비교하였다. 한편, Keller and Munk(1970)는 유체 깊이에 따라 밀도가 변하는 연속 밀도층에서 발생하는 파의 형태를 표현하는 식을 도출하였다. 이와 비슷한 조건에서 Sharman and Wurtele(1983)는 유체 내부에 나타나는 항주파(Internal ship wave) 패턴을 수치적으로 구현하고 표면에 나타나는 항주파(Surface ship wave)와 비교하여 차이점을 분석하였다. Tunaley(2012, 2015)는 유체의 밀도 성층화가 존재할 때, 선박 이동에 따른 방사파의 패턴을 계산하고, 불연속 밀도층과 연속 밀도층에서 생성파의 방사 형태 및 차이를 분석하였다.

본 연구에서는 해양 밀도층에서 부유체 혹은 수중체 이동에 따라 후류에 생성되는 방사파 패턴의 특징을 알아보기 위해 밀도층 방사파 관련 기존 연구 결과들을 분석하였다. 먼저, 밀도층을 불연속 밀도층과 연속 밀도층으로 구분하여 기본적인 파의 전파 특성을 파악하고, 물체의 이동에 따라 불연속 밀도층과 연속 밀도층에서 나타나는 방사파 패턴을 비교 분석하였다. 또한, 이와 같은 비교 분석 결과를 통해, 향후 진행될 해양 환경기반의 해양 내부파 및 관련 연구에 필요한 기초 정보를 제공하고자 한다.

2. 유체 밀도층 특징

2.1 불연속 밀도층(Discrete density layer)

불연속 밀도층은 물과 기름처럼 섞이지 않고 밀도가 다른 두 유체로 이루어진 밀도층을 말한다. 여기서는 밀도가 다른 두 유체 층으로 유체내부가 이루어진 이층 유체에 대해 고려하고자 한다.

이층 유체로 가정하는 경우 유체 표면에서 전파하는 표면파와 유체 경계층에서 전파하는 내부파가 존재하고, 분산관계식을 통해 같은 주파수에서 서로 다른 파수(Wave number)로 진행하는 두 가지 모드, 즉 표면파 모드(또는 Barotropic 모드)와 내부파 모드(또는 Baroclinic 모드)가 존재하게 된다(Yeung and Nguyen, 1999b). 또한, 각 파랑모드에 따라 분산관계식이 존재하며, 그로 인한 모드별 특징이 존재한다. Fig. 1은 각 파랑모드에서의 특징을 나타낸다. 표면파 모드에서는 두 진행파의 위상이 같고, 표면파의 파고가 내부파에 비해 더 큰 특징이 있는 반면, 내부파 모드에서는 두 진행파의 위상차가 180도이고, 내부파의 파고가 표면파에 비해 더 크다는 특징이 있다. 따라서 이층 유체 내에서 물체의 운동에 의한 외력이 가해질 때, 앞서 언급한 두 가지 파랑모드 성분이 혼합된 파가 생성되고 전파한다. 이와 같은 진행파는 부체의 진동주파수가 낮을 때 내부파 모드가 우세한 특징을 보이는 반면, 주파수가 증가 할수록 표면파 모드가 우세해 지는 특징을 가지고 있다(Min and Koo, 2017).

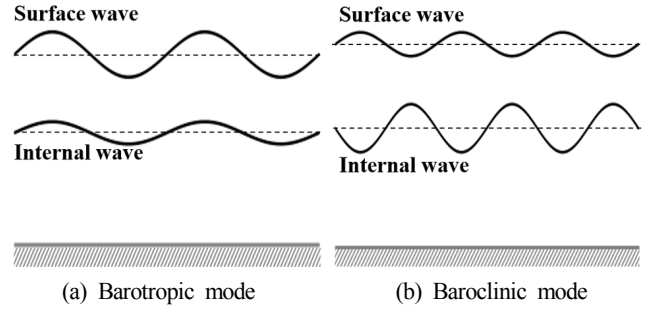


Fig. 1 Characteristics of wave modes in two-layer fluid

2.2 연속 밀도층(Density gradient layer)

연속 밀도층이란 밀도가 수심에 따라 연속적으로 변하는 밀도층으로 대부분의 해양 내부층이 이에 해당한다. 유체의 수심에 따라 밀도가 변하는 경우 부력 주파수(Brunt-Väisälä frequency)가 존재한다. 부력 주파수란 중력장에서 밀도성층을 이루고 있는 정지 유체를 수직 방향으로 단진자 운동 시켰을 때 정역학적 안정도의 기준이 되며, 다음과 같은 식으로 표현한다(Turner, 1973).

$$N(z)^2 = -\frac{g}{\rho_0} \left(\frac{d\rho(z)}{dz} \right) \quad (1)$$

여기서 ρ_0 는 기준밀도, g 는 중력가속도를 나타내며, 이와 같은 유체상태에서 생성된 파의 주파수는 다음과 같은 조건을 만족한다(Gerkema and Zimmerman, 2008).

$$0 < \omega \leq N_{\max} \quad (2)$$

여기서 ω 는 파 주파수, N_{\max} 는 최대 부력 주파수를 나타내며, 코리올리 주파수는 무시하였다. 일반적인 단층에서의 표면파와 유체 경계층에서의 내면파는 파가 경계층을 따라 수평 방향으로 진행한다. 반면에 연속 밀도층에서는 내부파가 어느 방향으로든 진행할 수 있으며, 분산 관계식에서 파수의 방향 성분이 중요한 인자가 된다. 이차원 밀도층에서 일정한 부력 주파수를 갖는 경우 분산 관계식은 다음과 같다(Kundu et al., 2016).

$$\omega = \frac{k_x N}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{k_x N}{|K|} \{ \vec{K} = (k_x, k_z) \} \quad (3)$$

여기서 ω 는 주파수 그리고 k_x, k_z 은 각각 수평, 수직 방향 파수를 나타낸다. 한편, 위상속도(\vec{c})와 군속도(\vec{c}_g)는 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{c} = \frac{\omega}{K} \quad (4)$$

$$\vec{c}_g = e_x \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + e_z \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \quad (5)$$

식 (3), (4), (5)를 사용하여 위상속도와 군속도를 내적하면 0을 얻을 수 있고, 이를 통해 위상속도와 군속도의 방향은 수직

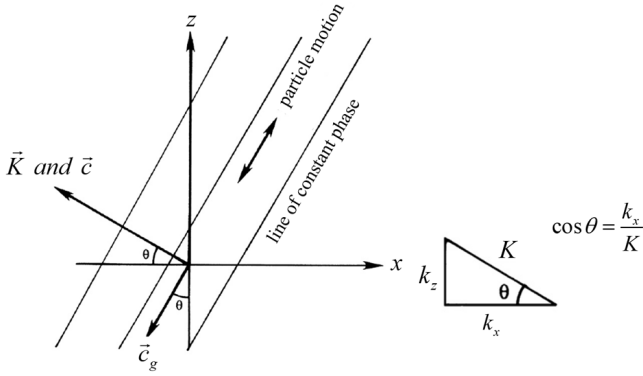


Fig. 2 Group velocity and phase velocity in density gradient layer (Kundu et al., 2016)

임을 알 수 있다(Kundu et al., 2016). Fig. 2에서는 이를 도식화한 그림을 보여준다.

연속 밀도층에서는 수직방향에 대해서 무한한 전파모드가 존재하며, 각 전파모드에 대한 고유값(Eigen value) 문제를 해결함으로써 각각의 분산 관계식을 구할 수 있다. 또한, 이를 통해 각 모드에서의 위상속도와 군속도를 구할 수 있다. 이때 무한한 전파 모드 중, 앞쪽의 저차 모드가 대부분의 영향을 미치며, 고차항 모드의 영향은 무시할 만큼 작다(Tunaley, 2015; Robey, 1997).

3. 밀도층 유체에서의 방사파 패턴

3.1 항주파(Kelvin Wave)

일반적으로 선박 등의 물체가 이동하면 항주파가 생성되며, Fig. 3에서 볼 수 있듯이 보통 가로파(Transverse wave)와 발산파(Diverging wave)의 패턴으로 구분된다. 심해(Deep water)에서는 켈빈 파 패턴이 나타나며 이 항주파의 쐐기각(Wedge angle) 반쪽 크기는 약 19.5도 정도의 한계값을 갖는다.

밀도층이 존재할 때, 수중체 운동에 의해 생성되는 방사파 형태는 물체의 이동속도와 환경 조건에 따라 달라지며 각 조건에 따라서 가로파와 발산파 형태를 보이며, 이에 대하여 다음에서 자세히 분석하였다.

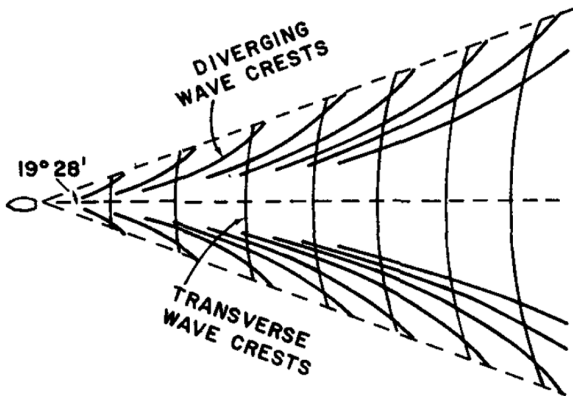


Fig. 3 Transverse and diverging phase lines for deep water ship waves (Sharman and Wurtele, 1983)

3.2 불연속 밀도층에서의 방사파 패턴

이층 유체에서는 식 (6)에 나타난 것처럼 각 파랑모드에서 임계 프루드수(Critical Froude number, Fr_n)를 갖는다. 이 식의 물리적 의미는 각 파랑모드에서 가장 빠른 파속도에 대한 프루드수로 생각할 수 있으며, 방사파 패턴을 결정짓는 중요한자가 된다(Yeung and Nguyen, 1999a).

$$Fr_n^2 = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1-\gamma)h_1h_2}{(h_1+h_2)^2}} \quad (6)$$

여기서 $n=1, 2$ 일 때 각각 표면파 모드, 내부파 모드를 가리키며, γ 은 유체의 밀도비(ρ_1/ρ_2 , ρ_1 : 상부유체 밀도, ρ_2 : 하부유체 밀도), h_1, h_2 는 각각 상부유체와 하부유체의 깊이를 나타낸다. 물체의 이동속도에 따른 프루드수(Fr)는 식 (7)과 같이 구할 수 있으며, 식 (6)에서 구한 임계 프루드수 값과의 비교를 통해 방사파 패턴이 결정된다.

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gh}} \quad (7)$$

여기서 h 는 유체층의 전체 수심, U 는 물체의 이동 속도를 나타낸다. Fig. 4에서는 일정한 속도로 이동하는 용출점(Source)에 대한 각 모드에서 방사파의 패턴을 나타낸다.

$Fr < Fr_n$ 인 경우 방사파는 가로파와 발산파 형태가 함께 존재하지만, $Fr > Fr_n$ 인 경우에는 발산파의 형태만 존재한다(Yeung and Nguyen, 1999a).

식 (6)을 통해 각 파랑모드에서 임계 프루드수를 구하면 내부파 모드($n=2$) 에서 보다 표면파 모드($n=1$) 에서의 임계 프루드수가 더 크다($Fr_2 < Fr_1$). 따라서 수중체의 이동속도에 따라 ① $Fr < Fr_2 < Fr_1$, ② $Fr_2 < Fr < Fr_1$, ③ $Fr_2 < Fr_1 < Fr$ 의 세 가지 경우가 존재한다. Fig. 4에서는 두 번째 경우인 $Fr_2 < Fr < Fr_1$ 인 경우에 대해 나타냈는데, 표면파 모드에서는 가로파와 발산파가 나타나지만 내부파 모드에서는 발산파만 나타나는 것을 확인할 수 있다.

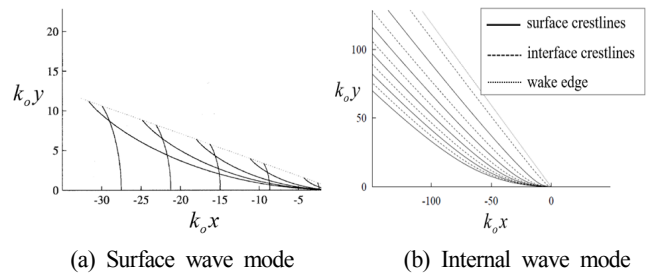


Fig. 4 Crestlines in two-layer fluid [$k_o = g/U^2$; $Fr_2=0.383 < Fr = 0.5 < Fr_1=0.924$] (Yeung and Nguyen, 1999a)

3.3 연속 밀도층에서의 방사파 패턴

연속 밀도층에서 수중체 속도에 대한 기준으로 정의되는 Internal Froude number(Fr_i)는 다음과 같다.

$$(Fr)_i = \frac{U}{Na} \quad (8)$$

여기서 U 는 물체(Source)의 이동속도, N 는 부력 주파수, a 는 길이 단위의 값(물체의 길이, 지름, 수심 등)을 의미한다.

Sharman and Wurtele(1983)은 일정한 부력 주파수를 갖는 유동에 대해서 Internal Froude number와 모드수로 구성된 파라미터 ϵ_n 에 대한 방사와 패턴의 특징을 나타냈다.

$$\epsilon_n = \frac{n\pi U}{N} \quad (9)$$

여기서 n 은 모드차수를 의미하며, 파라미터 ϵ_n 는 단위길이($a=1$)에 대한 파라미터를 사용하였다.

파라미터 값이 변화함에 따라 방사와 패턴이 다르게 나타내는데, $\epsilon_n=1$ 을 기준으로 특징을 구분할 수 있다. 먼저 $\epsilon_n < 1$ 인 경우 아임계 영역(Subcritical case)으로 방사와 패턴은 가로파와 발산파 형태를 갖고, 파라미터 값이 증가할수록 썸기각의 크기가 증가한다. $\epsilon_n > 1$ 인 경우 초임계 영역(Supercritical case)으로 방사와 패턴은 발산파 형태만 나타나며, 파라미터 값이 증가할수록 썸기각의 크기는 감소한다.

Fig. 5에서는 파라미터(ϵ_n)에 따른 썸기각의 반쪽을 보여준다. 아임계 영역($\epsilon_n < 1$)에서는 썸기각의 크기가 증가하고, 초임계 영역($\epsilon_n > 1$)에서는 각의 크기가 감소하는 것을 확인할 수 있다. Fig. 6에서는 임의의 Internal Froude number($(Fr)_i=0.25$)에서의 방사와 패턴을 가장 낮은 세 가지 모드에 대해 나타냈다. 가장 낮은 1차 모드(Fig. 6(a))에서는 가로파와 패턴의 형태를 나타내는데, 이때 파라미터(ϵ_n)는 1보다 작은 값을 갖는 아임계 영역이라고 볼 수 있다. 그러나 모드차수(n)가 증가함에 따라 파라미터(ϵ_n)가 1보다 커지게 되고, 초임계 영역에 들어서면서 발산파 형태만 남게 된다(Fig. 6(b)). 초임계 영역에 들어선 방사와 패턴은 계속해서 모드차수가 증가함에 따라(Fig. 6(c)), 썸기각의 크기 감소하는 것을 확인할 수 있다.

이러한 특징은 부력 주파수가 일정하지 않은 경우에 대해서도 확인할 수 있다. Robey(1997)는 수심에 따라 일정하지 않은 부력 주파수 분포를 갖는 유체 밀도층에 대해 물체 이동에 따른 방사와 패턴을 실험과 이론식 계산 결과와 비교하였는데, 방사와 패턴은 다음과 같이 Keller-Munk 식(Keller and Munk, 1970)을 사용하여 표현할 수 있다.

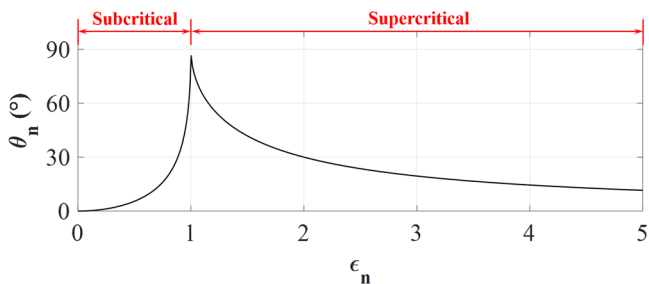


Fig. 5 The angle of the wedge(θ_n) containing the wave pattern as a function of ϵ_n (Sharman and Wurtele, 1983)

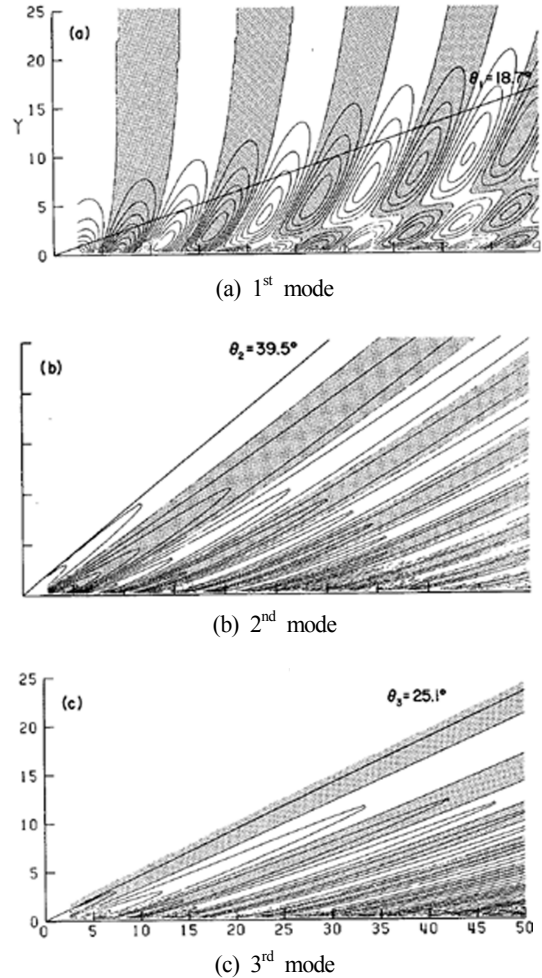


Fig. 6 Wave pattern and the angle of the wedge(θ_n) in $(Fr)_i=0.25$ (Sharman and Wurtele, 1983)

$$x = \frac{\phi U(1 - c_p c_g / U^2)}{k(c_p - c_g)} \quad (10)$$

$$y = \frac{\phi c_g (1 - c_p^2 / U^2)^{1/2}}{k(c_p - c_g)} \quad (11)$$

여기서 $\phi(=0, 2\pi, 4\pi, \dots)$ 는 일정한 위상, k 는 파수, U 는 수중체의 이동속도를 나타낸다. c_p , c_g 는 위상속도와 군속도를 나타내며, 각 전파모드에서의 고유값 문제를 해결하면 위상속도와 군속도 값을 구할 수 있다. Fig. 7에서는 임의의 속도에서의 각 전파모드별 방사와 패턴을 보여준다. 가장 낮은 모드(Fig. 7(a))에서는 가로파 형태를 보이지만, 그 다음 모드(Fig. 7(b))에서는 발산파 형태만 나타난다. 또한, 그 뒤로 모드가 증가함에 따라 Fig. 7(c)에서 보이는 것처럼 발산파 형태의 썸기각이 감소하는 것을 확인할 수 있다.

연속 밀도층에서 나타나는 또 하나의 특징은 물체 이동에 의해 생성된 파의 Crestline이 조금씩 뒤로 밀리는 현상이다. 이는 연속 밀도층에서 생성된 파는 식 (2)의 조건을 만족해야 하며, 따라서 파속도가 제한되어 있기 때문에 생성된 파가 물체의 이동속도를 따라가지 못하면서 발생하는 현상이다. 생성된 파들

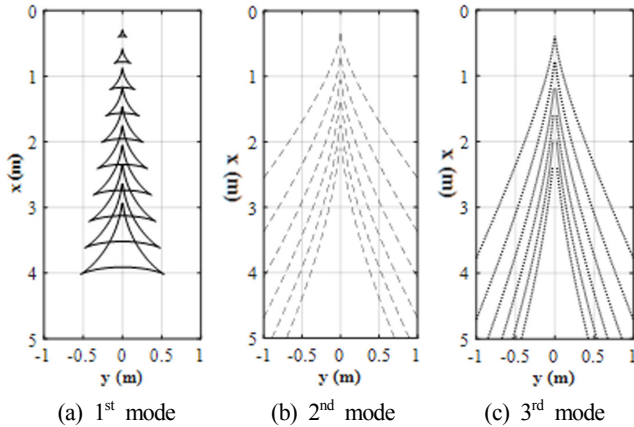


Fig. 7 Internal wave patterns in density gradient layer ($U = 2$ cm/s, $N_{max} = 0.45$ rad/s)

의 Crestline이 이루는 꼭지점 간의 간격의 거리(d)는 다음 식으로 나타낼 수 있다(Tunaley, 2012).

$$d = \frac{2\pi U}{N_{max}} \quad (12)$$

여기서 N_{max} 는 유체 내부 밀도층에서 가장 높은 부력 주파수 값을 의미한다.

한편, 이러한 현상은 불연속 밀도층에서는 확인할 수 없는데, 이는 상부유체와 하부유체 경계에서의 부력 주파수가 무한한 값을 가짐에 따라($N_{max} \rightarrow \infty$) 수중운동체에 의해 생성된 파의 속도가 제한되어 있지 않아 수중체의 이동속도를 따라갈 수 있기 때문이다.

Fig. 7을 통해 밀도 연속층에서 계산된 방사와 패턴을 살펴보면 모든 전파모드 계산 결과에서 Crestline 꼭지점이 뒤로 밀리는 현상을 확인할 수 있다. 반면, 불연속 밀도층인 이층유체(Fig. 4)에서는 모든 Crestline이 원점(시작점)에서 이어지는 것을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 이전 연구들에서 수행된 연속 밀도층과 불연속 밀도층의 특성을 비교하고, 연속 밀도층과 불연속 밀도층에서 이동하는 물체에 의해 생성된 방사와 패턴을 비교 분석하였다. 연속 밀도층과 불연속 밀도층에서 내부파 전파 특성 및 방사와 패턴의 특징에 대한 분석 결과는 다음과 같다.

(1) 연속 밀도층에서는 내부파가 수평방향 뿐만 아니라 수직 방향으로도 전파가능하며 무한한 수직전파모드가 존재함에 따라 각 모드에서의 방사와 패턴이 무한히 존재한다. 이러한 수직 전파모드는 일반적으로 저차모드가 우세하며 고차모드 성분의 영향은 무시할 만큼 작다.

(2) 이층 유체(불연속 밀도층)에서는 경계층(또는 경계면)을 따라 방사와의 수평 방향으로 전파 가능하며, 단지 두 파랑모드만 존재하여 물체 이동속도에 따라 각 모드에서 방사와 패턴

이 결정된다.

(3) 두 밀도층 구조는 특정 파라미터(임계 프루드수 또는 ϵ_n)를 기준으로 물체 속도 변화에 따라 가로파와 발산파 형태가 동시에 존재하는 아임계 영역과 발산파 형태만 존재하는 초임계 영역으로 나뉜다.

(4) 아임계 영역에서는 물체 속도(연속 밀도층에서는 속도와 모드차수)가 증가함에 따라 썩기각의 크기가 증가하지만, 초임계 영역에서는 썩기각의 크기가 감소한다.

(5) 연속 밀도층에서는 유한한 값을 갖는 부력 주파수가, 생성된 파의 진행 속도에 영향을 주기 때문에 각 위상별 Crestline이 만나는 꼭지점의 간격이 벌어지는 특징이 존재한다. 그러나 불연속 밀도층에서는 부력 주파수에 의한 제한이 없으므로 이러한 특징이 나타나지 않는다.

(6) 연속 밀도층인 경우, 무한한 수직 전파모드가 존재하며, 유한한 최대 부력주파수(N_{max})를 갖는다. 이에 따라 불연속 밀도층과는 일정부분 다른 전파 특징을 보이지만, 물체 운동에 따른 방사와 패턴에 있어서는 특정 파라미터나 임계 프루드수에 따라 정성적으로 유사한 특징을 보인다.

결론적으로, 서로 다른 유체층 가정에 대한 내부파 전파 특성 분석 결과의 보다 정확한 비교를 위해서는 향후 정량적인 비교 연구가 필요하다고 판단된다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 지원을 받아 수행한 위탁연구(UD170021DD)의 일부임을 밝히며, 지원에 감사드립니다. 또한, 본 연구는 한국연구재단 이공분야기초연구사업의 지원을 받았습니다(NRF-2018R1D1A1B07040677).

References

- Alpers, W., La Violette, P.E., 1993. Tide-generated Nonlinear Internal Wave Packets in the Strait of Gibraltar Observed by the Synthetic Aperture Radar Aboard the ERS-1 Satellite. Proceedings of the First ERS-1 Symposium - Space at the Service of our Environment Published by ESA, Paris, France, ESA Sp-359, 753-758.
- Gerkema, T., Zimmerman, J.T.F., 2008. An Introduction to Internal Waves. Lecture Notes, NIOZ Royal Netherlands Institute for Sea Research, Den Burg.
- Keller, J.B., Munk, W.H., 1970. Internal Wave Wakes of a Body Moving in a Stratified Fluid. Physics of Fluids, 13(6), 1425-1431. <https://doi.org/10.1063/1.1693096>
- Kundu, P.K., Cohen, I.M., Dowling, D.R., 2016. Fluid Mechanics, 6th edition, Academic Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-00611-4>
- Liu, A.K., Chang, Y.S., Hsu, M.K., Liang, N.K., 1998. Evolution of Nonlinear Internal Waves in the East and South China Seas. Journal of Geophysical Research, 103(C4), 7995-8008. <https://doi.org/10.1029/97JC01918>

- Min, E.H., Koo, W.C., 2017. Hydrodynamic Characteristics of Internal Waves Induced by a Heaving Body in a Two-layer Fluid. *Ocean Engineering*, 145, 290-303. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.09.017>
- Robey, H.F., 1997. The Generation of Internal Waves by a Towed Sphere and its Wake in a Thermocline. *Physics of Fluids*, 9(11), 3553-3367. <https://doi.org/10.1063/1.869448>
- Sharman, R.D., Wurtele, M.G., 1983. Ship Waves and Lee Waves. *Journal of Atmospheric Sciences*, 40, 396-427. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1983\)040<0396:SWALW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1983)040<0396:SWALW>2.0.CO;2)
- Ten, L., Kashiwagi, M., 2004. Hydrodynamics of a Body Floating in a Two-layer Fluid of Finite Depth - Part 1 Radiation Problem. *Journal of Marine Science and Technology*, 9(3), 127-141. <https://doi.org/10.1007/s00773-004-0185-7>
- Tunaley, J.K.E., 2012. The Theory of Internal Wave Wakes. London Research and Development Corporation Final Report CR 2012-119, Defence Research and Development, Ottawa, Canada.
- Tunaley, J.K.E., 2015. Ship Wakes Generated in a Diffuse Internal Layer. London Research and Development Corporation Report CR 2015-C093, Defence Research and Development, Ottawa, Canada.
- Turner, J.S., 1973. Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge.
- Yeung, R.W., Nguyen, T.C., 1999a. Radiation and Diffraction of Waves in a Two-layer Fluid. Proceedings of the 22nd Symposium of Naval Hydrodynamics, Washington, 875-891.
- Yeung, R.W., Nguyen, T.C., 1999b. Waves Generated by a Moving Source in a Two-layer Ocean of Finite Depth. *Journal of Engineering Mathematics*, 35(1-2), 85-107. <https://doi.org/10.1023/A:100439991769>