

유리차수 미분을 이용한 위치제어기 구현

강정욱* · 전용호**

Position Controller Implementation Using the Fractional Order Derivative

Jung-Yoog Kang* · Yong-Ho Jeon**

요약

본 연구는 유리차수 미분의 수학적 방법을 시스템의 응답을 제어하는 제어기에 적용하고자 한다. 일반적인 PID제어기의 라플라스 변환은 s 의 정수지수를 갖게 된다. 유리차수의 미분은 라플라스 변환에서 s 에 대한 유리수 지수를 갖게 된다. 따라서 이를 제어기로 구성하기 위해서는 유리수 지수에 대한 설계가 적절하지 않아 이산시간으로 변환하여 설계하는 방법을 제안한다. 이를 표준 2차 시스템에 적용하여 성능을 살펴보고, 산업현장에서 많이 사용되는 솔레노이드밸브에 적용한다. 외란 상태의 추정이 가능하도록 루엔버거 관측기를 설계하고 관측된 상태에 대하여 유리차수 제어기를 적용하여 균일하며 정밀한 제어성능을 얻을 수 있었다. 정상상태의 위치오차가 0.1 [%]이내이고, 기동시간이 약 0.3 [s]이내의 정밀하며 균일한 위치제어성능 가짐을 확인할 수 있었다.

ABSTRACT

This study aims to apply the mathematical method of fractional order derivatives to the controller that controls the system response. In general, the Laplace transform of the PID controller has an exponent of the integer order of s . The derivative of the fractional order has a fractional exponent of s when it is transformed by Laplace transform. Therefore, this controller proposes a design method with the result of discrete time conversion. Because controllers with fractional exponents of s are not easy to design. This controller is applied to a standard secondary system and its performance is examined. Then, it applies to solenoid valve which is widely used in industrial field. A Luenberger's observer was designed to estimate the disturbance state and the observed state was applied to the fractional order controller. As a result, uniform and precise control performance was obtained. It was confirmed that the position error of the steady state is within 0.1 [%] and the rising time is within about 0.03 [s].

키워드

Fractional order, Laplace transform, Binomial coefficient, Bilinear transform
유리 차수, 라플라스 변환, 이항 계수, 쌍선형 변환

* 신라대학교 수학교육과(jykang@silla.ac.kr)

** 교신저자 : 중원대학교 항공정비학과

• 접수일 : 2018. 12. 31

• 수정완료일 : 2019. 01. 23

• 게재확정일 : 2019. 02. 15

• Received : Dec. 31, 2018, Revised : Jan. 23, 2019, Accepted : Feb. 15, 2019

• Corresponding Author : Yong-Ho Jeon

Dept. Aviation Maintenance Engineering, Jungwon University

Email : waterjliar@jwu.ac.kr

1. 서론

유리차수에 대한 미분은 일반적인 미분(정수차수 미분법)에 대한 역사와 동일하게 소개되어져 왔으며, 미분의 차수가 실수와 복소수에도 적용되어졌다[1-7]. 실제 많은 시스템이 유리차수 미분방정식의 특징을 가지고 있다. 그로인해 수학적으로 시스템을 모델링을 하는 좋은 방법이며, 현대제어에서 유리차수 미분제어는 중요성이 부각되고 많은 연구가 되고 있다[1-3].

미분의 정의는 식(1)에서 식(2)와 같다.

$$D_x f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \Delta f(x) \quad (1)$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-h) \quad (2)$$

식(1)에서 함수 값의 차이를 식(2)로 정의한 것이다. 식(2)를 양의 정수로 확장하면 식(3)에서 식(5)와 같다.

$$\Delta^2 f(x) = f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) \quad (3)$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h) \quad (4)$$

⋮

$$\Delta^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x-mh) \quad (5)$$

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha!}{m!(\alpha-m)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)} \quad (6)$$

식(5)의 이항계수는 식(6)과 같다. 식(6)에서 α 는 양의 정수이다. 그리고 $m > \alpha$ 인 경우의 항에 대한 이항계수는 0이다. 식(5)를 이용하여 미분을 정의하면 식(7)과 같다.

$$D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \Delta^\alpha f(x) \quad (7)$$

식(7)은 α 가 양의 정수뿐 아니라 양의 실수영역으로 확장된 그룬월드-레트니코브(Grünwald-Letnicov) 유리차수의 미분으로 정의한다. 리만-라우빌 (Riemann-Liouville) 유리차수 미분 연산자를 식(8)로 정의한다 [3-7].

$$D_x^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} & R(\alpha) > 0 \\ 1 & R(\alpha) = 0 \\ \int_a^x (d\tau)^{-\alpha} R(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

초기치를 0으로 가정하고 함수 $f(x)$ 의 라플라스변환이 $F(s)$ 라 할 때, 식(8)의 RL(Riemann-Liouville) 미분연산자의 라플라스변환은 식(9)와 같다.

$$L(D_x^\alpha f(x)) = s^\alpha F(s) \quad (9)$$

식(9)의 결과는 미분변수가 시간에 대한 경우 정수차수 미분의 라플라스변환에서 α 만큼 지연 항이 첨가되는 것과 유사하다.

II. 유리차수미분의 제어기 적용

일반적인 PID 제어기가 전향 보상된 시스템의 블록 다이어그램을 표현한 것은 다음의 그림 1과 같다.

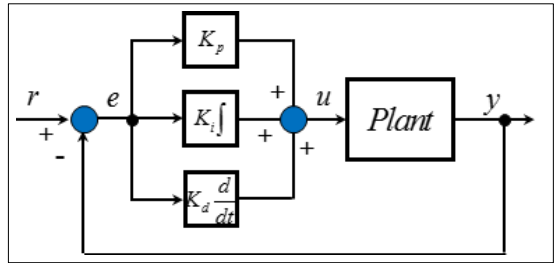


그림 1. 전향보상 PID 제어기
Fig. 1 Forward PID controller

일반적인 PID 제어는 식(10)과 같다.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (10)$$

초기치를 0으로 가정하고, 레퍼런스 입력과 피드백 된 출력의 차를 오차 $e(t)$ 로 하여 이를 입력으로 하는 일반적인 PID 제어기의 식이다. K_p 는 비례이득, K_i 는 적분기 이득이고, K_d 는 미분기 이득이다.

유리차수미분을 이용하여 제어를 구성하면 식(11)과 같다.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i^\beta \int e(t) (dt)^\beta + K_d^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e(t) \quad (11)$$

α, β 는 실수부가 양인 값이며, 우변 첫째항은 비례기, 두 번째 항은 유리차수 적분기, 세 번째 항은 유리차수 미분기이다. 식(9)를 이용하여 전달함수를 구하면 식(12)과 같다.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{1}{s^\beta} K_i^\beta + s^\alpha K_d^\alpha \quad (12)$$

K_i^β 는 적분기의 제어이득이고, K_d^α 는 미분기의 제어이득이다.

연속시간의 라플라스 변환된 영역에서 이산시간 영역으로 변환하기 위한 방법으로 일반적으로 많이 사용되는 두 가지 변환은 식(13)에서 식(14)와 같다.

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{Tz} \quad (13)$$

$$s \leftrightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (14)$$

식(13)는 백워드(Backward) 변환이고, 식(14)는 쌍선형(Bilinear) 변환이다. 포워드(Forward) 변환의 방법도 있으나 유리차수 제어기 구성에는 적합하지 않아 사용하지 않는다. 식(11)의 유리차수 미분기에 대한 이산 변환은 식(15)에서 식(16)과 같다.

$$u_{back}(k) = \frac{K_d^\alpha}{T^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} e(k-m) \quad (15)$$

$$u_{bili}(k) = \frac{K_d^{\alpha} 2^{\alpha}}{T^{\alpha}} e(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} \left(\frac{(-1)^m K_d^{\alpha} 2^{\alpha}}{T^{\alpha}} e(k-m) - u(k-m) \right) \quad (16)$$

식(15)는 유리차수 미분기에 식(13)을 사용하여 변환한 결과이고, 식(16)은 식(14)를 사용하여 변환한 결과이다.

유리차수 적분기에 대한 이산시간 변환을 하면 식(17)에서 식(18)과 같다.

$$u_{back}(k) = \frac{K_i^\beta}{T^{-\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-\beta}{m} e(k-m) \quad (17)$$

$$u_{bili}(k) = \frac{K_i^\beta 2^{-\beta}}{T^{-\beta}} e(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\beta}{m} \left(\frac{(-1)^m K_i^\beta 2^{-\beta}}{T^{-\beta}} e(k-m) - u(k-m) \right) \quad (18)$$

식(17)은 식(13)을 사용하여 변환한 결과이고, 식(18)은 식(14)를 이용하여 변환한 결과이다. 미분기와 적분기의 차이는 정수차수 미분과 적분의 관계와 비슷하게 부호가 반대이다.

식(12)에 대한 전체 제어기에 대하여 이산 변환한 결과는 식(19)와 같다.

$$u(k) = (K_p + K_i^n T^n) e(k) + \frac{K_d^\alpha}{T^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha+n}{m} e(k-m) + \sum_{m=1}^n (-1)^m \binom{n}{m} (K_p e(k-m) - u(k-m)) \quad (19)$$

여기서 n 은 적분기의 정수를 나타낸다. 즉 유리차수 미분기와 정수차수 적분기를 결합한 형태이고, 이산변환의 식(13)을 사용하였다.

III. 시뮬레이션

설계된 제어기의 성능을 실험하기 위하여 MATLAB Simulink를 사용하였다. 먼저 사용된 시스템은 표준 2차 시스템으로 개루프 전달함수는 다음 식(20)과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)} \quad (20)$$

식(20)의 시스템의 단위피드백 궤환을 걸었을 때 응답성능은 식(21)과 같다.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 3.63 [s]$$

$$t_s = \frac{-\ln(0.02 \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \omega_n} \simeq 8.11 [s] \quad (21)$$

$$M = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.16$$

식(21)의 첫째항은 오버슈트의 최대점에 도달하는데 걸리는 시간이고, 두번째 항은 오차 2 [%]내로 도달하는데 걸리는 시간이며, 3번째 항은 최대 오버슈트 값이다. 식(21)은 식(20)의 시스템에 단위 궤환을 적용하였을 때 결과이다.

유리차수 제어기의 성능을 알아보기 위하여 식(20)의 표준 2차 시스템에 전향보상으로 식(15)의 유리차수 미분기와 비례제어기를 적용한 결과는 다음의 그림 2에서 그림 5와 같다. 유리차수 미분기의 식(15)의 이항 급수의 수 m 을 3차에서 6차까지 근사화한 것이 그림 2의 결과이다.

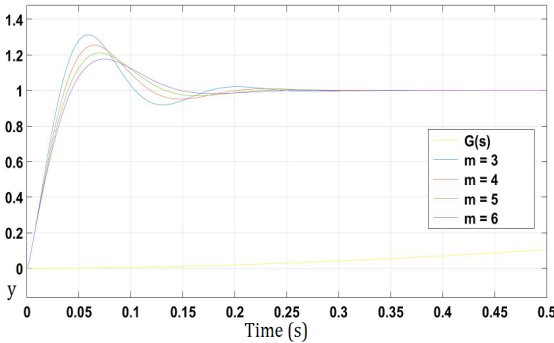


그림 2. 이항계수차수 3 에서 6의 유리차수 미분기
Fig. 2 The Fractional Derivative controller when binomial coefficient order is 3 to 6

노란색 그래프는 식(20)의 단위 계환을 한 결과로 식(21)의 결과 값과 같다. $m=3$ 인 경우 최대오버슈트가 약 0.32이고 상승시간은 약 0.037 [s]이다. $m=6$ 인 경우 최대 오버슈트는 약 0.18이고 상승시간은 약 0.052 [s]이다. 이항계수의 차수가 3차보다 6차로 갈수록 상승시간은 조금씩 늘어나지만 최대 오버슈트가 작아지는 모습을 보이고 있다.

유리차수를 0.31, 0.51, 0.71, 0.91로 한 결과는 그림 3과 같다.

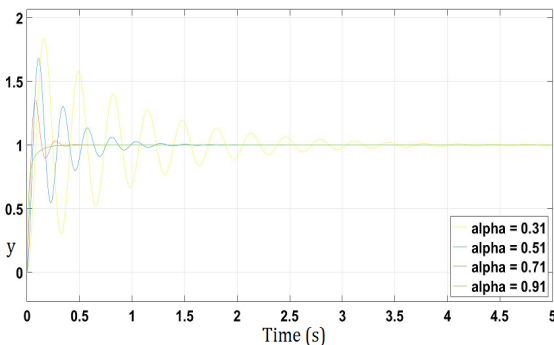


그림 3. α 에 대한 유리차수 미분기
Fig. 3 The Fractional Derivative controller when α is 0.31 to 0.91

이항 계수의 차수를 $m=6$ 이며 유리차수 α 가 0.31인 경우 많은 진동과 약 0.83의 최대 오버슈트를 가지고 있으며 α 가 0.91로 커갈수록 진동과 최대 오버슈트가 사라지는 결과를 볼 수 있다.

유리차수 미분기의 이득을 여러 가지로 조정 한 결과는 그림 4와 같다.

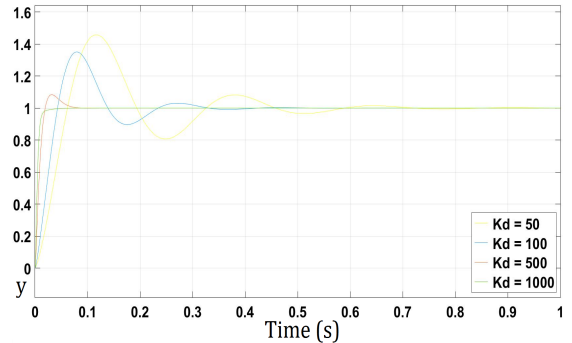


그림 4. 유리차수미분기의 이득 K_d^α
Fig. 4 The Fractional Derivative controller when the gain K_d^α is 50 to 1000

이항 계수의 차수를 $m=6$ 이며 유리차수 $\alpha = 0.71$ 로 제어이득 K_d^α 를 50, 100, 500, 1000으로 한 결과다. 제어이득이 50에서 약 0.45의 최대오버슈트와 많은 진동이 있으며 제어이득 커질수록 즉 1000인 경우 최대 오버슈트와 진동이 사라짐을 확인할 수 있다. 또한 상승시간도 약 0.07 [s]로 가장 빠름을 알 수 있다.

이를 바탕으로 전체 제어를 식(19)와 같이 설계하여 유리차수 미분기의 차수는 0.91이고 적분기 차수는 1차의 결과는 그림 5와 같다.

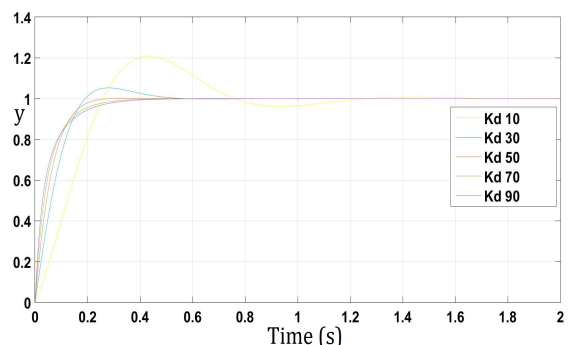


그림 5. 유리차수미분기를 포함하는 PID 제어기
Fig. 5 The PID controller with fractional derivative

적용된 제어이득은 비례이득 K_p 는 1이고 적분이득 K_i 는 0.01이며, 이산 샘플링 주기는 T는 0.001 [s]이다. 이때 $K_d^{0.91}$ 을 10, 30,50,70,90 으로 하였다. $K_d^{0.91}$ 가 10인 경우 약 0.21의 최대 오버슈트가 발생하고, $K_d^{0.91}$ 가 50이후에서 90까지 오버슈트가 발생하지 않은 것으로 거의 임계제동으로 제어되는 모습이다. 그림 4의

결과와 비교하였을 때 유리차수 미분기의 차수는 다르지만 제어 이득만으로 판단할 경우 적분기를 포함하는 식(19)의 제어기가 작은 제어이득으로 설정 가능함을 알 수 있다.

식(19)의 제어기가 실제 시스템에 적용하기 위하여 비선형특성이 강한 솔레노이드 밸브 시스템을 선택하였다[7-9]. 솔레노이드 밸브의 위치를 제어한 결과는 그림 6과 같다.

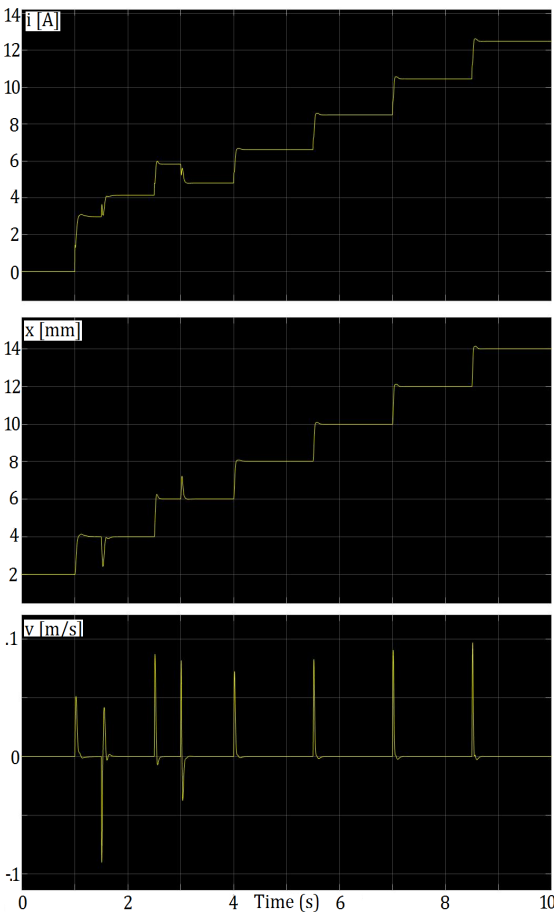


그림 6. 솔레노이드 밸브의 위치제어

Fig. 6 The position control of the Solenoid valve

식(19)의 제어기에서 비례기와 유리차수 미분기를 가진 것으로 하였다. 비례이득 K_p 는 0.01이고 유리차수 미분이득 K_{α} 는 0.01이며, 유리차수 α 는 0.81이다. 그리고 이항계수의 차수는 6차이고 이산 샘플링 주기는 T 는 0.001 [s]이다. 첫 번째 그림은 가동철심의 코일에

흐르는 전류상태를 나타내는 그림이며, 두 번째 그림은 가동철심의 위치 상태를 나타내며, 세 번째 그림은 가동철심의 속도상태를 나타내는 결과이다. 두 번째 그림의 가동철심의 위치를 제어하고 있는 결과를 보면 각 스텝 당 2 [mm] 위치 레퍼런스를 더한 결과 응답 성능이 모두 약 7 [%] 이내의 최대 오버슈트를 가지며, 상승시간은 초기기동 상태에서 약 0.07 [s]이며, 나머지 모두 약 0.04 [s] 이내의 값을 가졌다. 이는 정밀한 제어기로 설계가 됨으로 스케줄링 된 제어기와 같이 동작함을 확인 할 수 있었다.

IV. 결 론

산업 현장에서 PID제어기는 성능과 구조에서 매우 좋은 제어기로 많은 활용이 되고 있다. PID제어는 오차에 대한 비례와 미분, 적분이 합쳐져서 제어기를 구성한다. 이때 구성에 따라 여러 가지 변형된 형태의 제어기들이 연구되고 있다. 본 연구에서는 실수 범위에서 미분과 적분으로 확장하여 구성된 제어를 포함하여 PID제어기를 설계하는 것이다.

제어대상인 플랜트를 표준 2차 시스템으로 하고 비례기와 유리차수 미분기만을 가지는 제어기를 적용하여 설계된 제어기의 성능을 비교하고, 1차 적분기와 유리차수 미분기를 포함하는 제어기의 성능을 비교한 결과 정밀한 제어가 가능함을 확인 할 수 있었다. 또한 레퍼런스가 변화하더라도 최적의 제어 값을 계산함으로 제어 성능이 각 스텝마다 크게 변화하지 않은 결과를 얻을 수 있었다. 유리차수 제어기는 이산 차분 방정식으로 변환하는 과정에서 오차를 포함하고 있지만 그 오차를 줄이기 위해 그림 2의 결과로 m 을 6으로 하였다. 추후 유리차수 제어기의 구현에서 주파수 영역에서의 안정성 해석이 보완되어야 할 것이다. 또한 제어기의 여러 파라미터를 선정하는 방법과 강건한 제어에 대한 연구가 되어져야 할 것이다.

감사의 글

본 논문은 2017년도 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임.(No.2017R1E1A1A03070483)

References

- [1] L. Debnath, "A brief historical introduction to fractional calculus," *Int. J. of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 35, no. 4, 2004, pp. 487-501.
- [2] P. Torvik and R. Bagley, "On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real material," *J. of Applied Mechanics, Transaction of the ASME*, vol. 51, no. 2, 1984, pp. 294-298.
- [3] C. Ma and Y. Hori, "Fractional-Order Control: Theory and Applications in Motion Control," *IEEE Industrial Electronics Mag.*, vol. 1, no. 4, 2007, pp. 6-16.
- [4] B. Dumitru, Z. Güvenç, and J. Tenreiro Machado, "New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications." Dordrecht, Springer, 2010.
- [5] J. Sabatier, O. Pgrawal, and J. Tenreiro Machado, "Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering," Dordrecht, Springer, 2007.
- [6] Y. Bae, "Comparison Analysis of Behavior between Differential Equation and Fractional Differential Equation in the Van der Pol Equation," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 11, no. 1, 2016, pp. 81-86.
- [7] J. Kang and Y. Jeon, "Position Control for Solenoid Valve using the Fractional Order Controller," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 13, no. 1, 2018, pp. 101-106.
- [8] T. Kajima and Y. Kawamura, "Development of a high-speed solenoid valve : investigation of solenoids," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 42, no. 1, 1995, pp 1-8.
- [9] M. Rahman, N. Cheung, and K. Lim, "Position estimation in solenoid actuators," *IEEE Trans. Ind. Applications*, vol. 32, no. 3, 1996, pp. 552-559.

저자 소개



강정욱(Jung-Yoog Kang)

2006년 신라대학교 수학과 졸업 (이학사)
 2011년 한남대학교 대학원 수학 교육학과 졸업(교육학석사)

2016년 한남대학교 대학원 수학과 졸업(이학박사)
 2017. ~2018.8 안양대학교 정보통계학과 교수
 2018.9 ~현재 신라대학교 수학교육과 교수
 ※ 관심분야 : 응용 수학



전용호(Yong-Ho Jeon)

1996년 광운대학교 제어계측공학과 졸업(공학사)
 1998년 광운대학교 대학원 제어계측공학과 졸업(공학석사)

2008년 광운대학교 대학원 정보제어공학과 졸업 (공학박사)
 2013.~2017.8 중원대학교 메카트로닉스학과 교수
 2017.9~현재. 중원대학교 항공정비학과 교수
 ※ 관심분야 : 가변속 시스템, 지능로봇 시스템