

학생중심의 대학 이산수학 강의 운영사례

이 상 구 (성균관대학교 교수)

이 재 화 (성균관대학교 연구원)[†]

본 연구는 학생이 학습과정(learning process)에 능동적으로 참여하여, 능력을 향상하며, 자신감을 갖고 학생성공(student success)이라는 궁극적인 목표에 도달하는 것을 목표로 한 기초수학 특히 이산수학 강좌의 운영사례를 다룬다. 이를 위해 첫째, 본 연구진에 의해 개발/제작된 강의록과 사이버실습실을 미리 제공하였다. 둘째, 이를 바탕으로 학생들이 학습관리 시스템(learning management system)을 통해 예습, 복습, 질문, 답변, 토론을 충분히 할 수 있도록 하였으며, 팀별로 기말 프로젝트에 참여하게 하였다. 셋째, 한 학기 동안의 모든 학습과정을 보고서로 작성하여 제출, 발표하고 이를 바탕으로 한 평가를 하였다. 이러한 강의 모델을 통해 학생들은 자신의 학습과정 및 문제해결과정을 서술하고 발표하면서 비판적인 사고 능력을 자연스럽게 갖추는 과정을 경험하고 공유한다. 본 연구는 기존의 연구와 달리 교수자가 많은 시간을 들이지 않고도, 그리고 여러 지원 또는 우수한 조교가 돕지 않아도 교수 스스로 개인별, 수준별, 맞춤형, 창의적 이산수학 교육이 가능하다는 것을 보여주는 모델을 만든 것으로 이를 공유한다.

I. 서론

이산수학은 미분, 적분과 같은 연속적인 대상을 다루는 연속수학에 대조되는 개념으로, 서로 떨어져 있는 대상들이 갖는 수학적 원리를 다루며, 함수와 집합, 논리, 증명의 기법, 헤아리기의 법칙, 그래프와 수형도, 알고리즘과 점화식, 알고리즘과 복잡도, 네트워크 모델, 부울 대수(Boolean algebra) 등을 주제로 한다. 이산수학은 IEEE 컴퓨터 학회(IEEE Computer Society, IEEE-CS)와 미국 계산기 학회(Association for Computing Machinery, ACM)가 공동으로 작업한 Computing Curricula 2001 보고서¹⁾에서 보듯이 컴퓨팅 분야에서 요구되는 수학 지식의 대부분을 차지하고 있어, 전산학의 기초이론을 이해하는데 필수적이며, 현대 컴퓨터의 개발과도 많은 관련이 있다.

이산수학의 교육내용은 크게 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사결정과 최적화 등의 4개 영역으로 나누어져 있으며, 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 문제를 소재로 하여 실험적 과정을 거치면서 학생 스스로 학습할 수 있는 학습자 위주의 교육방법을 택하고 있다. 고교과정에서 배운 기초지식을 전제하고 대학의 이산수학 입문 과정에서는 다음과 같은 내용을 다룬다. 기본적으로 수학적 귀납법, 알고리즘의 복잡도 및 수렴 속도를 비교하며, 헤아리기의 기본법칙, 순열과 조합, 일반화된 순열과 조합, 일반화된 비둘기 집의 원리, 포함 배제 원리, 배열의 존재성을 보이는 법, 이항계수를 이용하여 조합적 항등식을 찾는 법, 점화식, 행렬의 의미와 이용, 그래프의 뜻 이해와 그래프의 행렬 표현, 여러 가지 수형도 및 생성수형도를 찾는 문제, 경로 및 회로, 오일러 경로 및 회로, 해

* 접수일(2018년 12월 5일), 심사(수정)일(2019년 1월 8일), 게재 확정일(2019년 1월 9일)

* ZDM 분류 : M55, I75, I85

* MSC2000 분류 : 97C80, 97U70, 68R01

* 주제어 : 이산수학, 학생중심학습, 실습실

* 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No.2017RID1A1B03035865).

[†] 교신저자 : jhlee2chn@skku.edu

¹⁾ <https://www.acm.org/binaries/content/assets/education/curricula-recommendations/cc2001.pdf>

밀턴 경로 및 회로, 순회 판매원 문제, 평면그래프, 이분그래프와 매칭사이의 관계, 2x2 게임의 전략, 선거와 정당성, 최적화 계획을 세우는 법, 그래프와 최적화 사이의 관계의 이해 등을 다루고 있다.

이산수학은 수학으로서가 아닌 즐거운 놀이나 게임을 하는 기분으로 생활 속의 소재를 대상으로 그 안에서 수학적 구조와 관계를 이해하고 수학적 사고력을 키우며 이를 통하여 점차 관련된 과학적 개념과 지식을 습득하게 하는 것이 가능하도록 하는 교과목이다. 또한, 이산수학이 제공하는 소재는 컴퓨터와 계산기 등을 활용할 수 있는 문제가 많아 정보화의 흐름을 동시에 경험하게 하는 부수적인 효과도 있다. 이렇게 이산수학이 정보화 사회에서의 학생들의 수학적, 전문적 능력 개발에 중요한 역할을 담당함을 인식하여, 1989년에 미국 수학교사협회(The National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)는 이산수학의 교육적 가치를 대수, 기하, 미적분 등과 같은 수준으로 평가하고, 미국 중등수학교육표준에 이산수학을 포함시켰다²⁾. 우리도 제7차 수학과 교육과정에서 이산수학을 심화 선택과목으로 선정하였으며, 이와 함께 중등학교 과정에서는 많은 선행연구가 있어왔다. 예를 들어, 이재화(2003)은 교사 양성 대학에 적합한 이산수학 강좌에 대한 교육과정 개발 방향을 제시하였고, 김윤주(2007)는 그래프 이론을 중심으로 이산수학 교육에 관한 지도방안을 제시하였다.

그러나 고교 과정과 달리 대학차원에서의 이산수학 교육에 관하여 그 경험이 공유된 연구결과는 많지 않다. 이산수학은 특히 컴퓨터를 이용하여 문제를 해결하고, 그 이론을 발달시키기 위해 알고리즘을 개발하고 분석하는 것을 중요하게 다루고 있어서 컴퓨터 활용이 중요한 수학 강좌 중 하나이다. Sutner(2005)는 컴퓨터 과학 전공 학생들을 위해 계산 이산수학(computational discrete mathematics, CDM) 강좌를 개설하여 학생들이 컴퓨터 대수체계를 이용하여 실험하거나, 예제 또는 반례를 찾고, 수학적 개념에 대하여 자신이 갖고 있는 직관을 분명하게 하도록 하였다. 이를 위해 전통적인 정의-정리-증명의 방식과 달리 학생들의 수학적 지식에 근거한 질문으로부터 계산 예제 및 실험을 통해 이해를 넓히게 되었다. 여기서 증명은 일반적으로 관찰을 확인하는 것을 의미한다.

본 연구진은 대학 이산수학에서 컴퓨터 활용과 더불어 학생이 학습의 전 과정(learning process)에 참여하는 학생중심의 강의 운영 방법을 시도하였다. 본 사례는 학생들 스스로 예습, 복습, 질문, 답변, 토론, 발표에 참여하고, 그에 맞는 적절한 평가를 진행한 것으로, 교수자가 많은 시간을 들이지 않고도(즉 교수 및 조교의 추가 작업이 없이도), 그리고 이제는 우수한 조교지원이나 특별한 교육환경 등 행정 지원이 없어도 보통의 교수가 보통의 강의실에서 강의를 운영하여도 개인별, 수준별, 맞춤형, 창의적 교육이 가능했다는 사실을 보고한다.

II. 학생중심의 대학 이산수학 강의 운영 사례

본 연구진은 그간 미적분학, 선형대수학, 수학적 모델링, 수확사 등 여러 과목에서 다양한 강의 운영 방법을 시도하였다³⁾. 본 절에서는 2018학년도 1학기 및 2학기 S대학교 BSM(Basic Science and Mathematics) 이산수학 과목에서 시도한 학생중심의 강의 운영 사례를 공유하고자 한다.

1. 강의 준비(강의계획서, 강의록, 실습실)

S대학교 이산수학 강의는 16주차(14주차 강의 + 1주차 중간고사 + 1주차 기말고사)의 일정으로 일반 대학에서 학습하는 과정과 동일하게 진행된다. 자세한 강의록은 각주의 웹사이트⁴⁾를 참조하라. 그리고 인터넷이 연결

²⁾ 이상구·이상욱·고영미 (2001). 정보화시대에서의 이산이란 개념의 유용성, 수학사랑, 6/7월호.

³⁾ 미적분학, 선형대수학 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/2018-Lectures-sglee.htm>

수학적 모델링 <http://matrix.skku.ac.kr/SOCW-Math-Modelling.htm> 수확사 <http://matrix.skku.ac.kr/SOCW-sglee.htm>

되는 환경이라면 누구나 시간과 공간의 제약 없이 이산수학을 학습하고 실습할 수 있도록 강의록과 실습실을 웹에 모두 공개하여 제공하였다(<표 II-1>, <표 II-2> 참조).

<표 II-1> 이산수학 장별 강의록

장 별	내 용	강 의 록
1	집합과 논리	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-1/
2	증명	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-2/
3	함수, 수열, 관계	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-3/
4	알고리즘	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-4/
5	정수론	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-5/
6	계수법과 비둘기집 원리	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-6/
7	점화 관계	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-7/
8	그래프 이론	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-8/
9	트리	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-9/

<표 II-2> 계산 서버와 개발된 이산수학 실습실

SageMath 셸 (http://sage.skku.edu/) SageMath 노트북 (http://math1.skku.ac.kr/)	이산수학 실습실 (http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Labs.htm)
 <p>SKKU Sage Cell Server</p> <p>▶ 공개된 자료(Published Data) 공개된 Sage자료 목록 Linear Algebra with Sage Interactive Linear Algebra</p> <p>이공간에 영영어를 입력 후 실행버튼을 누르세요. (Type some Sage code below and press Evaluate.)</p> <p>실행(Evaluate) 사용 방법(How To Use)</p> <p>SageMath: Mathematical Computation Software</p> <p>Math1 Sage Notebook</p> <p>Math1 Sage Notebook</p> <p>시스템 소개 (Introduction)</p> <p>공개된 자료(Published Data)</p> <p>SKKU Sage Cell Server</p> <p>System Information</p> <p>Version: 2018.09.02</p> <p>Secret Server: 2018.09.02 11:11:46</p> <p>System: Linux</p> <p>System: Linux</p> <p>System: Linux</p> <p>System: Linux</p>	 <p>SKKU Discrete Math</p> <p>[Sage Reference]</p> <p>http://matrix.skku.ac.kr/2010-Album/Sage-Reference-SKKU.pdf</p> <p>DM Ch. 1, Sets and Logic</p> <p>DM-Ch-1-Lab http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-1-Lab.html</p> <p>DM Ch. 2, Proofs</p> <p>DM-Ch-2-Lab http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-2-Lab.html</p> <p>DM Ch. 3, Functions, Sequences, and Relations</p> <p>DM-Ch-3-Lab http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-3-Lab.html</p>

특히 강의에 사용한 이산수학 실습실은 본 연구진이 그간 미적분학, 선형대수학, 기초통계학 및 공학수학 교육을 위해 SageMath⁵⁾와 RStudio⁶⁾ 등의 공개 소프트웨어를 활용하여 웹/모바일 콘텐츠 및 계산도구가 포함된 실습실⁷⁾을 개발한 경험을 바탕으로, 모두 직접 개발/제작하였다(고래영 외, 2009; 김경원·이상구, 2013; 이상

4) 이산수학 1주차 강의록(강의계획서 포함) 참조 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/Ch-1/>
 5) 오픈소스 무료 공학도구 <http://www.sagemath.org/>
 6) 통계용 R 언어 오픈소스 무료 도구 <https://www.r-project.org/>

구·이재화·김경원, 2013; 이상구·장지은·김경원, 2013; 이상구 외, 2015; 이상구 외, 2016; 이상구·이재화·박경은, 2017a; 이상구·이재화·박경은, 2017b). 본 이산수학 실습실은 각 장별로 이산수학 강의록, 예제, 연습문제, SageMath 명령어를 실행할 수 있는 SageMath Cell이 하나의 html 파일로 구성되어 있으며, SageMath 명령어의 실행은 <표 II-2>에 제시된 계산 서버를 이용하여 수행한다.

이산수학은 알고리즘의 원리를 이해하는 과목으로 강의에서 배운 지식이 실제 프로그래밍 언어를 이용하여 구현되는 것을 확인하게 되면 학습 효과가 배가될 수 있는데, 본 실습실은 코딩에 대한 특별한 사전 지식이 없이도 바로 실습이 가능하여 그 목표를 충족시키고 있다. 아래는 본 연구진이 개발한 실습실에서 이산수학 강의에 직접 활용 가능한 예시의 일부이다. 그리고 본 실습실을 사용한 강의가 녹화된 링크는 각주의 웹사이트⁸⁾를 참조하라.

① 4장 알고리즘 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-4-Lab.html>

Algorithm 2.1 **Linear Search Algorithm**

ALGORITHM 2 The Linear Search Algorithm.

```

procedure linear_search(x: integer, a1, a2, . . . , an: distinct integers)
  i := 1
  while (i ≤ n and x ≠ ai)
    i := i + 1
  if i ≤ n then location := i
  else location := 0
  return location [location is the subscript of the term that equals x, or is 0 if x is not found]

```

```

1 # Linear Search Algorithm
2 @interact
3 def _(x=input_box(default=6, label='integer'), s=input_box(default=[1,5,4,2,6,3], label='distinct integers')):
4     n = len(s)
5     k = 0 # Sage(python)의 index는 0부터 시작
6     while (k <= n-1) and (x != s[k]):
7         k = k + 1
8     if k <= n-1:
9         location = k
10        print "location of ", x, " is ", location + 1, "."
11    else:
12        location = 0
13        print x, " is not in this list."
14    return

```

실행(Evaluate) Language: Sage
 Syntax Highlighting

[Permalink](#), [Shortened Temporary Link](#)

integer

distinct integers

location of 6 is 5 .

- 7) 미적분학 <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-1.htm> 공학수학 <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>
 선형대수학 <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm>
 기초통계학 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/R-Sage-Stat-Lab-1.html>
<http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/R-Sage-Stat-Lab-2.html>
 8) 강의 동영상 모음 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/2018-Lectures-sglee.htm>
 <부록> 1. 이산수학 사이버실습실 / 강의동영상 링크 참조

② 5장 정수론 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-5-Lab.html>

Algorithm 2.3 **Converting an Integer from Base b to Decimal**

This algorithm returns the decimal value of the base b integer $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$.

Input: c, n, b
 Output: dec_val
base_b_to_dec (c, n, b) {
 dec_val = 0
 power = 1
 for $i=0$ to n {
 dec_val = dec_val + c_i *power
 power = power * b
 }
 return dec_val
 }

```

1 # Converting an Integer from Base b to Decimal
2 @interact
3 def _(c=input_box(default=1101, label='number'), b=input_box(default=2, label='base')):
4     c = str(c)
5     n = len(c)
6     dec_val = 0
7     power = 1
8     for i in range(n):
9         dec_val = dec_val + Integer(c[n-i-1])*power
10        power = power*b
11    print dec_val
12
13
14
15
        
```

Language: Sage
 Syntax Highlighting

[Permalink, Shortened Temporary Link](#)

number

base

13

③ 6장 계수법과 비둘기집 원리 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-6-Lab.html>

Pseudo-Catalan number

Pseudo-Catalan numbers are defined by the formula

$$C_n^* = n! C_{n-1}^* \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

for $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 C_n^* &= n! C_{n-1}^* = n! \frac{4n-6}{n} C_{n-2}^* = (4n-6)(n-1)! C_{n-2}^* = (4n-6)C_{n-1}^* \quad (n \geq 2), \quad C_1^* = 1 \\
 &= 2^{n-1} (2n-3)(2n-5) \dots 3 \cdot 1 \\
 &= 2^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} \\
 &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = n! C_{n-1}^*
 \end{aligned}$$

```

1 # Pseudo-Catalan number 생성(정의)
2 C = 1
3 for i in range(1,10):
4     C = factorial(i)+binomial(2*(i-1),i-1)/(i)
5     print C
6
        
```

Language: Sage

1

2

12

120

1680

30240

665280

17297280

518918400

<표 II-3> 이산수학 수강생들의 개념정리/문제풀이/질문/답변 기록 일부

Part 1. Ch 7 Summarize

제목: ch 7 summarize [2:3]

등록자명: 이종욱 | 등록일자: 2018.05.31 | 조회수: 3

7.1 Introduction
점화식의 정의

Definition 1.1

A recurrence relation for the sequence a_0, a_1, \dots is an equation that relates a_n to certain of its predecessors a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .
Initial conditions for the sequence a_0, a_1, \dots are explicitly given values for a finite number of the terms of the sequence.

점화식은 수열의 일반항을 한 개 이상의 앞선 항들을 이용하여 나타낸 식이다. 점화식과 함께 처음 몇 개의 항의 값이 주어지면 수열의 모든 항의 값을 구할 수 있다. 여기서 처음 몇 개의 항을 초기조건이라고 한다.

점화식의 여러 예시들

- 피보나치 수열
- 멱집합의 원소의 개수

Example 1.2
The Fibonacci sequence is the recurrence relation $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$. The initial condition is $f_1 = 1, f_2 = 1$.

3. 하노이 탑 문제 4. 수열와 골짜기 곡선

Part 2. Ch 7 Problem Solving

Prolem solution 1

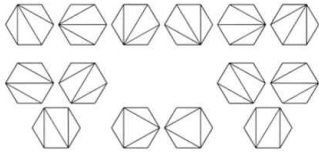
제목: Finalize by 정유민 about ch.7.1.25

등록자명: 정유민 | 등록일자: 2018.05.28 | 조회수: 12

문제 >>
Given that $C1 = C1 = 1$ and $C2 = 2$, compute $C3, C4$, and $C5$ by using the recurrence relation Example7.1.7.

개념 >> Catalan Number:

- Catalan number C_n is the number of ways to reach from point (0,0) to point (n,n). However, even though the path can touch the diagonal line that connects (0,0) and (n,n), it must not go over the line.
- Catalan number C_n can also be defined as the number of ways to divide a convex polygon with $n + 2$ sides into triangles, without the sides crossing each other. The picture below shows when $n = 4$



(1) 질문

1. 이산수학 (GE.D8007/40/2018년-1학기, 정규/강의자랑) Home > 나의 강의실 > 강의실

과목 Q&A

제목: Quiz 2 problem 2 -8

등록자명: 김동준 | 등록일자: 2018.03.15 | 조회수: 17

질문: In Quiz 2 - problem 2 of 8 it said the square of ϕ is 1 means that ϕ is 1 if is real number But I think real number includes -1, so it should not be true. I know the meaning of ϕ is some. The problem means some of real number (ϕ) can satisfy: I can make true that sentence? Can you give me a answer?

답변) 이산수학 (GE.D8007/40/2018년-1학기, 정규/강의자랑) Home > 나의 강의실 > 강의실

과목 Q&A

제목: Answer

등록자명: 김동준 | 등록일자: 2018.03.27 | 조회수: 2

답변: In Quiz 2 - problem 2 of 8 it said the square of ϕ is 1 means that ϕ is 1 if is real number But I think real number includes -1, so it should not be true. I know the meaning of ϕ is some.

DM Final PBL/Project 보고서를 마치고

처음에는 두려움 반으로 시작했던 '이산수학'이었는데 이제는 공부에 재미도 느끼고 이런 교육 방식에 적응이 다 된 것 같습니다. 사실 아직 부족한 점은 많이 있습니다. 다른 학우보다 이해가 늦고 복습도 몇 번을 더해야 이해가 될 때도 있습니다. 하지만 그럴 때마다 교수님께 질문하고 학우 분들이 답을 수정해줌으로써 제가 부족한 점이 무엇인지 알아가고 고쳐나가는 과정이 될 수 있었습니다. 특히 교수님께서 답을 주실 때 다양한 추가 자료를 함께 올려주시거나 잘못된 개념에 대해 명확히 잡아주신 덕분에 이해가 더 빨라질 수 있었습니다. 제가 이번 수업을 하면서 느낀 점은 외국인(화교)라고 해서 수학에 자신없어하고 겁먹을 필요가 없다는 것이었습니다. 시작이 조금 늦을 뿐 충분히 따라갈 수 있다는 뜻입니다. 저는 특히 시험기간에 닥쳐서 벼락치기 공부만 하던 버릇에서 벗어나 수업 이후에 복습을 한다는 것은 큰 변화였고 그 노력이 Q&A 게시판에서 고스란히 돌아올 수 있었습니다.

비단 수학적 지식뿐만이 아니라 더 나아가서 분단면 어떻게 설명하면 더 나은 답을 줄지 아니면 어떻게 질문하면 상대방이 나의 문제점이 무엇인지를 정확히 알 수 있을지에 대한 글쓰기 능력도 기를 수 있었던 것 같습니다. 뿐만 아니라 각양각색의 학우들을 이해하는데도 좋았던 시간이 될 수 있었습니다. 마지막으로 저는 이 수업을 통해서 제가 자신이 그래도 많이 바뀌었던 것에 만족합니다.

특히 계산 및 코딩과정에서 절약된 시간은 이산수학이 다루는 광범위한 주제에 대하여 질문하고 답하면서 깊이 이해하고 활용하는데 사용된다. <표 II-3>은 학생들이 이산수학 개념에 대하여 충분히 정리하고, 질문/답변하며, 토론한 기록의 일부이다. 자세한 내용은 웹사이트 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-QnA/>를 참조하라.

2. 강의 운영(교수·학습 및 학생 활동, 평가)

본 연구에서 활용한 이산수학 강의의 한 학기 분량에 대한 주차별 수업 주제와 주요 학생활동은 <표 II-4>

와 같다.

<표 II-4> 이산수학 주차별 수업주제 및 주요 학생활동

	수업주제	주요 학생활동
1주차	오리엔테이션	Q&A 질문
2주차	1장 집합과 논리 : 1.1절-1.6절	Q&A 질문과 답변
3주차	2장 증명 : 2.1절-2.2절, 2.4절-2.5절	Q&A 질문과 답변
4주차	3장 함수, 수열 : 3.1-3.2절	Q&A and 1st PBL 보고서
5주차	3장 관계 : 3.3절-3.5절	Q&A 질문과 답변, 퀴즈
6주차	4장 알고리즘 : 4.1절-4.4절	Q&A 질문과 답변
7주차	5장 정수론 : 5.1절-5.3절	Q&A and 2nd PBL, 발표
8주차	1-5장 복습 및 프로젝트 제안서 / 중간고사	중간고사
9주차	6장 계수법 : 6.1절-6.3절	Q&A 질문과 답변
10주차	6장 비둘기집 원리 : 6.7절-6.8절	Q&A 질문과 답변
11주차	7장 점화관계 : 7.1절-7.2절	Q&A 질문과 답변
12주차	8장 그래프 이론 : 8.1절-8.4절	Q&A and 3rd PBL, 발표
13주차	8장 그래프 이론 : 8.5절-8.7절	Q&A 질문과 답변
14주차	9장 트리 : 9.1절-9.4절	Q&A 질문과 답변
15주차	9장 트리 : 9.5절-9.8절	Final PBL and 발표
16주차	6-7-8-9장 프로젝트 발표 / 기말고사	기말고사

그리고 본 연구진이 시도한 강의 운영 방법은 다음과 같다. 봄 학기(3월-6월)를 기준으로 한다.

- ① 교수자가 개강 전에 미리 제공한 강의록과 실습실을 학생들이 예습한 후 오프라인 강의시간에 만난다. 여기서 예습은 대학에 구축된 학습관리 시스템(Learning Management System, LMS)의 QnA에 자신이 공부한 개념에 대하여 자신의 언어로 정리하거나, 궁금한 것에 대해 질문 또는 다른 학생들의 질문에 답변하는 것을 포함한다. 그리고 예습을 못한 학생들을 위해 강의시작 후 15분 정도를 할애하여 LMS를 통하여 복습 및 예습을 하도록 유도하고 이것으로 출석 부르는 것을 대체한다.
- ② 오프라인 강의에서는 (학생들의 QnA 참여 기록을 참고하여) 학생들이 학습한 개념을 잘 이해하고 있는지 질문 또는 학생들의 질문에 답변하면서 수업을 진행한다. 종료 15-20분 전에 강의를 마친 후, 학생들이 당일 배운 내용을 구두로 발표 또는 QnA에서 요약하도록 한다. 모든 과정은 강의와 함께 녹화하여 LMS에서 언제든지 볼 수 있도록 한다. <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/2018-Lectures-sglee.htm>
- ③ 교수자는 연습문제를 선별(예. 짝수 번호 문제들 또는 3의 배수 문제들)하여 웹 또는 파일로 제공한 후, 학생들이 이 문제들을 그대로 또는 수정/변경하여 풀어 매주 3-4문제 정도씩을 LMS의 QnA에 업로드 한다. 동시에 다른 학생들이 풀 문제를 검토하여 수정하거나, 이해가 안 되는 부분은 반복하여 질문하면서

토론하도록 유도한다. 이때 본인이 참여한 기록에는 아래 예시와 같이 태그(tag)를 달아서 토론 과정을 볼 수 있도록 한다.

2018. 04. 06. 질문/Solution by 오**	(최초 질문/풀이)
2018. 04. 06. Answer/Revised solution by 이**	(답변/수정)
2018. 04. 07. Finalized by 오**	(학생이 보기에 마무리 된 것은 Final 선언)
2018. 04. 08. Finalized OK by Prof. *** or TA ***	(교수자/조교가 최종 검토/확인)

이 과정에서 교수자와 조교는 토론의 시작부터 끝까지 순조롭게 진행되도록 정기적으로 살펴보아 적절한 참고자료 등을 제시하거나 학생들이 답하지 못하는 것들에 대하여 최종적으로 정리해준다.⁹⁾ [그림 II-1]은 학생들이 수행한 활동 기록의 일부이다. <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-Sol/2018-DM-Sol.htm>

질 문	답 변 / 토 론
<p>과목Q&A</p> <p>제목: 5.1의 Theorem 1.7에 대한 증명 (Use Contradiction), Please add and REVISE</p> <p>등록자명: 오정호 등록일자: 2018.04.06 조회수: 40</p> <p>첨부파일:</p> <p>요약문 1. positive integer $n > 1$ is composite \rightarrow n has a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$</p> <p>(Proof) BWOC Suppose that n is composite and n does not have a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$ (\Rightarrow n has a divisor d_2 satisfying $\sqrt{n} < d_2 < n$)</p> <p>So a composite $n = d_2 \cdot q_2$ for some integers d_2 and q_2 $\Rightarrow n = d_2 \cdot q_2 > \sqrt{n} \cdot q_2$ (because $\sqrt{n} < d_2 < n$) $\Rightarrow \sqrt{n} > q_2$ (divide both side by \sqrt{n})</p> <p>Since q_2 is also divisor of n ($n = d_2 \cdot q_2$ and $\sqrt{n} < d_2 < n$) \Rightarrow divisor q_2 of n should be $2 \leq q_2 \leq \sqrt{n}$ (만일 둘다 크면 그 둘을 곱한 것은 n 보다 커지므로 It occurs a contradiction)</p> <p>(따라서 n is composite 이면 n should have a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$)</p> <p>1. So a positive integer $n > 1$ is composite \rightarrow n has a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$ 2. n has a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n} \rightarrow$ positive integer $n > 1$ is composite 3. n has a divisor d satisfying $d = 1, n$. \Rightarrow So n is composite</p> <p>(틀린 부분이나 보충할 부분을 지적해주시면 감사하겠습니다.) Please add and REVISE you suggestions to improve</p> <p style="text-align: right;">▶답변 ▶해답</p>	<p>과목Q&A</p> <p>제목: re:저는 조금 다르게 생각했는데요</p> <p>등록자명: 이대희 등록일자: 2018.04.06 조회수: 27</p> <p>첨부파일:</p> <p>답변 'n이 composite이다'와 'n은 2와 root n사이의 divisor를 가진다'는 동치이다.</p> <p>동치 인것을 보이려면 두 방향을 모두 보여야 한다. 여기서의 한 방향 \Rightarrow 만 보인다.</p> <p>1. If n is composite, when $n = ab$ ($1 < a \leq b < n$), a has prime factor. (Because $a \geq 2$.)</p> <p>$\therefore p \leq a$ $\therefore p \leq \sqrt{n}$ (Because $p^2 \leq a^2 \leq ab = n$)</p> <p>$p a, a n \Rightarrow p n$</p> <p>\therefore n has prime factor p less than \sqrt{n} ****</p> <p>1. positive integer $n > 1$ is composite \rightarrow n has a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$</p>
토 론 / 증 명	
<p>(Proof) BWOC Suppose that n is composite and n does not have a divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$ (\Rightarrow n has a divisor d_2 satisfying $\sqrt{n} < d_2 < n$)</p> <p>So a composite $n = d_2 \cdot q_2$ for some integers d_2 and q_2 $\Rightarrow n = d_2 \cdot q_2 > \sqrt{n} \cdot q_2$ (because $\sqrt{n} < d_2 < n$) $\Rightarrow \sqrt{n} > q_2$ (divide both side by \sqrt{n})</p> <p>Since q_2 is also divisor of n ($n = d_2 \cdot q_2$ and $\sqrt{n} < d_2 < n$) \Rightarrow divisor q_2 of n should be $2 \leq q_2 \leq \sqrt{n}$ (만일 둘다 크면 그 둘을 곱한 것은 n 보다 커지므로 It occurs a contradiction)</p> <p>(따라서 n is composite 이면 n should have a</p>	<p>divisor d satisfying $2 \leq d \leq \sqrt{n}$)</p> <p>\Rightarrow (증명) 정의에 의해 n이 composite이므로 2와 n 사이의 divisor와 quotient를 가진다. ($n = d \cdot q$)</p> <p>Case 1: If $d < \sqrt{n}$, 주어진 명제를 만족한다.</p> <p>Case 2: If $d > \sqrt{n}$, $n = d \cdot q$ for some integer q and q의 범위는 $q < \sqrt{n}$ 이다 (왜냐하면 $q > \sqrt{n}$ 이면 $d \cdot q > n$보다 크므로 모순이 생기기 때문이다.)</p> <p>따라서 $n = d \cdot q$ 이면 $d < \sqrt{n}$ or $q < \sqrt{n}$. 즉 n은 2와 root n사이의 divisor를 가진다.</p>

[그림 II-1] LMS의 QnA에서 이산수학 개념에 대한 학생활동(질문/답변/토론/증명) 예시

9) 본 이산수학 강의 운영에서 조교의 구체적인 역할은 다음 웹사이트를 참고하라. <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-TA/>

- ④ 매월 학생 본인이 개념정리/문제풀이에 대하여 질문/답변/풀이/수정/Final에 참여한 문제들을 모아서 교수자가 미리 제공한 PBL 보고서 양식([그림 II-2] 참조)에 채워 넣어 LMS의 과제함에 제출한다.
- ⑤ 교수자는 이 과제들을 모아서 평가한 후, 교수자/조교에 의해 최종 확인(Finalized OK)된 문제들을 중심으로 시험 전에 일부 학생에게 발표를 시키고, 그 발표 내용을 녹화하여 LMS 또는 무료 동영상 공유사이트(예. YouTube)를 통하여 다시 보면서 중간고사 시험을 준비할 수 있도록 한다. 중간고사 문제는 Finalized OK 된 문제들을 중심으로 Sample Exam 문제를 만들어 학습에 도움을 주되, 실제 시험에서는 그 중 50% 정도를 출제한다. 이와 동시에 중간고사 이후 성적을 고려하여, 우수 성적학생들을 조장으로 고르게 팀을 임시로 구성해 주고, 조장이 팀원을 조정할 수 있는 권한을 주어 2-3주간 팀을 확정하게 한다.

PBL Report (Form) Flipped/PBL Action Learning

Discrete Mathematics

Prof : Sang-Gu LEE

Name (이름) :
Major and Student No (전공 및 학번) :
e-mail and phone (이-메일 및 전화번호):

◆ Personal Reflection Note

Subject	Discrete Mathematics	Major	
Name		Year	2018 1 st Semester
Learning contents	Ch 1~9		
Self-Checking			

[그림 II-2] PBL 보고서 양식

- ⑥ 조장들과 교수자는 토론을 통해 기말 프로젝트/시험/발표의 주제를 구체화하여 최종 선정한다. 기말 프로젝트는 아래 세 가지 주제에서 선택하도록 하고, 5월 말까지 개인 및 팀별로 PBL 보고서 초안을 모두 제출하게 한다. 교수자와 조교는 이 과정에서 효과적으로 의견을 반영하여 결과물의 완성도를 높인다.

장별 문제풀이의 Finalization (장별로 마무리하지 못한 문제들을 풀이하여 최종적으로 검토/정리)
심화/응용/알고리즘 코딩 프로젝트 (강의에서 배운 내용을 적용)
기타 (QnA에서 논의된 유의미한 내용들을 취합하여 정리 등)

- ⑦ 개인 및 팀별 PBL 보고서 초안을 채점하면서 초안의 성적을 공개하고, 수정/보완할 기회를 제공한다. 수정/보완이 완료된 개인/팀별로 최종 버전의 개인 및 팀별 PBL 보고서를 제출하도록 하고, 그 자료를 전체 학생들 앞에서 발표([그림 II-3] 참조)하여, 상호 평가 하도록 한다. 최종 PBL 결과물은 다음을 참조하라.
<http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-PBL/>



[그림 II-3] 학생 PBL 발표 동영상 예시(<https://youtu.be/dCpwwKht5a8>)

⑧ 최종 평가는 각자의 학습과정과 결과물 그리고 발표에 대하여 교수평가와 동료평가 항목에 적당한 비율을 주어 합산한다. [그림 II-4]는 본 강좌의 평가 예시이다.

이름	Offline 출석	Online 출석/참여	중간고사	PBL/Project	Final(기말)	Total
***	11	6	23	10	40	90
***	13	6	19	10	39	87
***	10	5	21	10	39	85
***	10	6	20	10	36	82
***	13	5	15	10	38	81
***	13	5	18	10	32	78
***	9	4	19	10	36	78
***	9	4	14	10	37	74
***	10	5	12	10	36	73
***	11	5	16	10	31	73
***	10	4	13	10	33	70
***	10	3	12	10	29	64
***	10	3	11	10	29	63
***	10	5	12	10	25	62

[그림 II-4] 분야별 및 종합 평가 예시

3. 강의를 마치고

한 학기 강의가 진행되는 동안 학생들은 예습, 복습, 토론, 질의, 답변 및 팀 단위로 프로젝트 수행 등의 활동을 하였다. 그리고 이 모든 과정은 LMS의 QnA를 통하여 학생들 스스로 토론과 협업을 통해 이루어졌다. [그림 II-5]는 이 수행과정이 LMS의 QnA에서 충분하게 이루어졌음을 보여준다(2018년 11월 23일 현재 QnA 게시글 2167건). 교수자와 조교는 이 과정에서 학생들이 제출한 결과물을 검토하여, 학습에 도움이 되는 자료 등을 추가하고, 보기에 좋도록 마무리 작업을 거쳐 학생들이 언제든지 다시 살펴보고, 복습할 수 있도록 하였다. 이는 다음 학기의 좋은 학습 자료로 이용된다. 그 예로, 교재의 문제들을 학생들이 풀고, 교수자와 조교가 검토하여 완성한 자료의 일부는 다음과 같다.

- ① 4장 알고리즘, 5장 정수론 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-Sol/Ch4/>
- ② 6장 계수법과 비둘기집 원리 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-Sol/Ch6/>
- ③ 7장 점화 관계 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-Sol/Ch7/>

또한 [그림 II-5] 하단의 문제풀이 예시에서 보듯이, 본 연구진이 강의를 위하여 웹으로 제작한 강의록과 실습실(<표 II-1>, <표 II-2> 참조)을 활용하면, 문제풀이에 사용된 개념과 설명을 과제에 포함시키거나 실습에 사용된 코드들을 마우스 클릭과 드래그를 통해 캡처(capture) 및 복사가 가능하다. 따라서 학생들이 토론하는 가운데 필요한 수식 등 관련 자료를 입력해야 하는 번거로움이 없다.

번호	제목	작성자	작성일자	조회수	첨부파일
2167	Ch8 review	만	2018.11.23	0	N
2166	Dijkstra's Algorithm LectureNote 수정	이	2018.11.23	3	N
2165	Summary of ch. 8.1 - 8.4	신	2018.11.23	1	N
2164	오늘 수업에서 dijkstra 알고리즘을 배웁니다.	김	2018.11.23	1	N
2163	path and cycle	김	2018.11.23	1	N
2162	Ch 8. dijkstra's algorithm (다익스트라 알고리즘)	이	2018.11.23	5	N
2161	Dijkstra's Shortest Path Algorithm	신	2018.11.23	4	N
2160	Ch 8 오늘 배운 내용	정	2018.11.23	1	N
2159	이번시간 복습	김	2018.11.23	1	N
2158	복습	김	2018.11.23	1	N
2157	Complete graph	권	2018.11.23	2	N
2156	bipartite and complete bipartite	염	2018.11.23	2	N
2155	n-Cube (Hypercube)	정	2018.11.23	1	N
2154	이번 수업에서 흥미로웠던 것	김	2018.11.23	2	N
2153	Chapter 8 Bacon number	전	2018.11.23	3	N
2152	chapter8 1~4	김	2018.11.23	3	N
2151	Graph	김	2018.11.23	3	N
2150	Summary of today's class	각	2018.11.23	1	N

[Finalized] Problem 11, Ch.8, P.459, Chapter-Self Test

Solved by 강** Date.2018.11.17

Revised by 청** Date.2018.11.17

Revised by Muhammad ** Date. 2018.11.23

Problem 11

11. Show that the graph has no Hamiltonian cycle.



Solution: Since there are seven vertices, a **Hamiltonian cycle must have seven edges**.

Suppose that we could eliminate edges from the graph, leaving just a Hamiltonian cycle:

We would have to eliminate three edges at vertex b and one edge at vertex f. This leaves $10-4=6$ edges, thus it is not enough for a Hamiltonian cycle.

Conclusion: Therefore, the graph does not have a Hamiltonian cycle. ■

[그림 II-5] 이산수학 LMS에서 학생들의 QnA 활동 상황 및 문제풀이 예시

학생들이 이번 강의를 통하여 주로 경험하고 느꼈다고 보고한 내용의 일부는 다음과 같다. 자세한 내용은 웹 사이트 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-PBL/>에서 확인할 수 있다(<부록> 2. 학생 강의 평가의 일부 참조).

- ① 팀원들과 함께 문제를 풀고, 질문하고, 공유하면서 개념에 대하여 더욱 깊이 있는 고민을 하게 되었다.
- ② 역할분담을 통해 책임감과 성실성, 진실성을 배웠다.
- ③ 문제를 여러 각도에서 바라볼 수 있는 능력을 키웠다.
- ④ 본인이 이해한 것을 다른 사람에게 설명해 줄 수 있는 능력을 키웠다. 이를 통해 본인이 제대로 이해하고 있는지 확인하게 되었다. 또한 다른 사람의 관점도 이해하게 되었다.
- ⑤ 학생들이 주도적으로 예습하고, 질문하고, 답변하고, 복습하고, 발표한다.
- ⑥ 혼자 공부할 때 보다 더욱 많은 것을 배우게 되었다.
- ⑦ 코딩과 컴퓨팅 사고력의 중요성에 대하여 깨달았다.
- ⑧ 더구나 수학의 내용을 배우고, 문제를 풀면서 자연스럽게 코딩과 컴퓨팅 사고력을 익힌 것이 감사하다.

[그림 II-6]은 이산수학 강의 종료 후 한 학생이 PBL 보고서에 작성한 소감을 발췌한 것이고, [그림 II-7]은 한 학생의 PBL 보고서의 월별 소감을 발췌한 것이다. 이를 통해 처음에는 이 방식이 굉장히 낯설었지만, 점차 공부습관이 바뀌고, 적극적으로 수업에 임하며, 동료와 함께 다양한 각도에서 문제를 바라보고, 어려운 문제도 자료 조사를 통해 해결해내는 자신감을 갖게 된 것을 볼 수 있다.

한 학기가 끝나가는 지금, 이산수학 QnA 게시판에는 약 1300여 개의 게시물이 게시되어있다. 그리고 나는 그 속에서 수십 번의 참여를 했고, 최종 PBL 리포트는 100장 가까이 채워졌다. 이것들이 의미하는 것은 무엇일까. 4년 간 대학교를 다니며 어느 강좌의 아이캠퍼스 QnA 게시글도 100개 이상을 넘어본 적이 없다. 아니 95% 이상은 10개를 넘어본 적도 없다. 게시글의 내용도 지식을 공유하는 내용이 아닌, 시험범위가 어디냐, 조원 연락 달라, 성적을 알고 싶다. 등의 학습과는 상관이 없는 내용뿐이다. 그런데 이산수학은 천 개가 넘는다니. 그리고 모든 것의 내용이 학습에 관련된 질문, 답변이라니. 대단하지 않을 수가 없다.

*** 교수님의 PBL 방식의 수업은 앞에서 보듯 다른 수업과는 다른 큰 차이, 커다란 변화를 보여준다. **일방적으로 주입받는 수업이 아니라 학생들이 주도하고, 학생들을 위해 교수님과 조교님은 보조역할을 하는, 대단히 획기적인 수업방식이다.** 처음에는 이 방식이 굉장히 낯설고 마냥 긍정적으로 느껴지지는 않았지만, 시간이 흘러 이 방식에 맞춰 학습을 이어나가는 꽤나 익숙해지며 달라지는 나를 발견할 수 있었다. **학우들과의 피드백에 적극적으로 나서는 나를 보았으며 이해가 어려운 부분은 추가적인 자료 조사를 통해 이해하며 공유하는 나를 보았다.** 그리고 이런 활동의 결과들을 모아 정성이 깃든 Final PBL를 작성하게 되었다.

많은 학우들에게 커다란 긍정적인 변화를 안겨준 이산수학 수업 방식이 앞으로 더 많은 학생, 그리고 더 다양한 학교에 전해진다면 대학교육에 좋은 변화를 안겨줄 것이라고 생각한다.

[그림 II-6] 이산수학 강의 종료 후 한 학생이 PBL 보고서에 남긴 소감(발췌)

그리고 본 강의를 운영하며 교수자의 입장에서 느낀 점은 다음과 같다.

- ① 강의 자료와 동영상 준비하여 제공한 후 학생들이 참여도가 많이 높아졌다.
- ② 학생들의 학습과정에 교수와 조교가 효과적으로 의견을 반영하면서, 토론과 문제풀이 및 발표의 결과물의 질이 크게 향상되었다.
- ③ 이산수학 실습실을 활용하면서 실제 학생들의 관련 문제에 대한 자신감이 크게 향상되었다.

본 연구진이 시도한 이산수학 강의는 학생이 학습과정에 주도적으로 참여하게 하는 학생 중심의 강의이다. 이를 위해 이산수학 사이버 실습실을 개발하여, 디지털과 첨단 모바일/인터넷 환경을 강의에 적절히 반영하였고, LMS를 통해 동료 및 교수자와 함께 질문, 답변, 토론하며 개념에 대해 깊게 이해하고 설명할 수 있도록 하였다. 또한 이 과정을 평가에 적절히 반영하여 학생들은 학습하는 과정에서 자신의 문제를 해결해가는 과정을 서술하고, 발표하는 비판적 사고 능력을 자연스럽게 갖추도록 힘썼다. 강의를 통하여 학생들의 문제 해결력 상승 및 토론을 통한 지식 공유와 같은 공부 방식의 변화 등 긍정적인 효과를 거두었다. 본 연구진이 시도한 학생 중심의 이산수학 강의 운영 사례는 대학 수학의 효과적인 운영 모델의 하나로 여겨진다.

3월 : 생각보다 정신없이 지나간 3월과 4월, 이산수학 PBL 보고서에 더 많은 내용을 담지 못해 아쉬울 따름입니다. **접해보지 못한 학습방법을 통해 계속해서 새로운 경험을 느끼고 있고, 앞으로도 계속 기억에 남을 것 같습니다.** 아무래도 개인적인 욕심은 양보다 질로서 승부하고 싶은데, 아직은 양과 질 모두 잡지 못한 것 같아 안타깝습니다. 계속해서 좋은 활동 보여서 좋은 결과로 열매를 맺을 수 있기를 바라는 바입니다.

4월 : 군대 제대 복학 후 첫 학기인 만큼 좋은 성적을 거두고 싶은 1학기, 제가 잘 할 수 있을까 고민도 많이 되고 노력도 합니다만 아직은 제 스스로가 만족은 못하는 것 같습니다. 여러 가지를 공부함에 있어서 아직은 조금 소홀한 느낌도 받고 있기 때문입니다. 아직 4월은 1/3밖에 지나지 않았고 중간고사까지도 시간이 있는 만큼 남은 시간 학업에 증진하여 보다 좋은 성적을 받게됩니다. 그러기 위하여 *** 교수님의 뜻을 열심히 따라가 볼 생각입니다. 좋은 결과가 나왔으면 좋겠습니다.

5월 : 중간고사를 보고나서 조금 해이해졌던 점을 부정할 수 없습니다. 3학년이 되고 여러 가지 것들을 모두 신경쓰다보니 아무래도 교양이고 재수강이었던 이산수학에 영향을 미쳤던 것 같습니다. 하지만 교수님께서 수학과로서 모범이 되는 모습을 보이고, 이 수업에서 요구하는 것들을 해내는 것이 나중에 회사에서의 제 가치를 만드는 것이라는 말씀을 하셔서 더욱 마음을 다잡고 열심히 하기로 마음먹었습니다. 5월이 이제 불과 2일 남은 지금, 기말고사도 머지않았기 때문에 수학과로서 **자부심을 가지고 2018학년 1학기 이산수학 수업을 잘 마무리 짓고 싶습니다.** 또한 뿐만 아니라 이번 주까지 Team project도 잘 완료해서 후회 없이 끝낼 수 있다면 좋겠습니다.

6월 : 눈 깜짝할 사이에 지나간 한 학기였던 것 같습니다. 전역하고 첫 학기라서 그런지 더욱 새롭고 적응하기 힘들었던 대학교에서의 1학기였습니다. 그 중에서도 **가장 신선했던 것은 이산수학의 학습방식이었습니다.** 이제까지의 대학교 수업에서는 보지 못했던 참여형 수업이 저에게 사실 적지 않은 부담이기도 했습니다. 결과적으로 제가 이제까지 대학교에서 공부하던 습관자체를 바꿀 수 있게 되는 계기가 되었습니다. 기본적으로 예습복습이 어느 정도 필요하기 때문에 시험기간이 아닐 때에도 수업시간에서 배운 것들을 다시 한 번 훑어보고 공부해야합니다. 이런 식으로, 다른 과목을 공부할 때에도 미리미리 복습을 하여 시험기간에 최대한 덜 바쁠 수 있도록 했습니다.

제 나름대로는 팀원과의 합도 나쁘지 않았고 조장으로서는 부족한 점이 많았지만 오히려 또 이 계기를 통해 배우는 것도 많았습니다. 이산수학 첫 수업을 들었던 것이 엇그제 같은데 벌써 끝이라니 아쉽기도 합니다. 여러 가지 경험을 한꺼번에 모두 경험하게 해준 이산수학수업을 앞으로 잊지 못할 것 같습니다.

[그림 II-7] 한 학생의 PBL 보고서의 월별 소감(발췌)

III. 결론

본 연구에서는 학생중심의 대학 이산수학 강의 운영 사례를 소개하였다. 구체적으로 미리 제공한 강의록과 사이버실습실을 바탕으로 학생들이 스스로 LMS를 통해 연습, 복습, 질문, 답변, 토론을 충분히 할 수 있도록 하였으며, 팀별로 기말 프로젝트에 참여하게 하였다. 그리고 한 학기 동안의 모든 학습과정을 PBL 보고서로 작성하여 제출, 발표하고 이를 바탕으로 한 평가를 하였다.

특히 본 강의의 운영 모델은

- ① 학생들에게 여러 번의 기회를 주면서 학습을 따라오도록 유도하고
- ② 최종 평가는 매월 1회 정도씩 하며
- ③ 이 조차도 따라오지 못하는 학생들에게는 따라잡을 수 있는 기회를 제공하면서
- ④ 중간고사는 평이하게 다른 강좌와 같이 오프라인/공동시험으로 치루고
- ⑤ 그 후에는 문제풀이/토론/기록/수정/발표를 통하여 학습을 하게하고
- ⑥ 그것들을 모아서 제출/발표하는 것으로 평가를 할 수 있으므로

모든 학습과정을 학생들 스스로 수행하여, 교수자가 많은 시간을 들이지 않고도, 그리고 여러 지원 또는 우수한 조교가 없어도(즉 교수 및 조교의 추가 작업이 없이도) 개인별, 수준별, 맞춤형, 창의적 교육이 가능하다. 학생들이 교육을 통하여 인재로 성장할 수 있도록, 새로운 강의를 설계하고, 시도하며, 개선한 노력을 통해 2002년부터 2018년까지 꾸준히 교육상을 수상한 바 있는 저자의 경험으로 볼 때, 본 이산수학 강의 사례와 같은 새로운 시도를 주저할 필요가 없다고 생각한다. 본 연구진의 강의 운영 모델이 미적분학, 선형대수학, 공학수학, 기초통계학, 미분방정식 등 다른 BSM 수학 강좌를 운영하는 모델로 활용될 수 있기를 기대한다. 본 강의를 하면서 개발되고 진행된 모든 결과물은 각주의 웹 사이트¹⁰⁾에서 확인할 수 있다.

참 고 문 헌

- 고래영·김덕선·박진영·이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 1023-1041.
- Ko, R.Y., Kim, D.S., Bak, J.Y. & Lee, S.G. (2009). Development of Mobile Sage-math and its use in Linear Algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 1023-1041.
- 김경원·이상구(2013). 모바일 선형대수학 스마트폰 콘텐츠 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **27(2)**, 121-134.
- Kim, K.W. & Lee, S.-G. (2013). Development of smart-phone contents for mobile linear algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **27(2)**, 121-134.
- 김윤주 (2007). 이산수학 교육에 대한 연구, 한남대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- Kim, Y.J. (2007). *A study on the discrete mathematics education*, Master thesis, Hannam University, Daejeon.

¹⁰⁾ 강의 동영상 모음 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/2018-Lectures-sglee.htm>

문제 정리 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-Sol/2018-DM-Sol.htm>

QnA 기록 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-QnA/>

PBL 보고서 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-PBL/>

조교의 역할 <http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM-TA/>

- 이상구 · 이금희 · 최용석 · 이재화 · 이지영 (2015). R을 활용한 '대화형 통계학 입문 실습실' 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **29(4)**, 573-588.
- Lee, S.-G., Lee, G.H., Choi, Y.S., Lee, J.H. & Lee, J.J. (2015). Interactive Statistics Laboratory using R and Sage, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **29(4)**, 573-588.
- 이상구 · 이재화 · 김경원 (2013). Sage 행렬계산기와 선형대수학 Sage 콘텐츠, 한국수학논문집, **21(4)**, 503-521.
- Lee, S.-G., Lee, J.H. & Kim, K.W. (2013). Sage Matrix Calculator and full Sage contents for Linear Algebra, *The Korean Journal of Mathematics*, **21(4)**, 503-521.
- 이상구 · 이재화 · 박경은 (2017a). 대화형 수학 디지털교과서 개발과 활용 사례 연구-선형대수학을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **31(3)**, 241-255.
- Lee, S.-G., Lee, J.H. & Park, K.E. (2017a). Development and Usage of Interactive Digital Linear Algebra Textbook, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **31(3)**, 241-255.
- 이상구 · 이재화 · 박경은 (2017b). 디지털 시대의 대학수학교육: 선형대수학을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **31(4)**, 367-387.
- Lee, S.-G., Lee, J.H. & Park, K.E. (2017b). Linear Algebra Teaching in the Digital Age, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **31(4)**, 367-387.
- 이상구 · 이재화 · 박준현 · 김응기 (2016). SageMath를 활용한 '대화형 공학수학 실습실'의 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **30(3)**, 281-294.
- Lee, S.-G., Lee, J.H., Park, J.H. & Kim, E.-K. (2016). Interactive Engineering Mathematics Laboratory, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **30(3)**, 281-294.
- 이상구 · 장지은 · 김경원 (2013). Sage와 Geogebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활용, 수학교육 학술지, 2013국제수학영재교육학술대회 프로시딩, 113-123.
- Lee, S.-G., Jang, J.E. & Kim, K.W. (2013). Development and Application of Visual-Dynamic Data for Linear Algebra Using Sage and Geogebra, *Studies in Mathematical Education, Proceedings of the 2013 International Conf on Math Edu.* 113-123.
- 이재학(2003). 교사양성대학에서의 이산수학 교육과정, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **15(1)**, 43-52.
- Lee, J.H. (2003). Discrete Mathematics Curriculum at Teacher Training College, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **15(1)**, 43-52.
- Sutner, K. (2005). CDM: Teaching Discrete Mathematics to Computer Science Majors, *ACM Journal of Educational Resources in Computing*, **5(2)**, Article 4. 1-11.

Student-Centered Discrete Mathematics Class with Cyber Lab

Lee, Sang-Gu

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea

E-mail : sglee@skku.edu

Lee, Jae Hwa[†]

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea

E-mail : jhlee2chn@skku.edu

This study deals with the case of student-centered discrete mathematics class with cyber lab. First, we provided lecture notes and cyber labs we developed. In particular, discrete mathematics is a course that covers the principles of algorithms. The purpose of this study is to provide students with basic mathematics, aiming to actively participate in the learning process, to improve their abilities and to reach the ultimate goal of student success with confidence. Second, based on interactions, students were able to prepare for the lectures, review, question, answer, and discussion through an usual learning management system of the school. Third, all the students generated materials through one semester, which were reported, submitted, presented and evaluated. It was possible to improve the learning effectiveness through the discussions and implementation of using some easy open source programming language and codes. Our discrete math laboratory could be practiced without any special knowledge of coding.

These lecture models allow students to develop critical thinking skills while describing and presenting their learning and problem-solving processes. We share our experience and our materials including lecture note and cyber lab as well as a possible model of student-centered mathematics class that does not give too much of work load for instructors. This study shares a model that demonstrates that any professor will be able to have an individualized, customized, and creative discrete education without spending much of extra time and assistant, unlike previous research.

* ZDM Classification : M55, I75, I85

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80, 97U70, 68R01

* Key Words : Discrete Mathematics, Student-Centered Learning, Cyber Lab

* This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education(2017R1D1A1B03035865).

[†] Corresponding author

<부록>

1. 이산수학 사이버실습실 / 강의동영상 링크 (강의록 자료는 본문 참조)

장 별	내 용	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Labs.htm
1	집합과 논리	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-1-Lab.html
2	증명	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-2-Lab.html
3	함수, 수열, 관계	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-3-Lab.html
4	알고리즘	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-4-Lab.html
5	정수론	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-5-Lab.html
6	계수법과 비둘기집 원리	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-6-Lab.html
7	점화 관계	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-7-Lab.html
8	그래프 이론	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-8-Lab.html
9	트리	http://matrix.skku.ac.kr/2018-DM/DM-Ch-9-Lab.html

장 별	내 용	강의 동영상
-	Introduction	https://youtu.be/9ahFnOFTWNQ
1	집합과 논리	https://youtu.be/QgdKqmCFW2Y https://youtu.be/92siPfThf0M https://youtu.be/7M7w9eX5D0Q
2	증명	https://youtu.be/xEMkHb2AkYk https://youtu.be/areatkjOjcg
3	함수, 수열, 관계	https://youtu.be/MhM_9ZuGAis https://youtu.be/ZjAtN9HkZwM https://youtu.be/Uuwsx2aiEPI
4	알고리즘	https://youtu.be/Dtv-9ykjFFA
5	정수론	https://youtu.be/NN46r0qlIW0 https://youtu.be/af5MPAjkMcI https://youtu.be/sSuz8J3MSA
-	Midterm Exam Review	https://youtu.be/iAfQCycd6ac
6	계수법과 비둘기집 원리	https://youtu.be/AU_AbwTSL_Y https://youtu.be/yBwkCoX460o
7	점화 관계	https://youtu.be/1n0dC_ICo4U
8	그래프 이론	https://youtu.be/TSFIJBU2dX8 https://youtu.be/iqUTt5C1Tos https://youtu.be/at7Hx5wxnYk https://youtu.be/MHDJ3rALtEU
9	트리	https://youtu.be/v6wQeWmMBq8 https://youtu.be/g11cD6-0prs

2. 학생 강의 평가의 일부

설문내용 01.

“현재까지 받은 이 수업에서 인상깊고 유익했던 점을 적어주세요.

Please write down the most impressive and instructive aspects of this class.”

- Bring me to the discrete mathematics.
- I would 100% mentioned the fact that this class is a flipped class which is a total different thing comparing to a traditional class.
- It is good.
- PBL report
- PBL, Flipped learning
- PBL report
- Active class
- 수업이 자기 주도적으로 공부할 수 있도록 구성되어있는 것이 인상 깊었습니다.
- PBL보고서를 작성하고 Q&A를 계속 올리는 과정 속에서 시험기간이 아닌 평상시에도 공부에 손을 놓지 않았던 것 같습니다.
- Q&A를 활용한 플립드 클래스가 감명 깊었습니다.
- QnA activity and method used in general
- QnA 활동이 인상 깊다.
- 교수님의 학생들에 대한 사랑이 정말 느껴지는 감동 있는 수업입니다.
- 빠른 피드백이 좋았다.
- 새로운 수업방식으로 하는 게 너무 인상 깊은 수업
- 새로운 수업방식이 인상 깊었습니다.
- 수업 진행 방식이 너무 신기합니다.
- 평소에 공부를 하도록 과제와 질의응답을 하는 활동
- 수업만큼이나 교수님은 합리적이고 논리적으로 수업을 진행하셨습니다. 색다른 수업방식을 통해 신선한 자극을 받고 배울 수 있어 좋았습니다.
- 스스로 참여하고 자율적으로 얼마나 배웠는지를 다른 학생과 이렇게 많이 interact 할 수 있는 것은 처음입니다. 분명 사회에서도 교수님과 집단 면담 때와 같이 혼자 단독으로 이를 수 있는 것은 거의 없으며 서로가 스스로의 역할을 맡고 같이 수정해나가면서 wiki처럼 모두에게 통용되는 general한 ‘지식’을 쌓는 과정의 경험은 몹시 훌륭합니다.
- 신선한 수업방식이었고 자기주도 학습이 무엇인지 알게 되었다.

- 플립드 클래스를 통해 놓칠 수 있을만한 개념들도 다 짚고 넘어가게 됩니다.
- 플립드로 진행되는 수업에다가 QnA를 적극 활용하여 학생들끼리 공부할 수 있는 환경을 조성해주시는 모습이 학습에 도움이 많이 되었다.
- 학우들의 학습과정을 볼 수 있어, 수동적인 저를 반성하게 되었습니다.
- 획기적이고 효율 높은 수업 방식, 이를 통해 교수님의 교육이론에 대한 많은 고찰과 이념이 느껴짐.

설문내용 02.

“Please mark on one of the following:

- 1) All of the class contents were delivered in international language.
- 2) Most of the class contents were delivered in international language, even though Korean language was partially used for supplementary explanation or summary.
- 3) About half of the class contents were delivered in international language
- 4) Very few of the class contents were delivered in international language.”

답변 [1]: 22(78.6%), [2]: 4(14.3%), [3]: 1(3.6%), [4]: 1(3.6%)

설문내용 03.

“앞으로 이 수업이 보다 유익하기 위해 교수님께 제안드리고 싶은 점을 적어주세요.

Please write down your suggestions for the professor to improve the class.”

- I like everything.
- He’s doing an excellent job !
- The professor is very good in teaching lessons.
- 감사합니다.
- 매우 젠틸한 교수님이었습니다.
- 만족합니다. 열심히 하겠습니다.
- 부족한 부분이 없다고 생각함.
- 부족한 부분 없습니다.
- 이대로 하시면 됩니다.
- 모두가 예습을 하거나 수업에 흥미 및 열의를 가질 경우 손에 꼽힐 정도로 효율적인 강의방식임은 인정하는 바입니다.