

Research Paper

DOI: <https://doi.org/10.6108/KSPE.2019.23.6.001>

## 선형 오일러 방정식을 이용한 노즐의 연소불안정 감쇠 효과 평가

김준성<sup>a,\*</sup> · 문희장<sup>b</sup>

# Evaluation of Nozzle's Combustion Instability Suppression Effect by Linearized Euler Equation

Junseong Kim<sup>a,\*</sup> · Heejang Moon<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Satellite System Team, Korea Aerospace Industries, Korea

<sup>b</sup>School of Aerospace and Mechanical Engineering, Korea Aerospace University, Korea

\* Corresponding author. E-mail: [junseong.kim@koreaero.com](mailto:junseong.kim@koreaero.com)

### ABSTRACT

The wave motion inside the nozzle is known as one of the major damping elements of the rocket's combustion instability by its aeroacoustic effects that result from the flow passage through the nozzle throat. These effects can be quantitatively evaluated by the nozzle admittance. In this study, one-dimensional linearized Euler equation was adopted to calculate the nozzle admittance, and trend analysis was performed depending on the nozzle's main design variables. As a result, when nozzle converging part shortens, it is verified that the frequency dependency of the nozzle admittance is decreased due to the widened frequency range with lowered longitudinal nozzle admittance. Also, admittance estimation using the short nozzle theory is not appropriate when the first tangential mode of the pressure perturbation arises.

### 초 록

노즐 내 파동은 노즐목을 빠져나가는 유동의 공력음향학적인 효과로 인해 연소불안정을 감쇠시키는 주요 요소 중 하나로 알려져 있다. 이와 같은 효과는 노즐 어드미턴스라는 지표를 통해 정량적으로 평가가 가능하다. 본 연구에서는 현재까지 로켓 연소불안정 억제에 가장 효과적인 노즐감쇠(nozzle damping)와 연계된 노즐 어드미턴스를 구하는 여러 기법을 소개한다. 이 중, 가장 널리 알려진 1차원 선형 오일러 방정식을 도입하여 노즐의 주 설계 변수에 따른 노즐 어드미턴스의 경향을 분석하였다. 분석 결과, 노즐 수축부 길이가 짧아질수록 축방향 노즐 어드미턴스의 값이 낮게 나타나는 주파수 영역대가 확장되므로 짧은 노즐일수록 주파수 의존성을 줄인다는 기존 이론을 검증하였다. 또한, 짧은 노즐 이론을 통한 어드미턴스 예측은 1차 접선방향 압력 섭동에는 적합하지 않음을 알 수 있었다.

Key Words: Combustion Instability(연소불안정), Nozzle Admittance(노즐 어드미턴스), Nozzle Damping(노즐 감쇠), Linearized Euler Equation(선형 오일러 방정식)

### Nomenclature

Received 5 September 2019 / Revised 14 October 2019 / Accepted 16 October 2019  
Copyright © The Korean Society of Propulsion Engineers  
pISSN 1226-6027 / eISSN 2288-4548

$M_e$  : nozzle inlet mach number

$S_{mn}$  : the n-th root of the 1st differential

equation of m-th Bessel function

$c$  : acoustic velocity

$f$  : frequency

$i$  : imaginary part

$p$  : pressure

$t$  : time domain

$u$  : velocity

$x$  : axial coordinate

$y$  : nozzle admittance

$\overline{(\quad)}$  : mean value

$(\quad)'$  : perturbed value

$\Phi$  : modified velocity potential parameter depending on  $\phi$

$\phi$  : nondimensional steady state velocity potential

$\gamma$  : ratio of specific heats

$\rho$  : density

$\omega$  : frequency, equal to  $2\pi f$

$(\quad)^*$  : nondimensional value

## 1. 서 론

로켓추진기관의 연소불안정성은 연소실 내부의 비정상적인 압력 섭동과 열 방출의 상호작용으로 발생하는 현상으로써, 연소실 내 압력 섭동이 감쇠되지 않은 상태로 유지되거나 증폭되는 현상이다[1]. 로켓의 연소불안정 현상은 연소실 내 통제되지 않는 압력 섭동으로 인해 연소실과 로켓 엔진 구성품이 파괴되거나, 비정상적인 추력으로 인한 로켓 설계 요구조건의 불만족, 더 나아가 연소불안정 해소 목적의 잦은 설계변경과 같은 경제적 손실을 초래할 수 있다.

로켓의 연소불안정 현상은 액체로켓의 경우, 로켓 엔진의 산화제와 추진제 시스템의 공진으로 야기되는 저주파 불안정과 연소실 내 공간에서 존재 가능한 음향 모드와 연소로 인한 열 방출의 상호작용으로 발생하는 고주파 연소불안정으로 구분된다. 고체로켓의 경우, 고체로켓 그레인 내부의 음향 모드와 고체 추진제 특유의 연소과정이 결합하여 넓은 주파수 대역에 걸친 연

소불안정 특성이 나타난다[1]. 이와 같이 연소불안정성은 연소실 내부의 연소불안정 유발 또는 억제 인자와 연소실 내 음향학적인 상호작용으로 발생하는 것으로 이해되고 있으며 연소불안정과 관련된 다양한 요인을 해석하기 위해 다양한 열-음향학적[2] 또는 공력음향학적[3] 접근 방법이 제시되고 있다.

노즐은 로켓을 구성하는 기본 요소 중 하나로서, 연소실 후류에 위치하여 연소된 가스가 가속되면서 빠져나가는 작용을 한다. 연소실 내부에서 발생한 압력 섭동 또한 노즐 내 유동을 따라 연소실을 빠져나오게 되며 대부분의 압력 섭동은 노즐 목을 통과하지만 일부는 반사되어 다시 노즐 목으로 돌아간다[1]. 이와 같이 노즐 내에서 발생하는 공력음향학적 상호작용으로 인해 노즐은 일반적으로 연소불안정을 억제하는 요소로 알려져 있다.

로켓 노즐의 연소불안정 감쇠 효과에 대한 연구는 1950년대 말 Tsien[4]이 축방향 압력 섭동에 대한 노즐의 응답을 해석한 것을 이래로 지속적으로 수행되었다. 1960년대 Crocco and Sirignano[5]는 축대칭 형상 또는 사각 덕트 형상 노즐의 응답을 정량적으로 평가하기 위한 노즐 어드미턴스(nozzle admittance) 개념을 최초로 도입하였으며, Buffum 등[6]에 의해 노즐 감쇠 효과에 대한 실험적인 검증을 위한 연구 또한 진행되었다. 1970년대 초-중반 Zinn의 연구팀[7-9]은 액체로켓 개발 연구의 일환으로 이론적으로만 예측되었던 노즐 어드미턴스를 실험적으로 측정하기 위해 변형된 임피던스 튜브 실험을 도입하였으며, 이론적인 해석을 위해 Crocco의 이론을 바탕으로 한 초기 형태의 1차원 선형 오일러 방정식(1D Linearized Euler Equation, 1D LEE)을 도입하였다. Zinn 연구 팀의 실험 결과로부터 1D LEE로 도출된 노즐 어드미턴스는 실험값과 유사하여 수치해석을 통한 예측이 가능함을 확인하였다. 1980년대 Sigman과 Zinn[10]은 1차원 형상에 대해 정립된 노즐 어드미턴스 해석 기법인 1D LEE를 2차원 축대칭 및 3차원 공간으로 확장한 음향 속도 포텐셜 방정식(Acoustic Velocity Potential Equation, AVPE)을

제안하였다. 2000년대 Sattelmayer의 연구팀 [11-14]은 변형된 임피던스 튜브와 유사한 모사 로켓을 통한 실험적인 측정과 기존 Crocco의 해법과 다른 접근방식의 3차원 LEE를 이용한 수치 해석을 통해 노즐 어드미턴스의 이론적인 예측 결과가 실험과 상당히 일치함을 재확인하였다.

본 연구에서는 로켓의 연소불안정을 억제하는 공력음향학적 현상 중 하나인 노즐 감쇠(nozzle damping)와 이를 정량적으로 평가하는 지표인 노즐 어드미턴스 이론에 대해 소개하고자 한다. 또한 노즐 어드미턴스를 예측하기 위한 방법 중 하나인 Crocco 이론에 기반한 1차원 선형 오일러 방정식(1D LEE)과 Sattelmayer의 연구진에 의해 제안된 3차원 LEE에 대해 함께 소개한다. 그리고 1D LEE를 통한 노즐 어드미턴스 해석의 예시로서, 노즐의 길이 및 입구 마하수와 같은 노즐 설계 변수에 따른 노즐 어드미턴스의 변화 추이에 대한 평가를 수행하였다.

## 2. 노즐 어드미턴스 이론

### 2.1 노즐 어드미턴스

로켓의 연소불안정성을 해석할 때, 노즐의 연소불안정에 대한 영향성은 노즐 어드미턴스로 정량화가 가능하다. Fig. 1은 노즐 내 유동과 음향의 상호 작용을 도식화 한 것으로써, 노즐의 입구 마하수  $M_e$ 의 유동이 압력과 함께 유입될 때, 노즐 목에서 파동의 일부가 빠져나가고 그 외 나머지가 반사된 것을 나타낸다. 이와 같이 노즐 내에서 발생하는 압력 섭동의 상호작용을 노즐 어드미턴스  $y$ 로 정의하며 연소실 후류측, 노즐 입구에서의 음향학적 경계 조건으로 작용한다. 노즐 어드미턴스  $y$ 는 주파수의 함수로써 Eq. 1과 같이 표현된다.

$$y = \frac{\bar{\rho} \bar{c}}{\rho c} \frac{u'}{p'} \quad (1)$$

위 식에서  $\bar{\rho}$ 는 평균 밀도,  $\bar{c}$ 는 평균 음속,  $u'$

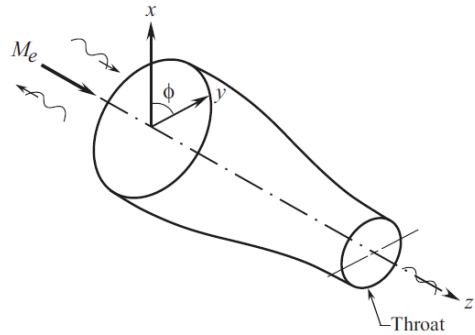


Fig. 1 Interaction between flow and acoustic perturbation inside the nozzle[1].

는 속도 섭동의 크기,  $p'$ 는 압력 섭동의 크기이며 각 값은 모두 노즐 입구에서 정의된 값이다. 노즐 어드미턴스는 실수부와 허수부로 구성되며 실수부는 압력 섭동의 증감에, 허수부는 압력 섭동의 상(phase)에 관여하는 것으로 알려져 있다. 노즐 어드미턴스는 연소불안정 감쇠 요소로 정의되므로 실수부가 양일 경우 연소불안정은 저감되며 음일 경우 불안정이 증폭된다[1,7].

### 2.2 1차원 선형 오일러 방정식

선형 오일러 방정식(LEE)은 유동이 존재하는 공간에서 밀도, 속도, 압력 섭동에 대한 공력음향학적 접근 방법 중 하나로서, Navier-Stokes 방정식 내 점성항을 무시한 상태에서 압력 섭동, 속도 섭동, 밀도 섭동과 같은 섭동항만을 평균 유동과 함께 표현한 것이다. 선형 오일러 방정식을 해석하기 위해서는 해석 공간에 대한 평균 유동 정보가 알려져 있어야 한다. Crocco[5]는 축대칭 및 사각덕트 형상 노즐의 감쇠 효과를 해석하기 위해 선형 오일러 방정식과 동일한 접근 방법을 적용하였다. 이때, Crocco는 해석의 단순화를 위해 노즐 내 유동은 1차원적 축방향 성분만 존재하며 압력 섭동은 축방향, 반경방향, 접선방향과 같이 3차원 섭동이 모두 존재하는 것으로 가정하였다. Bell[7]은 Crocco의 이론을 바탕으로 노즐을 지나는 1차원 유동과 3차원 압력 섭동에 대한 선형 오일러 방정식을 다음과 같이 표현하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho'}{\rho} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{u'}{u} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u'}{u} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u'}{u} \right) + \left( \frac{\rho'}{\rho} + 2 \frac{u'}{u} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{p'}{p} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{p}}{\rho u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p'}{p} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{p'}{p} - \gamma \frac{\rho'}{\rho} \right) = 0 \quad (4)$$

Eq. 2~4는 각각 섭동이 존재하는 유동의 공력유향학적 질량, 운동량, 에너지 보존 방정식이다. 각 항들은 밀도, 속도, 압력의 평균값으로 나눠져 있다. 이는 세 가지 미지 섭동항 대신 단일 섭동항을 통해 1D LEE를 간단하게 해석하기 위함이다. Eq. 2~4에서, 각 섭동항이 조화진동을 한다고 가정할 경우, 압력, 속도, 밀도 섭동은 각각 다음과 같이 주파수 영역에서의 단일 변수인 속도 포텐셜을 이용한 표현으로 치환 가능하다.

$$\frac{p'}{p} = f(\Phi, \bar{u}^{-2}) e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{d\Phi}{d\phi} e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = f(\Phi, c, \bar{u}^{-2}) e^{i\omega t} \quad (7)$$

위 식에서 축방향 좌표계  $x$ 는 속도 포텐셜  $\phi$ 로 치환되었으며,  $\Phi$ 는 좌표계  $\phi$ 에 대한 속도 섭동이다. 압력 섭동과 밀도 섭동은  $\Phi$ 에 의한 함수로 대체되었다[7]. Eq. 5~7을 Eq. 2~4에 대입하여 정리하면 다음과 같이 하나의 미분방정식으로 정리 가능하다.

$$\begin{aligned} & \bar{u}^{-2} (\bar{c}^2 - \bar{u}^2) \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} - \bar{u}^{-2} \left( \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{d\bar{u}^2}{d\phi} + 2i\omega \right) \frac{d\Phi}{d\phi} \\ & + \left[ \omega^2 - \frac{\gamma-1}{2} i\omega \frac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2} \frac{d\bar{u}^2}{d\phi} - \frac{S_{mn}^2 \bar{c}^2}{r_w^2} \right] \Phi = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Table 1. Transverse wave pattern regarding  $S_{mn}$ .

$m$	$n$	$S_{mn}$	Wave Pattern
0	0	0	Longitudinal
1	0	1.8413	First Tangential
2	0	3.0543	Second Tangential
0	1	3.8317	First Radial

Eq. 8에서  $S_{mn}$ 은  $m$ 종 베셀함수의 1차 미분에 대한  $n$ 번째 근으로써, 반경방향 및 접선방향 섭동에 대한 정보를 나타낸다.  $S_{mn}$ 에 따른 압력섭동 형태의 몇 가지 예시는 Table 1과 같다[7].

미분방정식 Eq. 8의 해인  $\Phi$ 와 노즐 어드미턴스  $y$ 는 Eq. 9와 같은 관계식을 갖는다. 이때, 각 변수들은 모두 노즐 입구에서의 값임에 유의해야 한다.

$$y = \frac{-\bar{c}u \frac{d\Phi}{d\phi}}{i\omega + \bar{u} \frac{d\Phi}{d\phi}} \quad (9)$$

### 2.3 3차원 선형 오일러 방정식

Sattelmayer의 연구진은 노즐을 포함한 연소실 내 압력 섭동과 유동의 상호작용을 해석하기 위해 3차원 선형 오일러 방정식을 적용하였다[12, 13]. 이 방식과 기존 Crocco 이론과의 가장 큰 차이점은 1차원 유동에 대해 제한적으로 적용되었던 선형 오일러 방정식을 3차원으로 확장하여 밀도, 속도, 압력 섭동에 대한 직접적인 해석을 수행했다는 점이다. Sattelmayer 연구진이 도입한 3차원 선형 오일러 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} + \bar{\rho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \rho' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

Eq. 10~11에서 압력 섭동항은 등엔트로피 가정( $p' = c^2 \rho'$ )에 의해 밀도 섭동항으로 치환되었

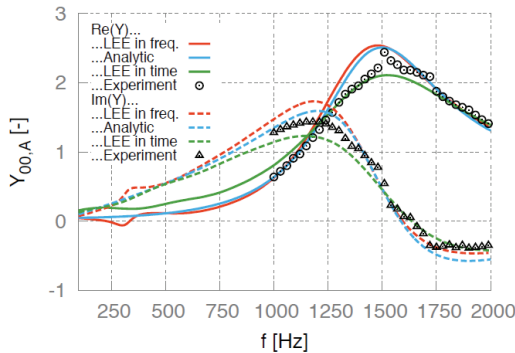


Fig. 2 Comparison with 3D LEE and 1D LEE [15] (LEE: 3D LEE, Analytic: 1D LEE from Bell).

으며, 해석의 단순화를 위해 연소실내 비정상 열 방출과 같은 에너지 방정식은 생략되었다. 위 두 식은 모두 시간 영역(time domain)에서 정의된 식이므로 1D LEE 방법과 마찬가지로 각 섭동항 (Eq. 5~7)이 조화 진동한다는 가정을 도입할 경우, 다음과 같은 주파수 영역(frequency domain)으로 정의가 가능하다.

$$i\omega\rho' + u_i' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \rho' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \rho' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

$$i\omega u_i' + u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u_i' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = 0 \quad (13)$$

노즐 어드미턴스를 구하기 위해서는 우선, Eq. 12와 Eq. 13을 이용하여 평균유동 정보가 알려진 가상의 연소실을 포함한 노즐에 대해 시간 영역(또는 주파수 영역) 해석을 우선 수행한다. 이후 노즐 입구에서, 압력 섭동항을 노즐로 빠져나가는 섭동과 노즐목을 통해 반사된 섭동으로 분리하는 모드 분할(mode decomposition)을 적용하여 노즐 어드미턴스를 도출한다[7,14]. Sattelmayer 연구진의 3차원 LEE와 1차원 LEE 해석 결과는 Fig. 2와 같다[15]. 3차원 해석 결과는 1차원 해석 및 시험 결과와 일치함을 알 수 있으며, 시간 영역 해석 및 주파수 영역 해석은 서로 유사한 결과를 도출함을 알 수 있다.

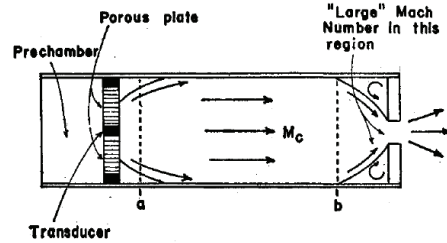


Fig. 3 Example of short nozzle[17].

### 2.4 짧은 노즐 이론

짧은 노즐 이론(short nozzle theory)은 Zinn[16]에 의해 제안된 이론으로서, Fig. 3[17]과 같이 길이-직경비가 큰 연소실 하류에 오직 노즐목만이 존재하는 이상적인 형상의 노즐에서의 노즐 어드미턴스를 예측하는 방법이다. 짧은 노즐에서 노즐 어드미턴스는 다음 식과 같이 주파수와 무관한 입구 마하수의 함수로 정의된다.

$$y = \frac{\gamma - 1}{2} M_e \quad (14)$$

노즐의 특성길이(수축부 길이)가 상대적으로 연소실의 특성길이(축방향 길이)보다 짧을 경우, 짧은 노즐로 정의가 가능하며 이때의 노즐 어드미턴스는 오직 실수부만 존재함을 알 수 있다.

### 3. 1차원 선형 오일러 방정식의 검증

본 연구에서는 Bell의 해석[7]에 사용된 노즐 형상을 이용하여 1차원 선형 오일러 방정식의 계산 결과를 검증하였다. 이때, Bell의 해석 노즐 형상은 Fig. 4과 같다.

Fig. 4에서  $r_c$ 는 노즐 입구의 반지름이며,  $r_{cc}$ 는 노즐 수축부의 곡률 반경 그리고  $\theta$ 는 노즐의 수축각이다.  $r_{th}$ 는 노즐 목의 반지름으로써, 노즐 입구 마하수에 따라 결정되는 값이다. 검증에 사용한 노즐 형상은  $r_{cc}/r_c = 0.44$ ,  $M_e = 0.08$  그리고  $\theta = 30^\circ$ 인 노즐이며, Bell의 해석 결과와 본 연구의 결과를 비교하기 위해 주파수는 다음과 같은 식을 통해 무차원화 하였다.

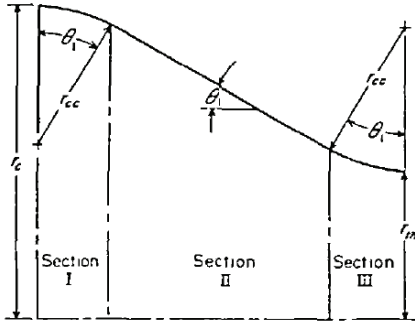


Fig. 4 Nozzle shape in Bell's analysis[7].

$$\omega^* = \frac{\omega \times r_c}{c} \quad (15)$$

Bell은 1차원 선형 오일러 방정식인 Eq. 8을 해석하기 위해 4차 Runge-Kutta 법을 적용하였으나 본 연구에서는 Sigman and Zinn[10]이 제안한 유한요소법을 적용하였다. 노즐 내 유동은 등엔트로피 과정을 따르는 것으로 가정하였다.

노즐을 지나는 압력 섭동의 상호작용은 노즐 입구에서부터 노즐 목까지의 영역으로 제한된다. 그러므로 미분방정식 Eq. 8을 풀기 위한 노즐 입구에서의 경계 조건은 연소실에서 발생한 압력 섭동을 모사하기 위해 0이 아닌 임의의 실수부와 허수부를 갖는  $\phi$ 를 부여하였으며[10], 노즐 목을 지난 압력 섭동은 다시 노즐 안으로 전파되지 않으므로 목에서의 경계조건으로  $\phi$ 를 0으로 정의하였다.

Fig. 5와 Fig. 6은 각각 축방향 섭동과 1차 접선방향 섭동에 대한 노즐 어드미턴스 계산 결과를 나타내며 실수부(실선)와 허수부(점선)의 무차원 주파수  $\omega^*$ 에 대한 변화를 보여준다. 본 연구에서 활용한 1차원 선형 오일러 방정식 해석 방법과 Bell의 해석 결과[7]는 거의 일치함을 확인할 수 있다. 특정 주파수대에서의 미세한 오차는 Bell의 계산 정확도 차이에 기인한 것으로 추정된다. 즉, 본 연구에서 유한요소법을 활용한 1차원 선형 오일러 방정식을 통해 특정 형상을 갖는 노즐의 어드미턴스를 성공적으로 도출할 수 있음을 알 수 있다.

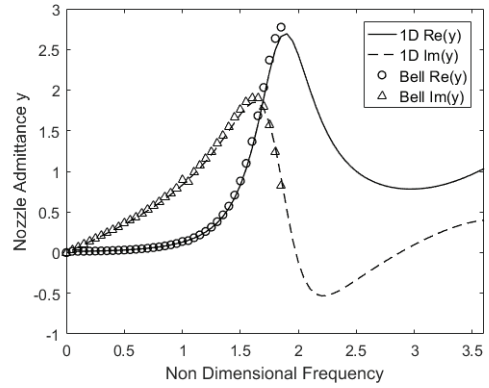


Fig. 5 Comparison with Bell's results (Longitudinal).

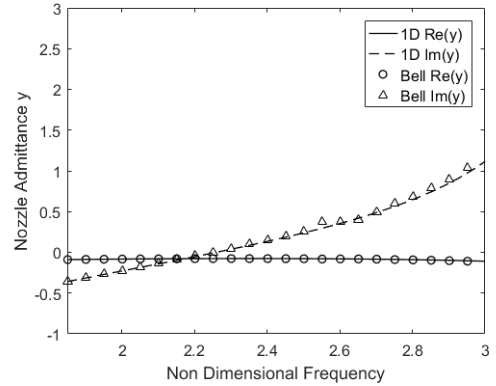


Fig. 6 Comparison with Bell's results (Tangential).

#### 4. 노즐 형상에 따른 노즐 어드미턴스의 변화

##### 4.1 해석 Case 정의

일반적인 초음속 노즐의 경우, 노즐의 설계 목적에 따라 다양한 수축부 형상이 존재하게 된다. 노즐 수축부의 주요 설계 변수 중 하나는 수축각이다. 입구 마하수가 동일하더라도, 노즐 수축각이 증가할수록 노즐 목의 면적이 동일해야 하므로 수축부의 길이가 감소하게 된다. 또 다른 노즐의 주 설계 변수는 노즐의 입구 마하수이다. 동일한 수축각을 갖는 노즐의 경우, 입구 마하수가 증가할수록 상대적으로 더 큰 목 면적을 갖게 되며 수축부 길이 또한 감소하게 된다[7]. 본 연구에서는 무수히 많은 노즐 형상에 대한 어드

Table 2. Shape parameter of Bell's nozzle.

	Case 1	Case 2
$r_{co}/r_c$	0.4396	0.4396
$\theta$	15° / 30° / 45°	30°
$M_e$	0.08	0.08/0.16/0.24
$S_{mn}$	0 / 1.8413	0 / 1.8413
Note	different $\theta$	different $M_e$

미턴스 분석을 수행하는 대신, Bell의 해석 노즐 형상에서 동일한  $r_c$ 와  $r_{co}$ 를 갖는 노즐에 대해, 수축각  $\theta$ 를 변화시키거나 입구 마하수  $M_e$ 를 변화시켜 노즐 형상에 대한 노즐 어드미턴스의 정성적인 경향을 분석하였다. 각 Case에 따른 설계 변수는 Table 2와 같다.

4.2 해석 Case 1 : 수축각 변화에 따른 효과

노즐 수축각이 증가할 때, 축방향 노즐 어드미턴스의 변화와 1차 접선방향 노즐 어드미턴스의 변화는 각각 Fig 7과 Fig. 8에 나타내었다. 축방향 노즐 어드미턴스의 실수부의 경우, 수축각이 증가할수록 첫 번째 극값의 크기는 동일하나 그 값이 나타나는 주파수가 고주파 영역으로 이동하며, 노즐 어드미턴스가 낮은 값을 갖는 주파수 영역이 증가함을 확인할 수 있다. 축방향 노즐 어드미턴스의 허수부 또한 실수부와 유사한 경향이 나타나는 것으로 확인된다. 이는 수축각 증가로 인해 노즐의 길이가 감소하게 되므로, 파장이 긴 저주파 축방향 섭동이 노즐 내에서 오래 체류하지 못하게 되어 상대적으로 감쇠되지 않은 상태에서 다시 연소실 방향으로 반사되기 때문인 것으로 사료된다.

축방향 섭동의 결과를 Zinn의 짧은 노즐 이론과 비교 시, 입구 마하수가 0.08일때 Eq. 14의 짧은 노즐의 어드미턴스는 0.016의 일정한 값을 가지며, 이는 본 해석 Case에서 주파수가 0일때의 값에 해당하는 것을 알 수 있다. 따라서 노즐 수축부 길이가 짧아질수록 짧은 노즐 이론과 같이 축방향 노즐 어드미턴스가 상대적으로 낮은

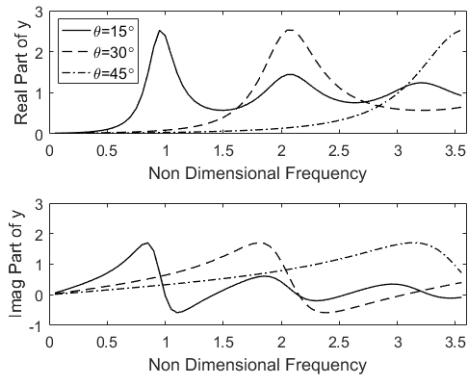


Fig. 7 Comparison of longitudinal mode nozzle admittance w.r.t. contraction angle (real part of y is 0.016 at zero frequency).

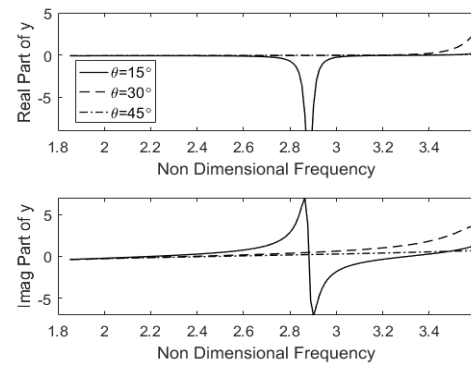


Fig. 8 Comparison of first tangential mode nozzle admittance w.r.t. contraction angle.

값을 나타내는 주파수 영역대가 크게 확장되어 노즐 어드미턴스에 대한 주파수 의존성을 줄인다는 기존 이론을 검증한다.

1차 접선방향 섭동에 대한 노즐 어드미턴스의 경우, 축방향 어드미턴스와 달리 실수부와 허수부 모두 복잡한 거동을 보이는 것을 확인할 수 있다. 실수부의 경우 특정 주파수 영역 ( $\omega^* = 2.80 \sim 2.97$ )을 제외한 넓은 영역에서 0에 근접한 음의 값을 나타내는 것을 보았을 때, 1차 접선방향 모드에 대해서는 노즐의 감쇠 효과를 기대할 수 없을 것으로 판단된다. 또한, 짧은 노즐 이론의 값을 접선방향 섭동에 대해 적용하는 것은 적합하지 않음을 확인할 수 있다.

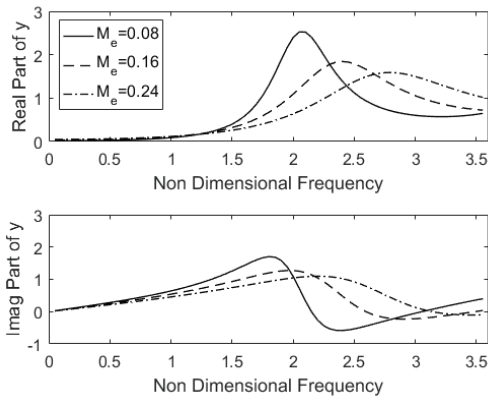


Fig. 9 Comparison of longitudinal mode nozzle admittance w.r.t. inlet Mach number for  $\theta = 30^\circ$ .

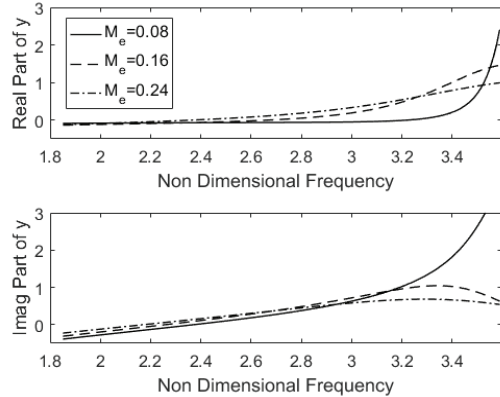


Fig. 10 Comparison of tangential mode nozzle admittance w.r.t. inlet Mach number for  $\theta = 30^\circ$ .

#### 4.3 해석 Case 2 : 입구 마하수 변화에 따른 효과

동일한 수축각( $\theta = 30^\circ$ )을 갖는 노즐의 입구 마하수를 증가시켰을 때, 축방향 및 1차 접선방향 노즐 어드미턴스를 각각 Fig. 9와 Fig. 10에 표기하였다. 축방향 노즐 어드미턴스의 실수부와 허수부 모두 입구 마하수가 증가할수록 첫 번째 극값의 크기가 점차 감소하는 특징이 발견되었다. 이 현상은 Eq. 9의 노즐 어드미턴스의 정의와 같이 동일한 속도(또는 압력) 섭동이 가해졌을 때, 속도 제곱 항의 영향에 따라 발생하는 현상으로 추측되나 정확한 물리적인 원인이 규명되지 않았으므로 추후 심도 깊은 연구가 필요하다. 축방향 노즐 어드미턴스에서 첫 번째 극값이 고주파 영역으로 이동하는 현상은 수축각 증가(Fig. 7) 시와 유사하게 노즐 입구 마하수가 증가할수록 노즐의 수축부 길이가 감소함으로 인해 발생하는 것으로 판단된다.

1차 접선방향 모드에 대한 노즐 어드미턴스의 실수부는 입구 마하수가 증가할수록 낮은 주파수에서의 음의 값에서 양의 값으로 전이되어 변화하는 것을 확인할 수 있었다. 이는 입구 마하수가 커질수록 1차 접선방향 압력섭동의 감쇠를 기대할 수 있는 주파수 영역이 넓어짐을 의미한다. 허수부의 경우, 마하수가 증가할수록 주파수에 따른 변화폭이 감소하는 경향을 보이지만 이와 같은 허수부의 변화가 실제 압력 섭동에 대

한 감쇠에 어떻게 작용하는지는 현재까지 명확하게 규명되지 않았다[1].

## 5. 결 론

본 연구에서는 노즐의 연소불안정 감쇠 효과를 예측하기 위한 주요 변수인 노즐 어드미턴스의 정의와 이를 해석하기 위한 방법에 대해 소개하였다. 또한 1차원 선형 오일러 방정식을 이용하여 가상의 노즐에 대한 노즐 어드미턴스 해석을 수행하였다. 노즐의 설계 변수인 수축각과 노즐 입구 마하수를 변화시켰을 때의 경향을 분석하였으며 이에 따라 확인된 노즐 어드미턴스의 특징은 다음과 같다.

- 1) 축방향 노즐 어드미턴스의 실수부는 항상 양의 값을 가지므로 해당 압력 섭동에 대한 감쇠 효과를 기대할 수 있다.
- 2) 1차 접선방향 노즐 어드미턴스의 경우, 음을 나타내는 주파수 영역이 존재하므로 해당 영역에서는 노즐을 통한 압력 섭동의 증폭이 발생될 것으로 판단된다.
- 3) 짧은 노즐 이론의 경우 오직 축방향 압력 섭동에만 유효하며, 이 경우, 어드미턴스 값은 주파수가 0일때의 값에 해당한다.



- 4) 일반 노즐에서 노즐 수축부의 길이가 짧아 질수록 축방향 섭동에 대한 감쇠 효과가 저감됨을 예측할 수 있었다. 그러나 1차 접선방향 섭동의 경우 그 거동이 복잡하여 노즐 수축부 변화에 따른 명확한 특징이 발견되지 않았다.

본 연구에서 활용한 1차원 선형 오일러 방정식은 노즐의 압력 섭동에 대한 응답을 간단하게 분석할 수 있다는 장점을 갖지만 오직 축대칭형상의 노즐에만 적용 가능하다는 것에 한계를 보인다. 이를 해결하기 위해 3차원 선형 오일러 방정식을 이용한 해석이 요구된다. 또한, 1차원 선형 오일러 방정식으로 얻어진 노즐 어드미턴스의 허수부가 연소불안정에 어떻게 영향을 미치는지 심도 깊은 분석이 필요하다. 더 나아가 접선방향 노즐 어드미턴스의 거동을 이해하기 위한 물리적인 근거가 미흡하므로 이에 대한 실험적/해석적인 연구가 지속되어야 할 것이다.

## 후 기

본 논문은 2018년도 한국항공대학교 교비지원 연구비에 의하여 지원된 연구의 결과와 서울대학교 차세대 우주추진 연구센터와 연계된 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행한 선도연구센터지원사업 (NRF-2013R1A5A1073861)의 연구결과이며 이에 감사드립니다.

## References

1. Culick, F.E.C. "Unsteady Motions in Combustion Chambers for Propulsion Systems," North Atlantic Treaty Organization, AG-AVT-039, 2006.
2. Campa, G. and Juniper, M.P., "Obtaining bifurcation diagrams with a thermoacoustic network model," In *ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, pp. 167-177, 2012.
3. Larmarque, N. and Poinso, T., "Boundary Conditions for Acoustic Eigenmode Computations in Gas Turbine Combustion Chambers," *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 9, pp. 2282-2292, 2008.
4. Tsien, H.S., "The Transfer Functions of Rocket Nozzles," *American Rocket Society Journal*, Vol. 22, pp. 139-162, 1959.
5. Crocco, L. and Sirignano, W.A., "Behaviour of Supercritical Nozzles under Three-Dimensional Oscillatory Conditions," North Atlantic Treaty Organization, AGARD-AG-117, 1967.
6. Buffum, F.G., Dehority, G.L., Slates, R.O., and Price, E.W., "Acoustic Attenuation Experiments on Subscale Cold-Flow Rocket Motors," *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 2, pp. 272-280, 1967.
7. Bell, W.A., "Experimental Determination of Three-Dimensional Liquid Rocket Nozzle Admittances," Ph.D. thesis, Georgia Inst. of Technology, 1972.
8. Bell, W.A., Daniel, B.R., and Zinn, B.T., "Experimental and Theoretical Determination of the Admittances of a Family of Nozzles Subjected to Axial Instabilities," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 30, No. 2, pp. 179-190, 1973.
9. Zinn, B.T., Bell, W.A., Daniel, B.R., and Smith Jr, A.J., "Experimental Determination of Three-Dimensional Liquid Rocket Nozzle Admittances," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 3, pp. 267-272, 1973.
10. Sigman R.K. and Zinn, B.T., "A Finite Element Approach for Predicting Nozzle Admittances," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 88, No. 1, pp. 117-131, 1983.
11. Pieringer, J.E., "Simulation selbsterregter Verbrennungsschwingungen in

- Raktenschubkammern im Zeitbereich," Ph.D thesis, Technische Universität München, 2008.
12. Pieringer, J. and Sattelmayer, T., "Simulation of Combustion Instabilities in Liquid Rocket Engines with Acoustic Perturbation Equations," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 25, No. 5, pp. 1020-1031, 2009.
  13. Morgenweck, D., Pieringer, J., and Sattelmayer, T., "Numerical Determination of Nozzle Admittances in Rocket Engines," *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VII, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Vol. 112, pp. 579-586, 2010.
  14. Kathan, R., Morgenweck, D., Kaess R., and Sattelmayer T., "Validation of The Computation of Rocket Nozzle Admittances with Linearized Euler Equations," *Progress in Propulsion Physics*, Vol. 4, pp. 135-148, 2013.
  15. Schulze, M., Gikadi, J., and Sattelmayer, T., "Acoustic Admittance Prediction of two Nozzle Designs of Different Length using Frequency Domain Simulations," "5th European Conference for Aeronautics and Space Sciences, 2013.
  16. Zinn, B.T., "Longitudinal Mode Acoustic Losses in Short Nozzles," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 22, No. 1, pp. 93-105, 1972.
  17. Culick, F.E.C. and Dehority, G.L., "Analysis of Axial Acoustic Waves in a Cold-Flow Rocket," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 6, No. 5, pp. 591-595, 1969.