

표적 정보량을 최대화하는 피동 호밍궤적에 관한 고찰

A Study on Passive Homing Trajectory for Maximizing Target Information

나 원 상* · 신 효 상* · 정 보 영* · 황 익 호**

(Won-Sang Ra · Hyo-Sang Shin · Bo-Young Jung · Ick-Ho Whang)

Abstract - This paper deals with the problem of generating the energy optimal trajectory which is intended to enhance the target tracking performance of a passive homing missile. Noticing that the essence of passive target tracking is the range estimation problem, the target information gathered by passive measurements can be readily analyzed by introducing the range estimator designed in line-of-sight(LOS) frame. Moreover, for the linear filter structure of the suggested range estimator, the cost function associated with the target information is clearly expressed as a function of the line-of-sight rate. Based on this idea, the optimal missile trajectory maximizing the target information is obtained by solving the saddle point problem for an indefinite quadratic cost which consists of the target information and the energy. It is shown that, different from the previous heuristic approaches, the guidance command producing the optimal passive homing trajectory is produced by the modified proportional navigation guidance law whose navigation constant is determined by the weighting coefficient for target information cost.

Key Words : Passive target tracking, Target information, Energy optimal guidance law, Saddle point problem

1. 서 론

일반적으로 유도오차를 최소화하기 위한 호밍 유도기법과 표적 추적필터 설계는 서로 독립적인 문제로 간주된다. 하지만, 실제 상황에서 유도명령을 산출하기 위해서는 표적 상태변수가 필요하므로 표적추적 정확도는 호밍유도 성능에 직접적인 영향을 끼치게 된다. 이러한 관점에서 볼 때, 유도기법과 추적필터 설계는 서로 불가분의 관계에 있다고 해도 과언이 아니다[1,2].

비례항법유도(PNG: proportional navigation guidance)는 많은 유도탄에서 채택되는 대표적인 호밍유도 기법 중 하나이다. 잘 알려진 바와 같이 PNG는 표적 요격을 위한 에너지를 최소화할 수 있지만, 표적 추적성능 향상을 고려하지 않는다[3]. 특히, 이러한 문제는 재밍 등으로 인해 유도탄에 탑재된 탐색기로부터 표적 시선각 혹은 시선변화율 측정치만을 획득할 수 있는 피동 호밍(passive homing) 상황에서 더욱 두드러진다[2]. 피동 호밍 시 표적 추적필터의 성능을 향상시키기 위해서는 표적 정보량을 충분히 확보해야 하며, 이는 추가적인 기동에 의한 에너지 손실

이 뒤따라야 함을 의미한다.

지금까지 표적 정보량 확보를 위해 DCG(dual control guidance), OPNG(oscillation PNG), BPNG(biased PNG), TMG (trajectory modulation guidance) 기법 등 다양한 호밍유도기법들이 제안된 바 있다[1,4-6]. 열거한 유도기법들은 시선변화율을 크게 할수록 표적 정보량이 증가한다는 선형적 사실에 착안하여 의도적으로 유도탄 궤적을 진동시키는 방식을 취하고 있다. 이 방법들은 피동 표적추적필터 성능 향상에 일정부분 효과가 있지만 표적 정보량 확보에 지나치게 많은 에너지를 소모하는 경향이 있어 제한된 기동능력을 갖는 대함 유도탄(ASM: anti-ship missile) 등에는 적용이 어렵다는 단점을 지니고 있다.

본 논문에서는 표적 정보량을 최대화하는 동시에 소모되는 에너지를 최소화하는 호밍궤적은 무엇인가? 라는 오랜 질문에 대한 명확한 답을 제시하기 위해, 최적화 관점에서 이 문제를 다룬다. 즉, 표적 정보량 최대화와 에너지 최소화라는 서로 상충되는 설계 목표에 대한 최적 절충안을 도출함으로써, 유도탄 궤적을 진동시키는 전통적인 방식이 표적 정보량을 최대화하는 최적 호밍유도 기법이 아닐 수 있음을 밝힌다. 문제 정의를 위해 먼저 피동 호밍 상황에서의 표적추적 필터 구조가 고려된다. 피동 호밍상황이라 할지라도 탐색기로부터 표적 시선각 측정치가 항상 획득되므로 표적추적 문제는 사실상 상대거리 추정 문제로 단순화된다 [7,8]. 이 경우, 표적정보량은 시선변화율의 제곱의 적분치로 정리되므로 이를 호밍유도에 사용되는 에너지와 결합하면 부정적차 목적함수(indefinite quadratic cost function)를 정의할 수 있다. 즉, 표적 정보량을 최대화하는 호밍 유도기법 설계문제는 일반적인 LQ 제

† Corresponding Author : School of Aerospace, Transport and Manufacturing, Cranfield University, United Kingdom.

E-mail: h.shin@cranfield.ac.uk

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9938-0370>

* School of Mechanical and Control Engineering, Handong Global University, Korea.

** Department of Precision Guidance Control Technology, Agency for Defense Development, Korea

Received : December 3, 2018; Accepted : December 22, 2018

여기법과 달리 부정이하 목적함수의 안장점(saddle point)을 결정하는 문제로 귀결된다. 산출된 유도명령의 형태로부터 표적 정보량을 최대화하는 최적 유도기법이 일반화된 PNG의 형태를 가짐을 증명한다. 이때, 산출된 비례항법계수는 표적 정보량에 대한 가중계수의 함수로 정의된다. 즉, 표적 정보량에 대한 가중치를 크게 할수록 선회반경이 큰 호밍궤적을 갖게 되며, 가중치를 작게 할수록 에너지 최적화 관점에서 설계된 PNG 궤적으로 수렴한다. 모의실험을 통해 제안된 기법이 표적정보량을 최대화함과 동시에 에너지를 최소화할 수 있는 최적 해임을 보인다.

2. 극좌표계 피동 상대거리 추정필터

2.1 시선변화율 측정치 활용의 유용성

대함 유도탄과 등속직선 운동하는 함 표적 간의 수평면 상대기하는 그림 1과 같다. 그림에서 λ 는 시선각, r 은 유도탄으로부터 표적까지의 상대거리를 나타내며, γ_m 와 γ_t 는 각각 유도탄과 표적의 비행경로각, V_m 와 V_t 는 유도탄과 표적의 속력을 의미한다. 이때, 대함 유도탄의 속력 V_m 은 함 표적의 속력 V_t 에 비해 월등히 큰 값을 갖고 있다고 가정한다. 그림 1의 수평면 상대기하로부터 시선방향 및 수직방향의 상대속도에 관한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_t \cos(\gamma_t - \lambda) - V_m \cos(\gamma_m - \lambda), \\ r\dot{\lambda} &= V_t \sin(\gamma_t - \lambda) - V_m \sin(\gamma_m - \lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

그림 1에서 시선각 λ 는 직교좌표계 표적 상대위치 (x, y) 의 비선형 함수로 기술된다.

$$\lambda = \tan^{-1}(y/x), \quad \dot{\lambda} = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

기존 비선형 피동 표적추적필터는 대부분 비선형 측정방정식 (2)를 이용하여 직교좌표계 표적 상대위치 (x, y) 와 상대속도 (\dot{x}, \dot{y}) 를 추정하는 BOM(bearing only measurement) 기법을 채택하고 있다 [9,10]. 이러한 이유로 BOM 표적추적 문제 해결을 위해 확장칼만필터, 무향칼만필터, 파티클필터 등 다양한 비선형 상태추정 이론이 적용되어 왔다. 기존 비선형 피동 표적추적필터

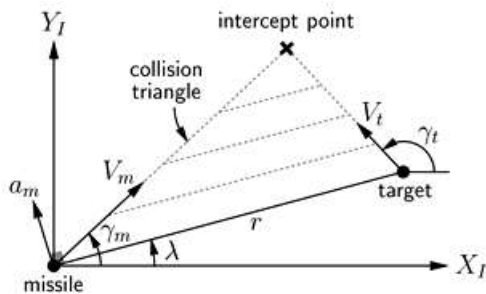


그림 1 호밍 유도기하
Fig. 1 Engagement geometry

표적 정보량을 최대화하는 피동 호밍궤적에 관한 고찰

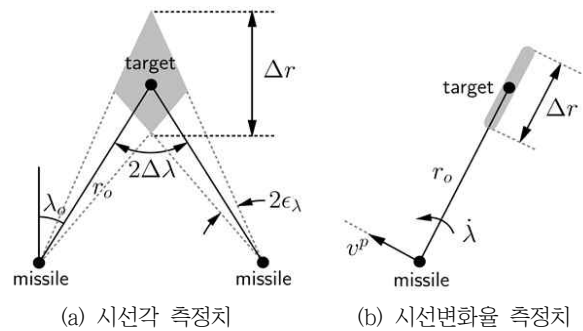


그림 2 측정치 종류에 따른 상대거리 정보량 확보문제
Fig. 2 Range accuracy according to measurements.

는 실제 상황에서 만족할 만한 피동 표적추적 성능을 제공하지 못하며, 이러한 성능저하 현상은 장거리 교전 상황에서 더욱 두드러진다. 지금까지의 연구결과들에 따르면 비선형 필터에 기반한 기존 BOM 표적추적 필터의 성능저하의 원인은 다음과 같다 [11].

- C1. 상대거리 추정을 위해 많은 상태변수를 이용하여 표적 상대운동을 모델링해야 함
- C2. 시선각 측정치와 상태변수 간의 관계를 비선형 측정방정식을 통해 즉각 결정할 수 없음
- C3. 시선각 측정치를 통해 상대거리에 대한 정보량을 확보하는 것이 물리적으로 용이하지 않음

위 원인들은 모두 피동 측정치로부터 상대거리 추정에 필요한 정보량을 확보하는 문제와 밀접한 연관관계를 갖는다. 이를 설명하기 위해, 시선각 측정치가 포함하고 있는 상대거리 정보량을 그림 2(a)와 같이 개략적으로 도시해보자. 그림에서 유도탄에 탑재된 피동 탐색기의 시선각 측정 오차는 ϵ_λ 이다. 유도탄이 횡방향 기동에 의해 서로 다른 두 지점에서 시선각이 획득되고 시선각 측정오차가 충분히 작다면 ($|\epsilon_\lambda| \ll 1$), 상대거리 결정 시 유발되는 불확실성 Δr 은 다음과 같이 근사된다.

$$\Delta r = 2r_o \frac{\sin \epsilon_\lambda}{\sin(\Delta\lambda + \epsilon_\lambda)} \approx 2r_o \frac{\epsilon_\lambda}{\Delta\lambda + \epsilon_\lambda} \quad (3)$$

여기서 r_o 는 유도탄과 표적 함정 간의 공칭 상대거리, $\Delta\lambda$ 는 시선각 측정 지점 간의 각도 차를 의미한다.

식 (3)으로부터 유도탄이 표적에 근접할수록(r_o 가 작아질수록) 혹은 시선각 측정지점 간 각도차 $\Delta\lambda$ 가 커질수록 Δr 이 줄어들어 더 정확한 상대거리 정보를 시선각 측정치로부터 획득할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 장거리 교전 상황에서 만족할 만한 피동 거리추정 성능을 얻기 위해서는 유도탄이 횡방향으로 많은 거리를 비행해야만 하며, 이는 상대거리 추정치의 수렴속도가 느려지는 주요인으로 작용한다.

유도탄 속력에 비해 함 표적의 속력이 무시할 만한 수준이라면 식 (1)의 두 번째 행으로부터 시선벡터에 수직인 유도탄 속도 벡터 $v^p \approx V_m \sin(\gamma_m - \lambda)$ 이 시선변화율과 상대거리 r 의 곱으로 표현됨을 알 수 있다.

$$-v^p = \dot{\lambda}r \quad (4)$$

유도탄에 탑재된 항법장치 출력을 이용해 v^p 성분을 산출할 수 있으므로, 선형관계식 (4)에 기반하여 상대거리를 상태변수로 하는 피동 거리추정 필터 설계를 생각해 볼 수 있다. 이 경우, 횡방향 속도 측정치로부터 상대거리에 관한 정보를 직접 수집할 수 있어 기존 비선형 피동 표적추적 필터가 지니고 있는 교전기하 및 초기치 선정의 정확도에 따른 성능저하, 장거리 교전 상황에서의 느린 수렴속도 문제를 효과적으로 해결할 수 있다.

선형 피동 거리추정필터 설계에 앞서, 수직방향 속도로부터 획득 가능한 상대거리 정보량을 분석해보자. 이를 위해, 표적 상대거리, 시선벡터에 수직한 속도성분, 시선변화율을 주어진 표적 조우기하 $(r_o, v_o^p, \dot{\lambda}_o)$ 와 미소섭동항 $(\Delta r, \epsilon_v, \epsilon_\lambda)$ 의 합으로 근사해보자.

$$r = r_o + \Delta r, \quad v^p = v_o^p + \epsilon_v, \quad \dot{\lambda} = \dot{\lambda}_o + \epsilon_\lambda \quad (5)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입한 후, 미소섭동항의 고차항을 무시하면 상대거리 결정 시 유발되는 불확실성 Δr 을 계산할 수 있다.

$$\Delta r = -\frac{1}{\dot{\lambda}_o}(\epsilon_v + r_o \epsilon_\lambda) \quad (6)$$

식 (6)으로부터 시선변화율을 크게 할수록 상대거리 추정 정확도가 높아질 것임을 유추할 수 있다. 이 경우 상대거리 추정 시 유발되는 불확실성 Δr 은 그림 2(b)와 같이 1차원적으로 도식화되어 Δr 이 2차원적으로 표현되는 시선각을 이용하는 경우와는 분명한 차이를 보인다. 불확실성 Δr 는 측정치로부터 획득되는 상대거리 정보량에 반비례하는 개념이므로, 시선변화율을 이용하여 상대거리를 추정하는 것이 시선각을 활용하는 경우에 비해 정보량 확보에 훨씬 유리하다는 결론을 얻을 수 있다.

2.2 극좌표계 피동 상대거리 추정필터

앞서 $V_t \ll V_m$ 이라 가정했으므로 시선벡터방향의 유도탄 속도 벡터를 $v^c \approx V_m \cos(\gamma_m - \lambda)$ 로 근사해도 무방하다. 따라서 식 (1)의 첫 번째 행으로부터 상대거리에 대한 동특성 방정식을 다음과 같이 모델링할 수 있다.

$$\dot{r} \approx -v^c \quad (7)$$

이를 샘플링 시간 T 에 대해 이산화하면 상대거리 추정을 위한 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$x_{k+1} = x_k + u_k + w_k \quad (8)$$

여기서 상태변수 $x_k = r_k$, 외부입력 $u_k = -Tv_k^c$ 로 정의된다. 상대거리 동특성 모델링 오차를 반영하기 위한 공정잡음 w_k 는 편의상 분산이 Q_k 인 영평균 백색잡음으로 가정한다.

식 (5)에서 $\chi_0 = \chi_k$, $\chi = \dot{\chi}_k$ 로 간주하고 이를 식 (4)에 대입하면 다음 측정 방정식을 얻는다.

$$y_k = [\tilde{H}_k - \Delta H_k]x_k + v_k \quad (9)$$

식 (9)에서 y_k 는 측정치, \tilde{H}_k 는 측정행렬의 관측치, ΔH_k 는 통계적 불확실성, v_k 는 측정잡음을 의미한다. 이들 변수의 정의는 다음과 같다.

$$y_k = -\tilde{v}_k^p = -(v_k^p + \epsilon_v), \quad \tilde{H}_k = \dot{\lambda}_k = \dot{\lambda}_k + \epsilon_\lambda, \quad \Delta H_k = \epsilon_\lambda, \quad v_k = -\epsilon_v$$

여기서 $\dot{\lambda}_k$ 와 \tilde{v}_k^p 는 각각 상대거리 추정을 위해 주어진 시선변화율 및 시선벡터에 수직한 상대속도에 대한 측정치이다. 측정잡음 v_k 를 분산이 R_k 인 영평균 백색잡음으로 가정하면, 식 (9)의 정의를 이용하여 ΔH_k 의 통계적 특성을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$W_k = E\{(\Delta H_k)^T R_k^{-1} \Delta H_k\}, \quad V_k = E\{(\Delta H_k)^T R_k^{-1} v_k\} = 0 \quad (10)$$

상대거리 추정을 위해 유도된 불확정 선형 시스템 식 (8), (9)는 가용하지 않은 측정행렬의 참값 H_k 대신 통계적 파라미터 불확실성 ΔH_k 와 측정행렬의 관측치 $\tilde{H}_k = H_k + \Delta H_k$ 로 기술된다. 기존 추정기법에 잡음이 포함된 측정행렬의 관측치 \tilde{H}_k 를 직접 사용하는 경우, 환산계수 오차(scale-factor error)와 편향오차(bias error)로 인해 추정성능의 저하가 유발되는 것으로 알려져 있다. 전술한 오차는 각각 측정행렬 관측치 \tilde{H}_k 와 통계적 파라미터 불확실성 ΔH_k 사이의 상관성, 측정잡음 v_k 와 ΔH_k 사이의 상관성에 의해 발생되는데, 이는 의사최적 강인 칼만 필터(NCRKF: non-conservative robust Kalman filter)를 이용하여 효과적으로 제거될 수 있다 [12].

NCRKF는 ΔH_k 의 통계적 특성 (10)을 이용하여 앞서 언급한 오차를 보상하는 것으로 알려져 있다. 사전 모델링을 통해 측정잡음의 분산을 알아낼 수 있으므로, ΔH_k 에 관한 통계적 특성 (10) 역시 계산 가능한 변수이다. 이제, 불확정 선형 상태공간 방정식 (8)과 (9)에 NCRKF 이론을 적용하면 선형 순환필터 형태의 의사최적 상대거리 추정기를 손쉽게 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= \hat{x}_{k-1|k-1} + u_k^c \\ \hat{x}_{k|k} &= (I + P_{k|k} W_k) \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k} \tilde{H}_k^T R_k^{-1} (y_k - \tilde{H}_k \hat{x}_{k|k-1}), \\ P_{k|k}^{-1} &= (P_{k-1|k-1} + Q_k)^{-1} + \tilde{H}_k^T R_k^{-1} \tilde{H}_k - W_k \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $P_{k|k} \equiv E\{(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T\}$ 으로 정의하였다.

3. 정보량 최대화 피동 호밍궤적

3.1 상대운동 방정식

유도탄의 횡방향 가속도 명령 a_m 이 시선벡터에 수직방향으로 인가된다면 다음 식이 만족된다.

$$V_m \dot{\gamma}_m = a_m \cos(\gamma_m - \lambda), \quad \dot{V}_m = a_m \sin(\gamma_m - \lambda) \quad (12)$$

식 (1)을 시간에 대해 미분한 후 식 (12)를 대입하여 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$\ddot{r} = r\dot{\lambda}^2, \quad \dot{r}\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} = -a_m - \dot{r}\dot{\lambda} \quad (13)$$

호밍 유도 시작시점 $t=t_0$ 에서 유도탄과 표적을 잇는 시선벡터를 관성좌표계의 X_f 축으로 정의하고 이에 수직인 방향을 Y_f 로 설정하면, 호밍유도 전 구간에서 시선각이 매우 작게 유지 ($|\lambda| \ll 1$)된다고 가정할 수 있다. 이 경우 접근속력 $V_c = -\dot{r}$ 은 상수 취급해도 무방하다. 더욱이 유도탄이 충돌 삼각형 근방에 위치한다면, 표적 조우시점 $t=t_f$ 까지의 잔여 비행시간을 $t_{go} = t_f - t$ 라 할 때, 상대거리에 대한 근사식 $r \approx V_c t_{go}$ 을 적용할 수 있다. 따라서 식 (13)으로부터 시선변화율에 대한 동특성을 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\dot{\lambda} = \frac{2}{t_{go}}x - \frac{1}{t_{go}}u \quad (14)$$

여기서 상태(state) 변수 $x = \lambda$, 제어명령 $u = a_m/V_c$ 으로 정의하였다. 상태변수의 초기값 $x(t_0) = \lambda_0$ 은 사전에 주어진다.

3.2 정보량 최대화 피동 호밍궤적 설계

본 절에서는 앞서 구한 상대 운동방정식 (14)에 대해 표적 정보량을 최대화하면서 표적 요격을 위해 요구되는 에너지 최소화를 동시에 만족하는 호밍궤적을 설계 한다. 전통적인 호밍유도 기법 설계의 주요 목표는 호밍유도에 소요되는 에너지를 최소화 하는데 있다. 그러나 재밍 등의 이유로 유도탄이 피동 호밍을 수행하는 상황에서 표적 요격 정확도를 향상시키기 위해서는 표적 추적필터로부터 획득되는 표적 정보량을 최대화해야 한다. 피동 호밍 상황에서의 표적 추적성능은 궁극적으로 상대거리 추정 정확도에 좌우되는 경향이 있다. 2절에 소개된 상대거리 추정필터의 형태로부터 표적 정보량 J_i 은 시선변화율의 제곱에 비례함을 알 수 있다.

$$J_i \propto \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^2 dt \quad (15)$$

식 (15)에서 확인할 수 있듯이 유도탄이 의도적인 횡방향 기동을 수행하면 표적 정보량 확보에 더욱 유리한 조건이 만들어지지만 이 경우 추가적인 에너지 소모가 불가피하다. 즉, 피동 표적 추적 필터의 성능개선 정도와 호밍유도 시 소요되는 에너지는 서로 상충되는 관계에 놓여있다. 서로 상반된 설계목적에 절충하는 최적 호밍궤적을 찾기 위해, 표적정보량 J_i 과 소모되는 에너지

$J_e = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$ 가 결합된 새로운 형태의 부정이차 목적함수 식 (16)을 고려한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [-\omega^2 x^2 + u^2] dt \quad (16)$$

여기서 ω^2 은 표적정보량에 대한 가중계수를 의미한다.

상대운동 방정식 (14)에 대해 부정이차 목적함수 (16)를 최소화하는 유도명령은 Pontryagin의 최소원리를 적용함으로써 산출 가능하다. 이를 위해 다음과 같은 Hamiltonian이 정의된다 [3].

$$H = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}u^2 + \eta \left(\frac{2}{t_{go}}x - \frac{1}{t_{go}}u \right) \quad (17)$$

여기서 η 는 부 상태변수(costate)를 의미하며, 종말시점에서 그 값은 $\eta(t_f) = 0$ 이다.

정점 조건(stationary condition)으로부터 다음 관계식이 얻어진다.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u = \frac{1}{t_{go}}\eta \quad (18)$$

편의상 $\tau = t_{go}$ 라 하면, 식 (17)과 식 (18)로부터 상태방정식(state equation)과 부 상태방정식(costate equation)은 다음과 같이 표현된다.

$$x'(\tau) = -\frac{2}{\tau}x(\tau) + \frac{1}{\tau^2}\eta(\tau), \quad \eta'(\tau) = -\omega^2 x(\tau) + \frac{2}{\tau}\eta(\tau) \quad (19)$$

위의 식에서 $\chi' = d\chi/d\tau$ 는 χ 의 τ 에 대한 미분을 의미한다.

시변 Hamiltonian 시스템의 해석 해를 산출하기 위해 식 (19)의 양변을 τ 에 대해 한 번 더 미분하면 상호결합되어 있는 두 개의 Euler-Cauchy 방정식을 얻는다.

$$\tau^2 x'' + 2\tau x' + (\omega^2 - 2)x = 0, \quad \tau^2 \eta'' + (\omega^2 - 2)\eta = 0 \quad (20)$$

잘 알려져 있듯이 Euler-Cauchy 방정식의 일반해는 상수 p 와 미정계수 k 에 대해 $k \cdot \tau^p$ 꼴을 갖는다. 이 경우, 상태변수에 대한 식 (20)의 특성방정식은 다음과 같다.

$$p^2 + p + (\omega^2 - 2) = 0 \quad (21)$$

표 1에 정리한 바와 같이 $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{9-4\omega^2}$ 로 정의하면 미분방정식 (20)의 해 $x(\tau)$ 는 기저함수 $\phi_1(\tau)$ 및 $\phi_2(\tau)$ 의 선형조합으로 표현된다.

$$x = c_1 \phi_1(\tau) + c_2 \phi_2(\tau) \quad (22)$$

위 식에서 c_1, c_2 는 경계조건으로 결정되는 미정계수이다. 참고

표 1 시변 Hamiltonian 시스템의 해석 해
Table 1 Analytic solution of Hamiltonian system

경우	ω^2	p_1	p_2	$\phi_1(\tau)$	$\phi_2(\tau)$
1	$\omega^2 < \frac{9}{4}$	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$	$\tau^{\alpha + \beta}$	$\tau^{\alpha - \beta}$
2	$\omega^2 = \frac{9}{4}$	α	α	$\tau^{\alpha} \ln(\tau)$	τ^{α}
3	$\omega^2 > \frac{9}{4}$	$\alpha + j \beta $	$\alpha - j \beta $	τ^{α}	τ^{α}

로 유의미한 해가 도출되려면 c_1 과 c_2 가 동시에 0이 되는 경우는 배제시켜야 한다.

유사한 방법을 적용하면 부 상태변수 $\eta(\tau)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta = d_1\tau \phi_1(\tau) + d_2\tau \phi_2(\tau) \tag{23}$$

식 (22)와 식 (23)을 식 (19)에 대입하면 계수 $c_k, d_k(k=1,2)$ 의 상관관계가 유도된다.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

위 식에서 사용된 계수 $A_{i,j}$, ($i,j=1,2$)의 값은 표 2와 같다.

표 2 계수 c_k, d_k 간의 관계

Table 2 Relationship between the coefficients c_k and d_k

ω^2	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}
$\omega^2 \neq \frac{9}{4}$	$\frac{1-p_1}{\omega^2}$	0	0	$\frac{1-p_2}{\omega^2}$
$\omega^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{1-p_1}{\omega^2}$	0	-1	$\frac{1-p_2}{\omega^2}$

표적 정보량을 최대화하는 에너지 최적 호밍계획의 닫힌 해를 산출하기에 앞서 물리적으로 유의미한 해가 갖는 특성을 살펴보자. 잘 알려져 있듯이 유도탄이 표적을 요격하기 위해서는 조우 시점($t=t_f$ 혹은 $\tau=0$) 부근에서 충돌삼각형(collision triangle) 위에 위치해야 한다. 즉, $\dot{\lambda}(t=t_f) = x(\tau=0) = 0$ 이 만족되어야 한다. 이 조건을 식 (22)에 적용하여 가중계수 ω^2 의 범위를 결정해보자.

이를 위해 우선 $\alpha < 0$ 이고, β 는 ω^2 에 따라 그 값이 달라진다는 점에 주목하자. 표 1을 참고하면 식 (22)의 상태변수를 $x(\tau) = r^\alpha f(\tau)$ 의 형태로 표현할 수 있으며, ω^2 의 범위에 따른 $f(\tau)$ 는 표 3에 정리하였다. 이때 $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} r^\alpha = \infty$ 이므로 표적요격 조건 $x(\tau=0) = 0$ 이 성립하려면 다음 조건이 만족되어야 한다.

표 3 표적 요격조건 충족을 위한 고려사항

Table 3 Consideration for meeting the intercept condition

경우	ω^2	$f(\tau)$	$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(\tau) = 0$ 만족 조건
1	$\omega^2 < \frac{9}{4}$	$c_1\tau^\beta + c_2\tau^{-\beta}$	$c_2 = 0$
2	$\omega^2 = \frac{9}{4}$	$c_1 \ln(\tau) + c_2$	$c_{1,2} = 0$ (trivial)
3	$\omega^2 > \frac{9}{4}$	$c_1\tau^{j \beta } + c_2\tau^{-j \beta }$	$c_{1,2} = 0$ (trivial)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(\tau) = 0 \tag{25}$$

경우 1. ($\omega^2 < 9/4$)

$\omega^2 < 9/4$ 일 때 항상 $\beta > 0$ 이 되어 $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^{-\beta} = \infty$ 이므로, $c_2 = 0$ 이어야 조건 (25)를 만족한다. 즉, 상태변수는 $x(\tau) = c_1\tau^{\alpha+\beta}$ 이다. 0이 아닌 상수 c_1 에 대해 $x(\tau=0) = 0$ 이 성립하기 위해서는 $\alpha + \beta > 0$ ($\beta > 1/2$)이 충족되어야 한다. 따라서 가중계수의 범위는 $\omega^2 < 2$ 로 제한되어야 한다.

경우 2. ($\omega^2 = 9/4$)

$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \ln(\tau) = -\infty$ 이므로 조건 (25)를 만족하려면 $c_1 = c_2 = 0$ 일 수 밖에 없다. 따라서 $\omega^2 = 9/4$ 인 경우에는 표적 요격조건이 충족되지 않는다.

경우 3. ($\omega^2 > 9/4$)

만일 식 (25)가 만족된다면 계수 c_k 에 대해 다음 관계식이 만족되어야 한다.

$$\frac{c_1}{c_2} = \tau^{2j|\beta|} \tag{26}$$

위 식의 우변은 시변인 반면 좌변은 시불변이므로 식 (26)은 모순이다. 따라서, $\omega^2 > 9/4$ 일 때도 표적 요격조건 (25)가 충족되지 않는다.

이상의 결과를 종합하면, 유도탄이 표적을 요격하기 위해서는 표적 정보량에 대한 가중계수를 $\omega^2 < 2$ 로 설정해야 한다는 결론을 얻을 수 있다.

이제 식 (14) 및 식 (17)에서 고려된 경계조건을 이용하여 미지계수 $d_{1,2}$ 를 결정해보자. $\tau_0 = 0, \tau_f = t_f$ 라면 미지계수 결정을 위한 구속조건은 다음과 같이 재정리된다.

$$\eta(\tau_0) = 0, \quad x(\tau_f) = \dot{\lambda}_0 \tag{27}$$

계수 c_k 와 d_k 간의 상관관계 (24)를 식 (22)에 대입하면 상태변수 $x(\tau)$ 를 다시 쓸 수 있다.

$$x(\tau) = (A_{11}\phi_1(\tau) + A_{21}\phi_2(\tau))d_1 + (A_{12}\phi_1(\tau) + A_{22}\phi_2(\tau))d_2 \tag{28}$$

경계조건 (27)을 각각 식 (23)과 (28)에 대입하면 식 (29)를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\phi_1(\tau_f) + A_{21}\phi_2(\tau_f) & A_{12}\phi_1(\tau_f) + A_{22}\phi_2(\tau_f) \\ \tau_0\phi_1(\tau_0) & \tau_0\phi_2(\tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

위의 결과와 표 2의 정의로부터, $\omega^2 < 2$ 일 때 계수 d_k 의 값을 결정할 수 있다

$$d_1 = \dot{\lambda}_0/\Delta_1, \quad d_2 = -\dot{\lambda}_0/\Delta_2 \tag{30}$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_{11}\phi_1(\tau_f) - A_{22}\left(\frac{\phi_1(\tau_0)}{\phi_2(\tau_0)}\right)\phi_2(\tau_f), \\ \Delta_2 &= A_{11}\left(\frac{\phi_2(\tau_0)}{\phi_1(\tau_0)}\right)\phi_1(\tau_f) - A_{22}\phi_2(\tau_f) \end{aligned}$$

한편, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \left| \frac{\phi_1(\tau)}{\phi_2(\tau)} \right| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{\sqrt{9-4\omega^2}} = 0$ 임을 이용하여 식 (30)을 정리하면 다음과 같다.

$$d_1 = \frac{\lambda_0}{A_{11}\phi_1(\tau_f)}, \quad d_2 = 0 \quad (31)$$

식 (31)을 식 (23) 및 식 (28)에 대입하면 상태변수 및 부 상태변수의 닫힌 해를 산출할 수 있다.

$$x = \lambda_0 \left(\frac{\tau}{\tau_f} \right)^{\frac{-1+\sqrt{9-4\omega^2}}{2}}, \quad \eta = \frac{2\omega^2\lambda_0\tau}{3-\sqrt{9-4\omega^2}} \left(\frac{\tau}{\tau_f} \right)^{\frac{-1+\sqrt{9-4\omega^2}}{2}} \quad (32)$$

매 시점에 대해 부 상태변수 η 를 갱신한다면 식 (32)에서 $\tau_f \mapsto \tau = t_{go}$, $\lambda_0 \mapsto \dot{\lambda}(t)$ 로 치환되어 다음과 같이 기술된다.

$$\eta(t) = t_{go} N \dot{\lambda}(t), \quad N = (3 + \sqrt{9-4\omega^2})/2 \quad (33)$$

앞서 $u \equiv a_m/V_c$ 라 정의했으므로 위의 결과를 식 (18)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 유도명령을 얻게 된다.

$$a_m = NV_c \dot{\lambda}(t) \quad (34)$$

식 (34)의 비례항상수 N 은 표적 정보량에 대한 가중계수 ω^2 로 결정되며, 표적 정보량을 고려하지 않는 경우($\omega \rightarrow 0$) $N=3$ 즉, 에너지 최적 호밍유도기법인 PNG 기법의 비례항상수로 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

유도오차 y 에 대해 $y \approx r\lambda$, $\dot{y} \approx \dot{r}\lambda + r\dot{\lambda}$ 으로 근사 가능하므로, 유도명령 (34)로부터 손쉽게 호밍궤적을 산출할 수 있다.

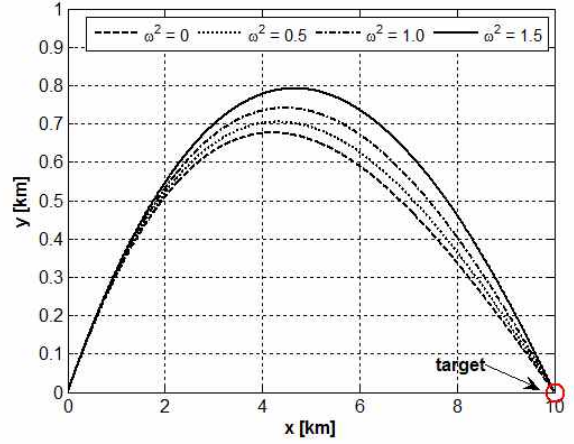
$$y(t) = \frac{1}{N-1} \left[\left(\dot{y}_0 + \frac{N}{T_f} y_0 \right) t_{go} - \left(T_f \dot{y}_0 + y_0 \right) \left(\frac{t_{go}}{T_f} \right)^N \right] \quad (35)$$

여기서 $T_f \equiv \tau_f - t_0$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ 이다.

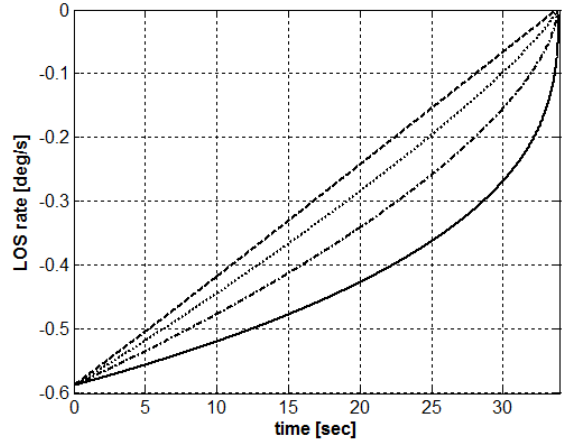
표 4 모의실험 조건

Table 4 Simulation conditions

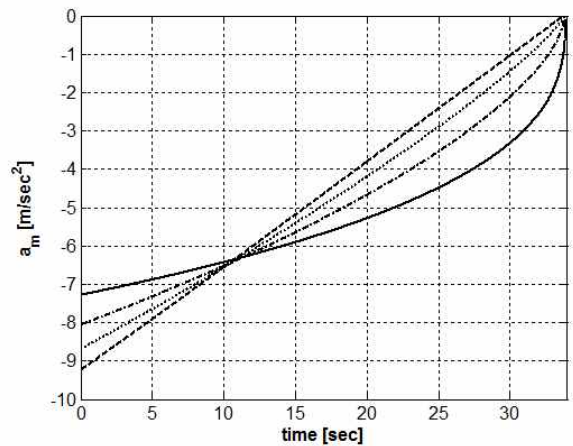
유도탄	초기위치/비행경로각 $\vec{r}_m = [0, 0][km]$, $\gamma_m = 20^\circ$ 속력 $V_m = 300[m/s]$,
표적	초기위치 및 속력 $\vec{r}_t = [10, 0][km]$, $V_t = 0[m/s]$
상대거리	$\hat{x}_{0 -1} = 50[km]$, $P_{0 -1} = (2 \cdot 10^4)^2$, $T = 0.01[sec]$
추정 필터	$Q_k = 0.01^2$, $R_k = 1.1$, $W_k = (0.2^\circ)^2/R_k$



(a) 수평면 궤적



(b) 시선변화율



(c) 유도명령

그림 3 가중계수 ω^2 에 따른 호밍 유도궤적

Fig. 3 Trajectory according to weighting factor ω^2

식 (35)에서 확인할 수 있듯이 호밍궤적은 t_{go} 와 t_{go}^N 에 비례하는 항의 조합으로 구성되어 있다. 기존의 호밍유도 기법은 표적 정보량 확보를 위해 의도적으로 유도탄 궤적을 진동시키는 방식을 채택했으나, 이는 수학적으로 볼 때 정보량을 최대화하는 최적 호밍유도 기법이 아닐 수 있다.

4. 모의실험

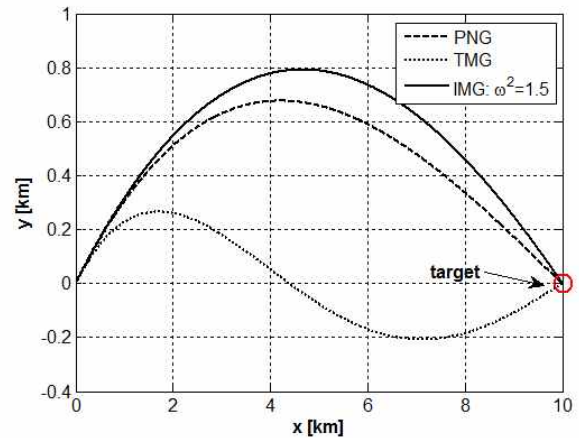
제안된 정보량 최대화 호밍궤적의 유용성 검증에 위해 정지 표적에 대한 대함유도탄의 피동호밍 상황에 대한 시뮬레이션을 수행하였다. 모의실험 조건은 표 4에 정리되었다.

그림 3은 표적 정보량에 대한 가중계수 ω^2 의 값에 따른 수평면 호밍 궤적, 시선변화율, 그리고 산출된 유도명령의 추이를 나타낸다. 식 (33)~(35)에 따르면, 표적 정보량을 고려하지 않은 경우 ($\omega=0$)는 호밍궤적이 기존 PNG 궤적과 동일해 질 것임을 예상해 볼 수 있다. 실제로 시뮬레이션 결과 그림 3(a)의 수평면 호밍 궤적에서 표적 정보량에 대한 가중치 ω^2 값을 작게 할수록 에너지 최적화 관점에서 설계된 PNG 궤적으로 수렴하며, 반대로 가중치를 크게 할수록 선회반경이 큰 호밍궤적을 갖게 되는 것을 확인할 수 있다. 이는 그림 3(c)에서 ω^2 이 클수록 초기 가속도명령의 변화 폭이 작기 때문이다. 그림 3(b)를 참고하면, 모의실험 결과 표적정보량에 대한 가중치 ω^2 이 클수록 호밍유도 전 구간에서 시선 변화율의 크기가 더 큰 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 표적 정보량에 대한 가중계수 ω^2 을 크게 설정하면 시선변화율이 커져 상대거리 추정 정확도가 높아질 것임을 유추할 수 있다.

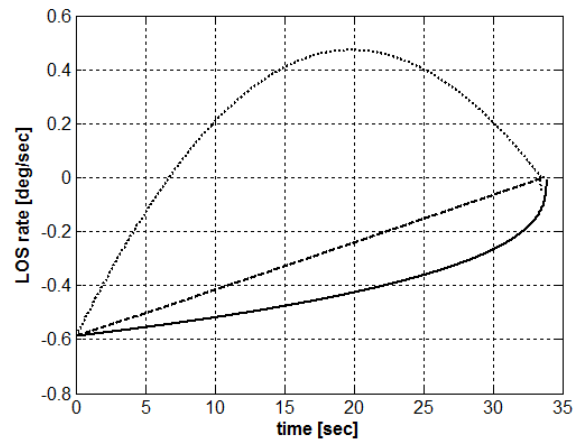
논문에서 제시된 해석결과의 타당성을 확인하기 위해 표적 정보량이 고려되지 않은 PNG와 유도탄 궤적에 의도적인 진동을 유발해 표적 정보량을 증가시키도록 고안된 TMG를 적용한 후 2장의 상대거리 추정 필터 성능을 분석하였다. 참고로 TMG 명령은 다음과 같이 기술된다 [6].

$$a_m^{TMG} = \frac{40}{t_{go}^3} \int y dt + \frac{28}{t_{go}^2} y + \frac{8}{t_{go}} \dot{y} \quad (36)$$

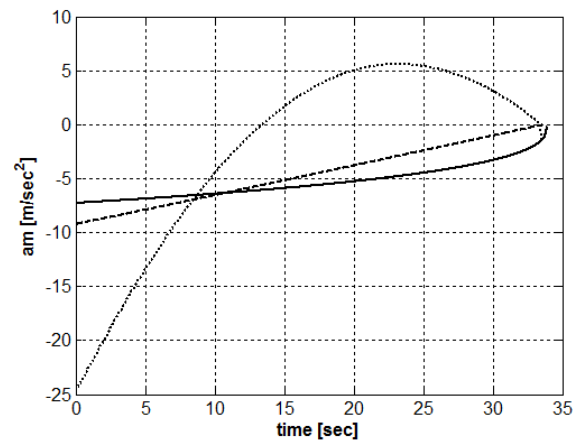
유도기법에 따른 유도탄 궤적은 그림 4에 도시한 바와 같다. 제안하는 정보량 최대화 호밍궤적을 편의상 IMG(information maximizing guidance)로 명명한다. IMG의 표적 정보량에 대한 가중치는 종말 시점에서의 시선변화율이 0이 되는 조건($\omega^2 < 2$) 하에서 $\omega^2 = 1.5$ 로 설정하였다. 그림으로부터 TMG는 PNG나 IMG와 달리 진동하는 궤적을 가져 유도탄의 기동 가속도가 상대적으로 더 큰 것을 확인할 수 있다. 하지만 기대와 달리 호밍유도 초기에는 다른 유도기법에 비해 시선변화율의 크기가 작은 값을 갖는다. 즉, 호밍유도 시 사용되는 에너지 소모량은 큰 반면 초기 획득되는 정보량은 적어 상대거리 추정치의 수렴 속도가 느릴 것임을 짐작할 수 있다. 반면, IMG는 다른 두 유도기법보다 호밍유도 전 구간에 대한 평균 시선변화율의 크기가 크고, 에너지 최적 관점에서 설계된 PNG와 유도명령의 크기도 큰 차이가 없으므로 다른 기법을 채택하는 경우보다 피동 거리추정 필터의



(a) 수평면 궤적



(b) 시선변화율



(c) 유도명령

그림 4 유도기법에 따른 호밍 유도궤적
Fig. 4 Trajectory according to guidance laws

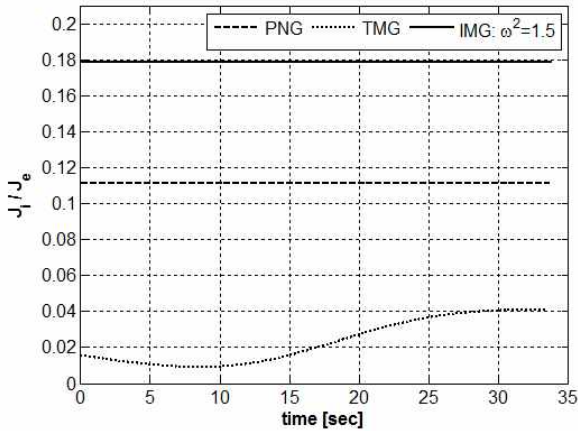
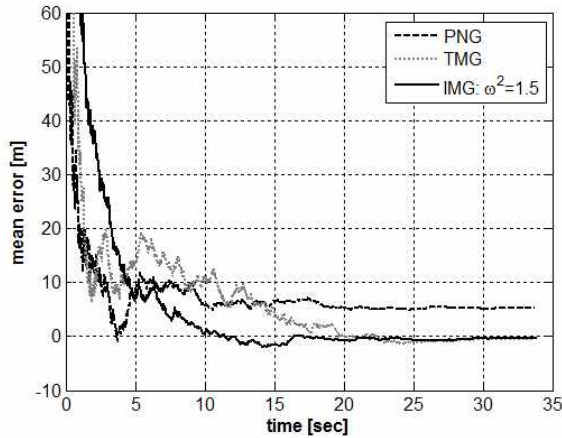
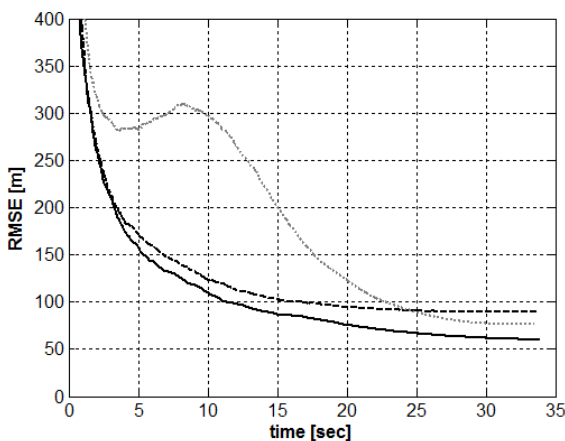


그림 5 정보량 획득 효율성
Fig. 5 Efficiency of information acquisition



(a) 상대거리 추정오차의 평균



(b) 상대거리 추정치에 대한 RMSE

그림 6 상대거리 추정성능
Fig. 6 Range estimation performance.

성능이 향상될 것이라 예상할 수 있다.

정보량 획득의 효율성을 비교하기 위해, 산출된 호밍궤적에 대해 요구되는 에너지 대비 확보된 표적 정보량 (J_i/J_e)을 그림 5에 도시하였다. PNG의 경우 호밍유도 시 소모되는 에너지는 가장 적지만, 시선변화율이 지속적(monotonically)으로 0으로 감소하여 전체 호밍구간에서 확보되는 표적 정보량은 다소 제한적이다. 이와 달리, TMG와 IMG는 비록 더 많은 에너지를 소모하지만 표적 조우 부근에서도 시선변화율이 비교적 큰 값을 가져 표적정보량 확보가 가능하다는 장점이 있다. 더욱이 동일한 에너지를 소모하는 상황에서 IMG에 의해 획득되는 정보량이 TMG에 비해 약 4배 이상이 되어 정보량 최대화와 에너지 최소화 측면에서 가장 효율적인 피동 호밍궤적을 알 수 있다.

다음으로 호밍궤적이 피동 거리추정 성능에 미치는 영향을 확인해보자. 잘 알려져 있듯이 대함유도탄이 피동 호밍하는 상황에서는 표적까지의 상대거리에 대한 어떠한 정보도 주어지지 않으므로, 필터의 초기치 선정이 매우 어렵다. 이 때문에 통상 탐색기의 표적 최대 탐지거리로 초기치를 선정하는 것이 일반적이다. 200회 몬테칼로 시뮬레이션을 통해 획득된 상대거리 추정치의 오차평균과 RMSE는 그림 6과 같다. 그림에서 확인할 수 있듯이 IMG 기법을 적용했을 때, 상대거리 추정필터의 수렴속도가 가장 빠를 뿐만 아니라 정상상태 RMSE 역시 작은 값을 유지함을 알 수 있다. 시선벡터를 중심으로 횡방향 기동하는 TMG의 경우, 기대와 달리 실제로는 과도구간에서 상대거리 추정성능 향상이 이루어지지 않는데 이는 그림 4(b)에서와 같이 0~5초 구간에서 순시(instantaneous) 표적 정보량을 좌우하는 시선변화율의 제곱이 PNG 및 IMG에 비해 작은 값을 갖기 때문이다. TMG의 경우에서 상대거리 추정필터는 시선변화율의 제곱이 커지는 10초 이후에서 추정오차가 다시 줄어드는 특성을 보인다. 이러한 결과는 단순히 시선벡터를 중심으로 횡방향 기동하는 궤적이 많은 에너지를 쓰는데 반해, 정보량을 최대화하는 관점에서는 최적 해가 아닐 수도 있다는 주장을 뒷받침하는 것이다.

그림 7은 유도탄의 초기 헤딩오차를 -30° 부터 $+30^\circ$ 까지 변화시키며 각각의 유도기법에 대해 200회 몬테칼로 시뮬레이션

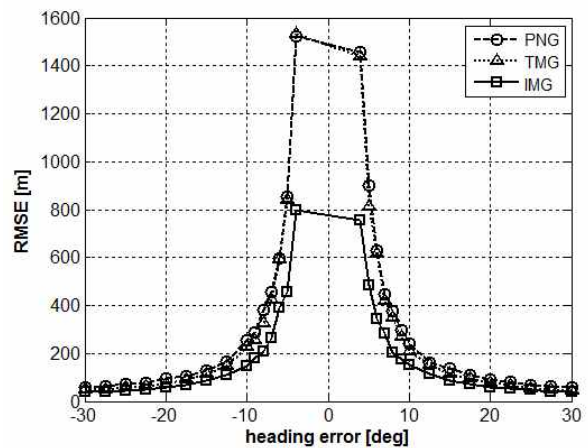


그림 7 초기 헤딩오차에 대한 RMSE
Fig. 7 RMSE for heading error.

을 수행하였을 때 발생한 상대거리 추정치의 정상상태에서의 RMSE를 나타낸다. 그림을 살펴보면, 헤딩오차에 상관없이 제안된 IMG 기법이 다른 두 유도기법보다 더 작은 RMSE를 보여 가장 우수한 상대거리 추정능력이 획득된다.

4. 결 론

본 논문에서는 표적 정보량을 최대화하면서 호밍 유도에 소요되는 에너지를 최소화하는 호밍궤적 설계문제를 최적화 관점에서 살펴보았다. 시선변화율의 제공이 적분치가 클수록 시선좌표계 상에서 설계되는 표적추적필터의 정보량을 최대화할 수 있다는 사실에 착안하여, 유도기법 설계 문제가 부정적 목적함수에 대한 최적 제어문제에 귀결됨을 보였다. 제안한 방법은 유도탄 궤적을 진동시키는 기존 유도 기법과는 달리 일반화된 PNG의 형태를 가진다. 이때, 산출된 비례항법계수는 표적 정보량에 대한 가중계수의 함수로 정의되어, 표적 정보량에 대한 가중치를 크게 할수록 호밍궤적이 반원궤적에 가까워지며, 가중치를 작게 할수록 에너지 최적화 관점에서 설계된 PNG 궤적으로 수렴함을 확인하였다. 산출된 유도명령의 형태로부터 궤적을 진동시키는 기존 호밍유도 기법은 표적 정보량을 최대화하는 최적 해가 아닐 수 있음을 확인했다. 모의실험을 통해 제안된 유도기법이 기존 방법들에 비해 동일한 에너지를 소모하는 상황에서 표적 정보량을 최대화 함으로써 표적추적 성능을 효과적으로 향상시킬 수 있는 최적 해임을 확인하였다. 제안한 방법은 엔지니어의 경험 혹은 직관에 의존하여 설계된 기존 유도기법들과 달리 표적 정보량을 정확히 반영하여 수학적 방법론에 의해 체계적으로 설계가능하다는 특징이 있다. 제안된 유도기법을 적용함으로써, 피동 호밍 유도탄의 효율적 운용이 가능할 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2019년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2016R1D1A3B03935616).

References

[1] Hull, D. G. Speyer, J. L., and Burris, D. B., "Linear-quadratic guidance law for dual control of homing missiles", *J. Guidance*, 1990, pp. 137-144.
 [2] Hepener, S. A. R., and Geering, H. P., "Observability analysis for target maneuver estimation via bearing- only and bearing-rate-only measurements", *J. Guidance*, 1990, pp. 977-983.
 [3] Kirk, D. E., *Optimal control theory, an introduction*, Prentice Hall, 1970.
 [4] Song, T.L. and Um, T.Y., "Practical guidance for homing

missiles with bearings-only measurements", *IEEE Trans. Aero. Electr. Sys.* 1996, pp. 434-443.

[5] Lee, C. H., Kim, T. H., and Tahk, M. J., "Biased PNG for target observability enhancement against non-maneuvering targets", *IEEE Trans. Aero. Electr. Sys.*, 2015, pp. 2-17.
 [6] Shin, H. S., Lee, J. I., Cho, H. J. and Tsourdos, A., "Trajectory modulation guidance law for anti-ship missiles", *AIAA Guidance, Navigation and Control Conf.*, 2011.
 [7] Whang, I. H., Ra, W.S. and Ahn, J. Y., "A modified weighted least squares range estimator for ASM (anti-ship missile) application", *Int. J. Control, Automation, Sys.*, 2005, pp. 486-492.
 [8] Ra, W.S., Whang, I.H., and J.Y. Ahn, "Robust horizontal line-of-sight rate estimator for sea skimming anti-ship missile with two-axis gimballed seeker", *IET Radar, Sonar, Nav.*, 2005, pp. 9-15.
 [9] T. L. Song and J. L. Speyer, "A stochastic analysis of a modified extended Kalman filter with application to estimation with bearings only measurements", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1985, pp. 940-949.
 [10] Moorman, M. J., and Bullock, T. E., "A new estimator for passive tracking of maneuvering targets", *Proc. IEEE Conf. Control Appl.*, 1992.
 [11] Moorman, M. J., and Bullock, T. E., "Empirical evidence of bias in extended Kalman filters used for passive target tracking", *Proc. IEEE National Aero. Electron. Conf.*, 1992.
 [12] Ra, W. S., Whang, I. H. and Park, J. B., "Non-conservative robust Kalman filtering using a noisy measurement matrix", *IET Control Theory Appl.*, 2009, pp. 1226-1236.

저 자 소 개



나 원 상 (Won-Sang Ra)

1998년, 2000년, 2009년 연세대학교 전기공학과(공학사), 전기컴퓨터공학과(공학석사), 전기전자공학과(공학박사). 2000년~2009년 국방과학연구소 유도조종부 선임연구원. 2009년~현재 한동대학교 기계제어공학부 부교수. 2015년 2월~2016년 2월 Cranfield University 방문교수. 관심분야는 강인 상태추정 이론, 표적추적필터, 유도조종기법 등.



신 효 상 (Hyo-Sang Shin)

2004년 부산대학교 항공우주공학과(공학사),
2006년 KAIST 항공우주공학과(공학석사),
2011년 Cranfield University 공학박사,
2010~현재 Cranfield University 부교수, 관
심분야는 복수 무인비행체의 협력 유도 및 제
어, 상황인식 등



정 보 영 (Bo-Young Jung)

2019년 한동대학교 기계제어공학부(공학사),
2019년~현재 동대학원 기계제어공학과 석사
과정, 관심분야는 추정이론, 유도조종기법
등.



황 익 호 (Ick-Ho Whang)

1988년, 1990년, 1995년 서울대학교 제어계측
공학과 공학사, 공학석사, 공학박사. 1995년~
현재 국방과학연구소 정밀유도기술센터 수
석연구원. 2003년 12월~2004년 11월 Naval
Postgraduate School 방문연구원. 관심분야는
추정이론, 표적추적필터, 유도조종기법 등.