

순차 컨벡스 프로그래밍을 이용한 충돌각 제어 비행궤적 최적화

Trajectory Optimization for Impact Angle Control based on Sequential Convex Programming

권혁훈* · 신호섭* · 김윤환* · 이동희*

(Hyuck-Hoon Kwon · Hyo-Sub Shin · Yoon-Hwan Kim · Dong-Hee Lee)

Abstract - Due to the various engagement situations, it is very difficult to generate the optimal trajectory with several constraints. This paper investigates the sequential convex programming for the impact angle control with the additional constraint of altitude limit. Recently, the SOCP(Second-Order Cone Programming), which is one area of the convex optimization, is widely used to solve variable optimal problems because it is robust to initial values, and resolves problems quickly and reliably. The trajectory optimization problem is reconstructed as convex optimization problem using appropriate linearization and discretization. Finally, simulation results are compared with analytic result and nonlinear optimization result for verification.

Key Words : Sequential convex programming, Impact angle control, Trajectory optimization, Second-order cone programming

1. 서론

충돌각 제어를 위한 유도법칙은 다양한 구속조건 내에서 정해진 충돌각을 만족하는 비행궤적을 산출하는 것을 목적으로 한다. 지금까지 다양한 충돌각 제어 유도법칙이 가속도, 지향각(Look angle) 등의 구속조건을 만족하는 형태로 제안되어 왔다. 최적제어 기반의 유도법칙은 충돌각 요구조건을 만족하며 가속도 및 지향각 구속조건을 만족하는 에너지 최소 비행궤적을 산출하였다 [1-4]. 또한, 비례항법(Proportional Navigation) 기반의 유도법칙들도 가속도 및 지향각 구속조건을 만족하는 형태로 다양하게 제안되고 있다 [5-7]. 하지만, 다른 상태변수들에 대한 구속조건이 주어지거나 구속조건이 시간 또는 거리에 따라 변하는 문제에 대해서는 기존 유도법칙을 적용하기 힘들기 때문에, 이를 고려한 새로운 유도법칙을 산출하거나 다양한 시뮬레이션을 통하여 기존 법칙을 적용해야 한다. 따라서, 각 문제에 대하여 해석적으로 산출되는 유도법칙과 달리 다양한 구속조건들을 고려하며 수치적으로 비행궤적을 산출할 수 있는 최적화 기법이 최근 들어 많이 연구되고 있다 [8,9].

유도탄의 비행궤적 최적화 문제는 비선형 최적화 문제이기 때문에, 비선형 프로그래밍(nonlinear programming)을 이용하여 분석을 수행해야 한다 [10,11]. 하지만, 비선형 프로그래밍은 초기 조건에 매우 민감하며, 수렴성을 보장할 수 없을 뿐만 아니라 계산 시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 따라서, 최근 들어 항공우주

분야의 다양한 문제들에 대하여 컨벡스 최적화를 이용한 접근이 시도되고 있다 [12-14]. 컨벡스 최적화 문제는 초기 조건에 강건하며 수렴성이 보장되는 장점이 있다. 특히, 2차 원뿔 프로그래밍의 경우, 계산 시간이 매우 짧기 때문에 이를 활용한 실시간 궤적 최적화 기법에 대한 연구도 활발히 진행되고 있다 [15,16].

본 논문에서는 순차 컨벡스 프로그래밍을 기반으로 허용 고도 구속조건이 추가적으로 주어진 충돌각 제어 비행궤적에 대한 최적화를 수행하였다. 순차 컨벡스 프로그래밍은 비선형 특성을 지닌 최적화 문제를 선형화 및 이산화를 연속적으로 수행하며 수렴하는 최적해를 산출하는 방법이다 [17-20]. 본 기법은 상태변수나 제어입력에 대한 다양한 구속조건이나 여러 목적함수들에 대하여 빠르게 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 유도탄의 비행궤적 최적화에 대한 문제를 정의하였다. III장에서는 순차 컨벡스 프로그래밍 기법을 구성하는 선형화 및 이산화 기법에 대하여 기술하였다. IV장에서는 공대지 유도탄에 대한 시뮬레이션 결과를 도출하였고, V장에서는 결론을 기술하였다.

2. 궤적 최적화 문제

2.1 문제 정의

본 장에서는 1단 고체 추진기관이 탑재된 중단거리 유도탄의 교전 시나리오를 기반으로 충돌각 제어 궤적 최적화 문제를 정의한다. 그림 1은 유도탄 발사부터 표적 요격까지의 비행궤적을 나타낸다.

여기서 x_0, y_0, V_0, γ_0 는 각각 발사 시점에서의 거리, 고도, 속도, 경로각을 나타내며, x_f, y_f, V_f, γ_f 는 표적 요격 시점의 거리,

† Corresponding Author : PGM Lab., LIG Nex1, Korea.
E-mail: hhkwon22@lignex1.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2773-0145

* PGM Lab., LIG Nex1, Korea.

Received : November 30, 2018; Accepted : December 22, 2018

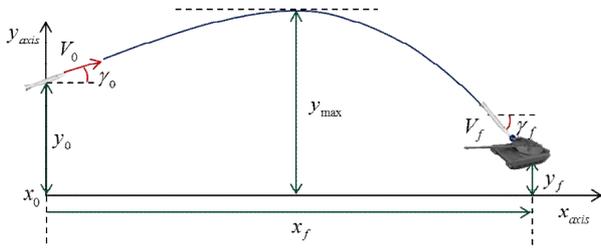


그림 1 충돌각 제어를 위한 유도탄 비행궤적
Fig. 1 Missile trajectory for impact angle control

고도, 속도, 경로각을 나타낸다. 또한, y_{max} 는 유도탄 운용 상에서 허용된 최대고도를 나타낸다. 이와 같은 유도탄의 비행궤적은 식 (1)에 기술된 유도탄의 종방향 운동방정식에 의하여 결정된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma \\ \dot{y} &= V \sin \gamma \\ \dot{V} &= \frac{(T \cos \alpha - D)}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{(T \sin \alpha + L)}{m V} - \frac{1}{V} g \cos \gamma \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{\tau_\alpha} (\alpha_c - \alpha) \\ \dot{m} &= \frac{(m_f - m_0)}{t_T} \end{aligned} \quad (1)$$

where $T = \begin{cases} T_0 & t \leq t_T \\ 0 & t > t_T \end{cases}$

여기서, $x, y, V, \gamma, \alpha, \alpha_c$ 는 각각 유도탄의 거리, 고도, 속도, 경로각, 받음각, 받음각 명령을 나타낸다. 또한, m, g, τ_α 는 유도탄의 질량과 중력가속도, 받음각 명령에 대한 시정수를 나타내고, T, L, D 는 유도탄에 작용하는 추력, 양력, 항력을 나타낸다. 본 연구에서는 추진 구간에서 일정 크기의 추력 T_0 가 발생하고, 연소구간 동안 유도탄의 무게가 일정하게 감소한다고 가정하였다. 그리고, 유도탄에서 발생하는 양력과 항력은 다음과 같이 받음각의 1차 및 2차 함수로 근사화하였다.

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} \right) (C_{D_0} + C_{D_{\alpha 1}} \alpha + C_{D_{\alpha 2}} \alpha^2) \\ L &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} \right) (C_{L_0} + C_{L_{\alpha 1}} \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, ρ, S_{ref} 는 공기 밀도와 유도탄의 기준면적을 나타내고, $C_{L_0}, C_{L_{\alpha 1}}, C_{D_0}, C_{D_{\alpha 1}}, C_{D_{\alpha 2}}$ 는 양력 및 항력과 관련된 공력계수들을 나타낸다. 만일 비행 중 발생하는 유도탄의 받음각이 작다고 가정하고, 유도탄의 상태변수 및 제어변수를 각각 $p = [x, y, V, \gamma, \alpha]^T$ 와 $u = \alpha_c$ 로 선정하면, 추진-활공 유도탄의 비선형 운동방정식은 다음과 같이 기술된다. 단, 상태변수의 개수

를 최소화하고 최적화 문제 설정을 용이하게 하도록, 유도탄의 질량은 상태변수로 선정하지 않았다.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= f_p(p) + B_p(p)u \\ &= \begin{bmatrix} V \cos \gamma \\ V \sin \gamma \\ \frac{T}{m} - \frac{\rho V^2 S_{ref}}{2m} (C_{D_0} + C_{D_{\alpha 1}} \alpha + C_{D_{\alpha 2}} \alpha^2) - g \sin \gamma \\ \frac{T \alpha}{m V} + \frac{\rho V S_{ref}}{2m} (C_{L_0} + C_{L_{\alpha 1}} \alpha) - \frac{1}{V} g \cos \gamma \\ -\frac{\alpha}{\tau_\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_\alpha} \end{bmatrix} \alpha_c \end{aligned} \quad (3)$$

where $m = \begin{cases} m_0 + \frac{(m_f - m_0)}{t_T} t & t \leq t_T \\ m_f & t > t_T \end{cases}, T = \begin{cases} T_0 & t \leq t_T \\ 0 & t > t_T \end{cases}$

2.2 최적화 문제 설정

본 연구에서 고려하는 충돌각 제어 최적화 문제는 고도 및 받음각 구속조건을 만족하며 유도탄의 종말 경로각을 만족하는 최소에너지 비행궤적을 산출하는 문제이다. P0는 2.1절에서 기술한 식들을 기반으로 한 비선형 최적제어 문제를 나타낸다.

$$P0 : \min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \alpha_c^2 dt$$

- dynamics
 $\dot{p} = f_p(p) + B_p(p)u$
- state constraint
 $0 \leq y \leq y_{max}$
- control constraint
 $-\alpha_{max} \leq u \leq \alpha_{max}$
- initial conditions
 $p(t_0) = [x(t_0), y(t_0), V(t_0), \gamma(t_0), \alpha(t_0)]^T$
- final conditions
 $x(t_f) = x_f, y(t_f) = y_f, \gamma(t_f) = \gamma_f$

위와 같은 최적제어 문제를 수치적으로 해결하기 위해서는 단조 증가하거나 단조 감소하고, 경계값이 정해진 변수를 독립변수로 설정해야 한다. 본 연구에서는 고려하는 문제는 최종 시간이 고정되지 않았기 때문에, 시간 대신 거리를 독립변수로 선정하고 다음 식을 이용하여 운동방정식을 변환하였다.

$$dt = \frac{1}{V \cos \gamma} dx \quad (4)$$

이에 따라 유도탄의 상태변수는 $q = [y, V, \gamma, \alpha]^T$ 로 재선정되고, 식 (3)의 운동방정식은 식 (5)의 운동방정식으로 변환된다. 단, 유도탄의 추력과 질량은 컨벡스 프로그래밍을 위한 이산화

수행하며 각각 식 (9) 및 식 (10)과 같이 거리에 대한 형태로 근사화하여 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= f_q(q) + B_q(q)u \\ &= \begin{bmatrix} \frac{T}{mV\cos\gamma} - \frac{\rho VS_{ref}}{2m\cos\gamma} (C_{D_0} + C_{D_{a1}}\alpha + C_{D_{a2}}\alpha^2) - \frac{1}{V}g\tan\gamma \\ \frac{T\alpha}{mV^2\cos\gamma} + \frac{\rho S_{ref}}{2m\cos\gamma} (C_{L_0} + C_{L_{a1}}\alpha) - \frac{1}{V^2}g \\ -\frac{\alpha}{\tau_\alpha V\cos\gamma} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\tau_\alpha V\cos\gamma} \end{bmatrix} \alpha_c \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{where } m = \begin{cases} m_0 + \frac{(m_f - m_0)t}{t_T} & t \leq t_T \\ m_f & t > t_T \end{cases}, \quad T = \begin{cases} T_0 & t \leq t_T \\ 0 & t > t_T \end{cases}$$

독립변수 변경에 따라 P0은 다음과 같이 P1로 변경된다.

$$P1 : \min \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\alpha_c^2}{V\cos\gamma} \right) dx$$

- dynamics

$$\dot{q}' = f_q(q) + B_q(q)u$$

- state constraint

$$0 \leq y \leq y_{\max}$$

- control constraint

$$-\alpha_{\max} \leq u \leq \alpha_{\max}$$

- initial conditions

$$q(x_0) = [y(x_0), V(x_0), \gamma(x_0), \alpha(x_0)]^T$$

- final conditions

$$y(x_f) = y_f, \quad \gamma(x_f) = \gamma_f$$

3. 순차 컨벡스 프로그래밍

P1 최적제어 문제는 비선형 미분방정식을 포함하기 때문에 컨벡스 프로그래밍을 적용하기 위해서는 추가적인 컨벡스 변환과 이산화에 대한 적분이 요구된다. 우선, 비선형 미분방정식은 부분 선형화(partial linearization)와 신뢰 구간(trust region)을 설정하여 선형 모델을 도출하였고, 사다리꼴 기법(trapezoidal rule)을 적용하여 이산화에 대한 적분을 수행하였다[14]. 컨벡스 변환이 수행된 최종 최적화 문제는 선형점에 대한 근사적인 최적화 결과를 산출하기 때문에, 비선형 문제에 대한 최적 결과를 산출하기 위해서 산출된 결과를 바탕으로 연속적으로 최적화를 수행하는 순차 컨벡스 프로그래밍을 적용하였다.

3.1 운동방정식 선형화 및 신뢰구간 설정

최적화 문제에서 k 번째로 산출된 결과를 q^k 라고 가정하자. 운동방정식 (5)는 부분 선형화를 기반으로 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= f_q(q) + B_q(q)u \\ &= A(q^k)q + B(q^k)u + c(q^k) \\ \text{where } A(q^k) &= \frac{\partial f_q(q^k)}{\partial q}, \quad c(q^k) = f_q(q^k) - A(q^k)q^k \\ a_{13} &= \sec^2\gamma \\ a_{22} &= -\frac{T}{mV^2\cos\gamma} - \frac{\rho S_{ref}}{2m\cos\gamma} (C_{D_0} + C_{D_{a1}}\alpha + C_{D_{a2}}\alpha^2) + \frac{g}{V^2}\tan\gamma \\ a_{23} &= \frac{T\tan\gamma}{mV\cos\gamma} - \frac{\rho VS_{ref}\tan\gamma}{2m\cos\gamma} (C_{D_0} + C_{D_{a1}}\alpha + C_{D_{a2}}\alpha^2) - \frac{g}{V}\sec^2\gamma \\ a_{24} &= -\frac{\rho VS_{ref}}{2m\cos\gamma} (C_{D_{a1}}\alpha + 2C_{D_{a2}}\alpha) \\ a_{32} &= -\frac{2T\alpha}{mV^3\cos\gamma} + \frac{2g}{V^3} \\ a_{33} &= \frac{T\alpha\tan\gamma}{mV^2\cos\gamma} + \frac{\rho S_{ref}\tan\gamma}{2m\cos\gamma} (C_{L_0} + C_{L_{a1}}\alpha) \\ a_{34} &= \frac{T}{mV^2\cos\gamma} + \frac{\rho S_{ref}}{2m\cos\gamma} (C_{L_{a1}}) \\ a_{42} &= \frac{\alpha}{\tau_\alpha V^2\cos\gamma} \\ a_{43} &= -\frac{\alpha\tan\gamma}{\tau_\alpha V\cos\gamma} \\ a_{44} &= -\frac{1}{\tau_\alpha V\cos\gamma} \\ a_{11} = a_{12} = a_{14} = a_{21} = a_{31} = a_{41} &= 0 \\ b_{41} &= \frac{1}{\tau_\alpha V\cos\gamma} \\ b_{11} = b_{21} = b_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 a_{ij} , b_{ij} 는 A 행렬과 B 행렬의 i 번째 행과 j 번째 열의 값을 나타낸다. 부분 선형화 기법은 선형화를 수행하면서 제어 입력에 대한 정보가 요구되지 않기 때문에, 진동 특성을 억제하고 수렴 속도를 높이는 것으로 알려져 있다. 그리고 선형화는 하나의 평형점에 대한 근사화 결과를 산출하므로 다음과 같은 신뢰구간을 추가적으로 설정하여 타당성을 확보하는 것이 필요하다.

$$\|q - q^k\| \leq r_q \quad (7)$$

3.2 운동방정식 이산화

본 연구에서 수행하는 컨벡스 최적화 문제는 독립변수인 x 를 초기값(x_0)과 최종값(x_f) 사이를 동일한 N 개의 구간으로 나누어 최적화 결과를 도출한다. 운동방정식은 미분방정식으로 적절한 적분 기법을 사용하여 각 이산화 지점에서의 산출적인 구속조건

형태로 변환해야 한다. 사다리꼴 기법을 기반으로 이산화를 수행하면 다음과 같다[16].

$$q_i^k = q_{i-1}^k + \frac{\Delta x}{2} [f^q(q_{i-1}^k) + B(q_{i-1}^k)u_{i-1}^k] + \frac{\Delta x}{2} [f^q(q_i^k) + B(q_i^k)u_i^k], \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

유도탄의 질량과 추력은 연소 종료 시점인 t_T 를 기준으로 값이 결정되기 때문에, 다음과 같이 t_T 시점을 포함하는 i_T 번째 구간($[x_{i_T-1}, x_{i_T}]$)을 산출하는 것이 필요하다.

$$\sum_{s=1}^{i_T-1} t_s \leq t_T < \sum_{s=1}^{i_T} t_s \quad (9)$$

where

$$t_s(i) = \frac{2\Delta x}{(V_{i-1}\cos\gamma_{i-1} + V_i\cos\gamma_i)}$$

i_T 번째 구간을 기준으로 유도탄의 질량과 추력은 다음과 같이 기술된다.

$$m_i^k = \begin{cases} m_0 - m_{thr} \left(\frac{i-1}{i_T} \right) & i \leq i_T \\ m_0 - m_{thr} & i > i_T \end{cases}, \quad T_i^k = \begin{cases} T_0 & i \leq i_T \\ 0 & i > i_T \end{cases} \quad (10)$$

3.3 컨벡스 최적화 문제 정의

지금까지 기술된 결과를 바탕으로 비선형 최적제어 문제 P1은 다음과 같은 컨벡스 최적화 문제 P2로 변환된다.

$$P2 : \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \kappa_i \eta_i$$

$$\text{where } \kappa_i = \frac{2\Delta x}{(V_{i-1}\cos\gamma_{i-1} + V_i\cos\gamma_i)}$$

- dynamics

$$\bar{H}q = F$$

- state constraint

$$0 \leq y_i \leq y_{\max}$$

$$\|q - q^k\| \leq r_q$$

- control constraint

$$-\alpha_{\max} \leq u_i \leq \alpha_{\max}$$

$$u_i^2 \leq \eta_i$$

- initial conditions

$$q(x_0) = [y(x_0), V(x_0), \gamma(x_0), \alpha(x_0)]^T$$

- final conditions

$$y(x_N) = y_f, \quad \gamma(x_N) = \gamma_f$$

여기서 η 는 2차 원뿔 프로그래밍(Second-Order Cone

Programming) 형태로 기술하기 위하여 추가된 여유변수(slack variable)을 나타낸다. κ_i 는 각 구간에서의 입력에 대한 가중치로 이전 단계에서 산출된 최적해로부터 계산된 값을 사용한다.

4. 시뮬레이션 결과

앞 장에서 기술된 P2 최적화 문제를 공대지 유도탄에 적용하여 구속조건을 만족하는 총돌각 제어 비행궤적을 산출하였다. 다음은 본 시뮬레이션에서 사용한 공대지 유도탄의 사양 및 초기조건을 나타낸다.

표 1 유도탄 사양 및 초기조건

Table 1 Missile Specification & Initial Conditions

무게	30kg(연소 전) 24kg(연소 후)
추력	4500 N
연소시간	3초
최대 받음각	10도
받음각 시정수	0.3
초기 고도	500m
초기 속도	100m/s
초기 경로각	0도

최적화를 위한 이산화 수는 200으로 설정하였고, 신뢰구간과 수렴 조건은 다음과 같이 설정하였다. 신뢰구간은 기존 문제에 추가적인 제한사항으로 작용하지 않도록 각 변수의 변경 가능 범위를 고려하여 설정하였고, 수렴 조건은 수렴 속도를 고려하여 설정하였다.

$$r_q = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 30^\circ \\ 10^\circ \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.05^\circ \\ 0.05^\circ \end{bmatrix} \quad (11)$$

표적은 거리 8 km에 위치한 고정 표적으로 가정하였고, 40도 총돌각에 대하여 허용 고도값을 변화시키면서 결과를 산출하였다. 또한, 초기 최적화 문제에서 각 이산화 지점에서의 값은 상태변수의 초기값과 최종값을 선형적으로 연결하는 값으로 선정하였다.

4.1 순차 컨벡스 프로그래밍 결과

다음 그림은 허용 고도값 1000m에 대한 순차 컨벡스 프로그래밍의 결과를 보여준다. 총 10번의 연속적인 최적화를 수행한 후, 총돌각 및 고도 제한조건을 만족하는 수렴해를 도출하였다. 특히, 초기 비행궤적이 최종 비행궤적과 매우 상이함에도 불구하고 빠르게 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 순차 컨벡

스 프로그래밍은 초기 값에 매우 강건한 특성을 지니고 있기 때문에, 비선형 프로그래밍보다 빠르게 수렴 해를 도출하는 장점을 지니고 있다.

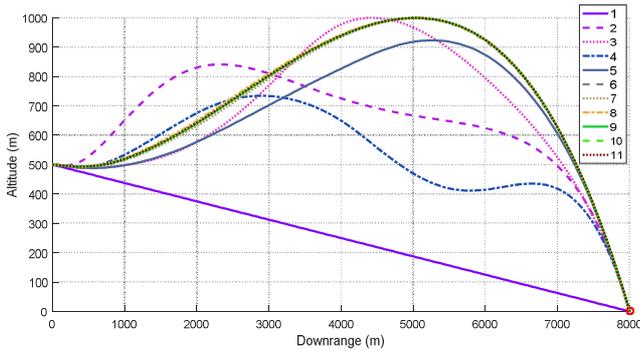


그림 2 고도 제한에 따른 총돌각 제어 비행궤적
 Fig. 2 Missile trajectory for impact angle control with altitude limit

1100m 정도까지 고도가 상승하지만, 허용 고도가 1000m, 800m, 600m로 감소한 경우에는 허용 고도까지 상승한 후 표적을 요격하는 결과를 확인할 수 있다.

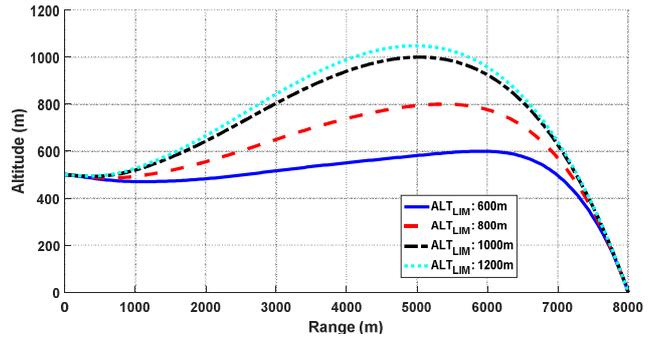


그림 4 고도 제한에 따른 총돌각 제어 비행궤적
 Fig. 4 Missile trajectory for impact angle control with altitude limit

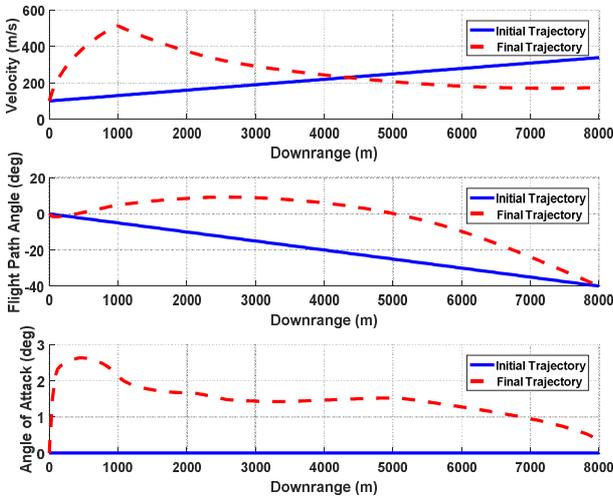


그림 3 속도, 경로각, 받음각에 대한 초기 및 최종 결과
 Fig. 3 Initial and final results for velocity, flight path angle and angle-of-attack

그림 3은 속도, 경로각, 받음각에 대한 초기 및 최종 상태 결과를 나타낸다. 속도의 경우에는 추진-활공 구간을 고려하지 않고 초기값과 최종값을 선형적으로 연결하는 초기 상태 예측이 주어져 있음에도 최종 결과에는 추진-활공 구간이 반영되어 산출되었음을 확인할 수 있다. 또한, 경로각은 초기 발사 시점과 최종 요격 시점에서의 값을 유지한 채 최적화가 수행되었음을 확인할 수 있다. 마지막으로 받음각은 전 구간에서 3도 이내로 발생하며 초기 구간에서 다른 구간보다 크게 발생함을 확인할 수 있다.

다음 그림은 허용 고도 변화에 따른 유도탄의 비행궤적을 나타낸다. 허용 고도가 1200m일 경우에는 제한 값보다 작은 약

다음 표는 허용 고도 변화에 따른 목적함수 값의 변화를 나타낸다. 고도 제한 값까지 상승하지 않는 1400m, 1200m에서는 동일한 값을 나타내지만, 고도 제한으로 인하여 비행궤적이 변하는 경우에는 그에 따라 최소에너지가 증가하고 있음을 확인할 수 있다.

표 2 고도 제한에 따른 최소에너지 변화
 Table 2 Minimum Energy Variation for Altitude Limits

허용고도	최소에너지
1400m	0.0109
1200m	0.0109
1000m	0.0112
800m	0.0155
600m	0.0261

4.2 결과 검증

본 절에서는 순차 컨벡스 프로그래밍으로 산출된 결과의 타당성을 확인하기 위하여 동일한 문제에 대하여 비선형 프로그래밍 (GPOPS-II) 및 참고문헌 [1]의 최적제어 기반의 유도법칙으로 산출된 결과를 비교하였다[1]. 단, 최적제어 기반의 유도법칙은 조종지연을 고려하지 않고 유도한 결과를 사용하였다. 또한, 고도에 대한 구속조건을 배제한 결과를 비교하기 위하여 컨벡스 및 비선형 프로그래밍의 허용 고도 제한을 1200m로 설정하여 고도 제한에 걸리지 않도록 하였다. 다음 그림 5는 세 가지 방법으로 산출된 결과를 나타낸다.

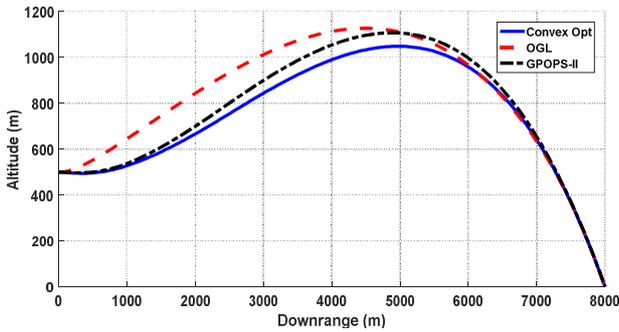


그림 5 해석적/수치적 방법에 따른 최적 비행궤적 비교
 Fig. 5 Comparison of optimal trajectory with analytic & numerical methods

세 가지 다른 방법으로 산출된 비행궤적은 전반적으로 유사한 결과를 도출하지만, 최대고도 측면에서 약간의 차이가 발생함을 확인할 수 있다. 특히, 최적제어 기반의 유도법칙은 수치적으로 산출된 다른 기법들에 비하여 속도가 낮은 초기 구간에서의 명령이 크게 발생하고 그에 따라 고도가 상승함을 볼 수 있다. 표 3을 살펴보면 수치 기반의 최적화 기법들은 유도탄의 속도 변화에 대한 부분이 고려되어 일정 속도를 가정하여 산출된 최적제어 기반의 유도기법에 비하여 에너지가 적게 소모됨을 확인할 수 있다.

표 3 최적화 방법에 따른 최소에너지 변화

Table 3 Minimum energy variation for optimization methods

적용방안	최소에너지
Convex Opt.	0.0109
GPOPS-II	0.0101
최적제어	0.0149

다음 표는 컨벡스 프로그래밍과 비선형 프로그래밍의 계산시간을 비교한 결과를 나타내는데, 컨벡스 프로그래밍이 비선형 프로그래밍에 비하여 빠르고 안정적으로 해에 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 컨벡스 프로그래밍은 MOSEK을 사용하여 수행하였고, 코드 최적화를 수행하지 않았음에도 10회의 최적화에 대하여 약 6.068초의 평균 계산시간이 소요되었다. 반면, GPOPS-II의 경우 tolerance 값과 최적화 방식에 따라 계산시간에 차이가 크게 발생하였는데, tolerance 0.001에 대하여 SNOPT와 IPOPT를 사용한 결과 각각 17.34초와 983.83초가 소요되었다. (여기서, mesh는 hp로 적용하였다.) 결과에서 나타난 것과 같이 GPOPS-II는 문제에 따른 설정 값을 적절하게 선정하는 것이 계산시간에 매우 중요하게 작용하는 반면, 컨벡스 프로그래밍의 경우에는 초기 상태변수 예측 이외의 다른 설정 값에 크게 영향을 받지 않는 장점이 있다.

표 4 최적화 방법에 따른 계산시간 변화

Table 4 Calculation time variation for optimization methods

적용방안	최소에너지
Convex Opt.	5.921초~6.239 초 (평균 6.068초)
GPOPS-II (SNOPT)	17.34 초
GPOPS-II (IPOPT)	983.83 초

다음 그림은 허용 고도 제한에 따른 순차 컨벡스 프로그래밍과 비선형 프로그래밍을 비교한 결과를 나타낸다. 허용 고도는 1000m로 설정한 후, 두 최적화 결과를 산출하였다. 허용 고도 구속조건을 만족하는 유사한 비행궤적을 나타냄을 확인할 수 있다.

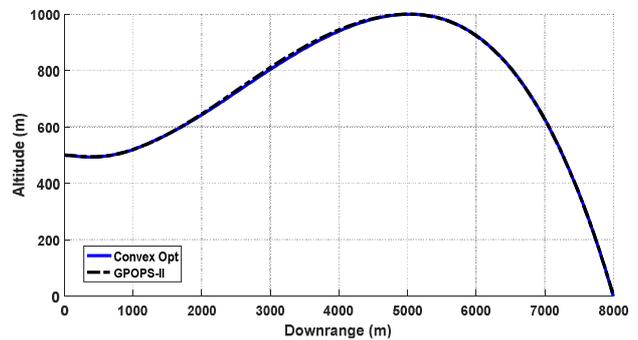


그림 6 수치적 방법에 따른 최적 비행궤적 비교

Fig. 6 Comparison of optimal trajectory with numerical methods

5. 결 론

본 논문에서는 순차 컨벡스 프로그래밍을 이용한 총돌각 유도 비행궤적 최적화에 대한 연구를 수행하였다. 다양한 플랫폼에서 운용되는 유도탄의 경우, 초기 조건과 구속 조건들의 변화가 매우 크기 때문에 운용 시 이를 고려하여 원하는 목적에 따른 비행궤적을 빠르게 생성할 필요가 있다. 최근 들어 다양한 분야에서 적용되고 있는 컨벡스 최적화 기법은 초기 조건에 대한 강건성과 빠른 수렴 시간으로 유도탄의 실시간 비행궤적 생성에 유리한 장점을 지니고 있다. 따라서, 본 연구에서는 비선형 특성을 선형화하여 연속적으로 해를 산출하는 순차 컨벡스 프로그래밍을 적용하여 총돌각을 제어하는 비행궤적을 산출하였다. 초기 비행궤적 최적 비행궤적과 매우 상이함에도 불구하고 연속적으로 해를 산출하며 빠른 시간 내에 수렴하는 것을 확인하였다. 또한, 산출된 결과를 비선형 프로그래밍 및 최적제어 기반의 유도법칙과 비교하여 결과의 타당성을 확인하였다.

References

- [1] C.K. Ryoo, H. Cho, and M.J. Tahk, "Optimal Guidance Laws with Terminal Impact Angle Constraint", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 4, pp. 724-732, 2005.
- [2] C. K. Ryoo, H. Cho, and M.J. Tahk, "Time-to-go Weighted Optimal Guidance with Impact Angle Constraints", *IEEE Trans. Control System Technology*, Vol. 14, No. 3, pp. 483-492, 2006.
- [3] B. G. Park, T. H. Kim, and M. J. Tahk, "Optimal Impact Angle Control Guidance Law Considering the Seeker's Field-of-view Limits", *Proc. Institution of Mechanical Engineering, Part G, Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 227, No. 8, pp. 1347-1364, 2013.
- [4] B.G. Park, T.H. Kim, and M.J. Tahk, "Range-to-go Weighted Optimal Guidance Law with Impact Angle Constraint and Seeker's Look Angle Limits", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 52, No. 3, pp. 1241-1256, 2016.
- [5] K.S. Erer and O. Merttopcuoglu, "Indirect Impact-Angle-Control Against Stationary Targets using Biased Pure Proportional Navigation", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 35, No. 2, pp. 700-703, 2012.
- [6] T.H. Kim, B.G. Park and M.J. Tahk, "Bias-Shaping Method for Biased Proportional Navigation with Terminal-Angle Constraint", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 6, pp. 1810-1816, 2013.
- [7] R. Tekin and K.S. Erer, "Switched-Gain Guidance for Impact Angle Control under Physical Constraints", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 38, No. 2, pp. 205-216, 2015.
- [8] P. Lu, "Introducing Computational Guidance and Control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 40, No. 2, February, 2017.
- [9] X. Liu, P. Lu and B. Pan, "Survey of Convex Optimization for Aerospace Applications", *Astrodynamics*, Vol. 1, No. 1, 2017.
- [10] C. R. Hargraves and S. W. Paris, "Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, 1987.
- [11] J. T. Betts, "Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, 1998.
- [12] B. Acikmese and S.R. Ploen, "Convex Programming Approach to Powered Descent Guidance for Mars Landing", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 5, 2007.
- [13] L. Blackmore, B. Acikmese and D.P. Scharf, "Minimum-Landing-Error Power-Descent Guidance for Mars Landing Using Convex Optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 4, 2010.
- [14] X. Liu, Z. Shen, and P. Lu, "Exact Convex Relaxation for Optimal Flight of Aerodynamically Controlled Missiles", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.52, No.4, Aug. 2016.
- [15] X. Liu, Z. Shen, and P. Lu, "Closed-Loop Optimization of Guidance Gain for Constrained Impact", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 40, No. 2, 2017.
- [16] X. Liu, Z. Shen, and P. Lu, "Entry Trajectory Optimization by Second-Order Cone Programming", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 2, 2016.
- [17] M. Szmuk and B. Acikmese, "Successive Convexification for Fuel-Optimal Powered Landing with Aerodynamic Drag and Non-Convex Constraints", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA SciTech, California, USA*, Jan. 2016.
- [18] Y. Mao, M. Szmuk and B. Acikmese, "Successive Convexification of Non-Convex Optimal Control Problems and Its Convergence Properties", *IEEE 55th Conference on Decision and Control, Las Vegas, USA*, Dec. 2016.
- [19] M. Szmuk and B. Acikmese, "Successive Convexification for Mars 6-DoF Powered Descent Landing Guidance", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA SciTech, Texas, USA*, Jan. 2017.
- [20] Y. Mao, D. Dueri, M. Szmuk and B. Acikmese, "Successive Convexification of Non-Convex Optimal Control Problems with State Constraints", *IFAC Paper OnLine*, Vol. 50, issue 1, July 2017.

저 자 소 개



권혁훈 (Hyuck-Hoon, Kwon)

2002년 한국과학기술원 항공우주공학과 졸업. 2005년 동 대학원 항공우주공학과 졸업(석사). 현재 LIG넥스원 수석연구원. 관심분야는 최적제어, 비선형제어, 최적화, 조종 알고리즘 등.



신 효 섭 (Hyo-Sub, Shin)

2009년 서울대학교 항공우주공학과 졸업.
2011년 동 대학원 항공우주공학과 졸업(석사). 현재 LIG넥스원 선임연구원. 관심분야는 최적제어, 효과도 분석, HILS 등.



김 윤 환 (Yoon-Hwan, Kim)

2002년 서울대학교 항공우주공학과 졸업.
2004년 한국과학기술원 항공우주공학과 졸업(석사). 2009년 동 대학원 항공우주공학과 졸업(박사). 현재 LIG넥스원 수석연구원. 관심분야는 체계성능분석, 유도 알고리즘 등.



이 동 희 (Dong-Hee, Lee)

2016년 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 졸업. 현재 LIG넥스원 선임연구원. 관심분야는 유도 알고리즘, 최적화 등.