

조종날개 전개시점 경계조건을 포함한 지능화 탄약의 사거리 최대화 유도 기법

Optimal Guidance of Guided Projectile for Range Maximization with Boundary Condition on Fin Deployment Timing

김 용 재*
(Yongjae Kim)

Abstract - In order for a gun-launched guided projectile to glide to the maximum range, when to deploy the fin and start flight with guidance and control should be considered in range optimization process. This study suggests a solution to the optimal guidance problem for flight range maximization of the flight model of a guided projectile in vertical plane considering the aerodynamic properties. After converting the nonlinear Multi-Phase Optimal Control Problem to Two-Point Boundary Value Problem, the optimized guidance command and the best fin deployment timing are calculated by the proposed numerical method. The optimization results of the multiple flight rounds with various initial velocity and launch angle indicate that determining specific launch condition incorporated with the guidance scheme is of importance in terms of mechanical energy consumption.

Key Words : Optimal guidance, Optimal control, Guided projectile, Range maximization, Boundary condition, Mechanical energy, Cost of transport

1. 서 론

지능화 탄약은 기존 재래식 탄약을 운용할 수 있는 포발사 운용체계를 이용하며, 항법장치 및 유도조종장치와 구동장치 등을 탑재하여 비행 중 탄의 자세나 속도를 제어함으로써 사거리와 탄착 정밀도를 재래식 탄약보다 획기적으로 증가시킬 수 있는 신개념 탄약이다. 이 개념을 도입하여 개발된 사례로서는 조종날개로서 전방 카나드를 사용한 비행체로 목표지를 정밀타격할 수 있는 Raytheon사의 M982 Excalibur, 공기역학적으로 설계된 고정식 꼬리날개로 비행안정성을 확보하여 장사정을 비행할 수 있는 OTO Melara사의 Volcano 등이 있다. 지능화 탄약의 비행구간은 조종날개 전개시점을 기준으로 두 가지로 나뉜다. 포발사 직후에는 조종날개 전개시점까지 탄도비행을 한 후, 일정 고도 혹은 시간에 이르렀을 때 조종날개를 전개하여 목적에 맞는 유도비행을 수행하는 것이다.

준수직 타격, 우회 타격 등 궤적에 구속조건이 부가된 비행을 수행하려면, 표적지 부근에 이를 때까지 고도 손실을 줄이면서 원거리를 비행할 수 있는 경로로 유도할 수 있어야 한다. 또한, 개발된 지능화 탄약의 운용 가능한 최대사거리에 대한 정보는 운용 전에 필수적으로 확보해야 할 제원이다. 따라서 조종날개 전개 후 유도제어 비행 구간에서 지능화탄약이 가능한 한 멀리 비행하도록 하는 기법, 즉 사거리 최대화를 위한 유도기법의 연구

가 요구된다. 비행체의 사거리를 증대시키기 위한 유도 및 제어 기법 연구는 다수 수행되어 왔다. Teo 등은 수직축 2자유도로 모델링된 비행체의 받음각 최적화 유도기법을 사용하여 최적제어가 최대사거리 비행에 유효함을 확인하였고[1], Bulirsch 등은 직접법 방식과 간접법 방식의 장점을 통합한 최적제어를 행글라이더 형태의 비행체 운동 모델에 적용하여 효율적인 사거리 최대화 유도기법을 제안하였다[2]. Costello는 비행안정 꼬리날개와 신관부에 조종날개가 있는 155mm 탄약의 모델링 및 비행 시뮬레이션을 통해, 비행궤적 정점 부근에서 수직축 유도명령을 부가함으로써 기존 탄약의 사거리를 획기적으로 증대시킬 수 있다는 것을 증명하였다[3-5]. Kelly 등과 D. C. Zhang 등은 활공구간에서 비행경로각이 일정한 평형상태에서 최대 양향비(L/D 비)를 유지하며 비행함으로써 근사적인 사거리 최대화가 가능하다는 것을 보였고[6,7], Yu와 Chen 또한 최대 양향비 활공비행에 주목하여, 푸고이드 진동의 억제를 고려한 초음속 비행체의 사거리 최대화를 연구하였다[8]. 그러나 유도비행을 시작하는 조종날개 전개시점과 사거리 최대화의 관계에 대한 연구는 상대적으로 그 수가 적다. 이 연구는 지능화 탄약의 조종날개 전개시각을 고려했을 때 최대사거리 비행에 필요한 요구조건을 분석하기 위하여, 지능화 탄약의 수직축 운동 모델을 기반으로 최대사거리 획득을 위한 최적의 조종날개 전개시각 및 최적 유도명령을 구하는 최적화문제의 해법을 제시한다.

최대사거리를 비행하기 위한 최적 유도명령을 구하는 문제는 일반적으로 사거리 최대화를 목적함수(Cost function)로 한 최적화 문제(Optimal Control Problem)를 푸는 것으로 귀결된다. 특히 지능화 탄약은 조종날개 전과 후의 2가지의 운동방정식을 가지므

* Corresponding Author : Agency of Defense Development, Korea.
E-mail: kim4375731@add.re.kr
ORCID: <https://0000-0001-6707-2824>

Received : November 30, 2018; Accepted : December 24, 2018

로, 사거리 최대화를 위한 유도명령을 얻기 위해서 다구간 최적화 문제(Multi-phase Optimal Control Problem)를 풀게 된다. Rao 등은 비행체가 고고도 지구 공전궤도에서 저고도 공전궤도로 재진입 시 최소 추력으로 활공하기 위한 최적제어를 연구하였고[9], Soler 등은 이륙에서 순항비행을 거쳐 착륙까지 7단계의 비행구간을 가정한 항공기 비행 모델의 다구간 최적화 문제를 연료 소비 최소화 관점에서 다루었고, 적재용량의 차이에 따른 최적 비행경로와 연료소비량을 분석하였다[10,11]. Bonami 등 또한 항공기의 연료 소비 최소화 관점에서 최적제어를 연구하였으며, 특히 영공 통과료(Overflying fee)의 부가방법이 나라마다 다른 점을 고려한 최적화 문제의 해법을 제시하였다[12]. Fukumoto는 다수 비행체의 편대형성 및 비행궤적 결정 문제를 각 기체의 특성과 시간지연을 고려한 다구간 최적화 문제로 변환함으로써 해결하였다[13]. 포발사 지능화 탄약 시스템의 최적화 문제를 연구한 Chen 등은 로켓추진 구간과 조종날개 전개 시점에 따라 비행궤적을 네 구간으로 나누어 각 구간의 시간과 비행궤적 최적화를 수행하였다[14]. 그러나 사거리 최대화 비행 유도 기법과 상태변수의 초기값 및 최적화 변수와의 관계가 깊어 고려된 연구사례는 적다. 이 연구에서는 조종날개 전개시점 전과 후의 운동방정식의 형태가 최적화 변수 중 하나인 유도명령에 대하여 서로 다른 점에 착안하여, 지능화 탄약 시스템의 다구간 최적화 문제를 2점 경계치 문제(Two-Point Boundary Value Problem)로 변환하여 해결하였다. 또한, 사거리 최대화에 더하여 조종날개 전개시각도 최적화할 경우와 이를 배제할 경우, 상태변수의 초기값을 다르게 설정할 경우에 대하여 각각 최적 유도명령의 특성이 달라지는 것을 역학적 에너지 관점에서 고찰한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 첫째로, 지능화 탄약의 공력 모델과 함께 수직축 운동방정식을 정의한다. 다음으로, 정의된 운동 모델의 제반 구속조건 및 경계조건이 부가된 사거리 최대화 문제를 정의하고, 문제의 해를 도출하기 위하여 이 연구에서 적용한 수치적 해법에 대하여 설명한다. 그리고 다양한 초기조건을 설정하여 사거리 최대화를 위한 최적화 결과를 최적화 변수와 역학적 에너지 소모 관점에서 분석 및 고찰한 뒤, 마지막으로 결론을 기술한다.

2. 지능화 탄약의 운동방정식 및 공력 모델링

2.1. 운동방정식

이 절에서는 수직축 2자유도 운동 모델로 가정한 지능화 탄약의 상태를 지배하는 운동방정식을 정의한다. 지능화 탄약은 운용 개념 상 포발사 후 일정 조건에 이르면 조종날개를 전개하여 유도비행하는 상태전이모델이기 때문에, 운동방정식을 다음과 같이 두 단계로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{D_1}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= -\frac{g}{v} \cos \gamma \\ \dot{r} &= v \cos \gamma \\ \dot{h} &= v \sin \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{D_2}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{L}{mv} - \frac{g}{v} \cos \gamma \\ \dot{r} &= v \cos \gamma \\ \dot{h} &= v \sin \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 D_1 [N], D_2 [N], L [N]은 각각 항력과 양력, m [kg]은 탄의 비행 중 질량, g [m/s²]는 중력가속도, v [m/s]는 비행속도, γ [rad]는 비행경로각, r [m], h [m]는 각각 비행 사거리와 고도이다. 조종날개 전개 전에는 운동방정식 (1)에 따라 항력 D_1 과 중력에 영향을 받아 상태를 변화시키며 비행한 후, 조종날개를 전개 및 구동하면 운동방정식 (2)에 따라 항력 D_2 와 양력 L 이 운동방정식의 입력으로서 작용하여 유도명령을 적용하여 비행하는 시스템이다.

2.2. 공력 모델링

(1), (2)와 같이 표현된 운동방정식의 입력에 해당하는 D_1 , D_2 , L 의 공력 모델은 다음과 같다. 단, 탄의 형상이 횡단면을 기준으로 대칭인 점을 고려하여 다음과 같이 모델링하였다.

$$\begin{aligned} D_1 &= \rho v^2 S C_{D_0} / 2, \\ D_2 &= \rho v^2 S (C_{D_0} + K_D C_L^2) / 2, \\ L &= \rho v^2 S C_L / 2, \\ \rho &= \rho_0 e^{K_\rho h} \end{aligned} \quad (3)$$

이때, S 는 공력환산계수, ρ 는 공기밀도로서 고도 h 에 의존하는 함수이며, ρ_0 와 K_ρ 는 대기권의 고도 구간에 의존하는 상수이다. 이후 사거리 최대화 최적유도를 수행함에 있어서, 지능화 탄약의 유도비행 시에는 트림점(trim) 부근에서 비행하는 것을 가정하기 때문에 비행 상태에 따라 비행기의 수직축 유도명령을 제한할 필요가 있다. 이때, 다음 장에서 후술하는 최적화문제에서 유도명령 제한 구속조건을 구성할 때 상태변수를 포함하지 않는 단순한 형태를 취하기 위해서는 수직축 유도명령, 즉 운동방정식의 입력(u_L)을 양력 계수(C_L)로 정하는 것이 유용하다. 이러한 모델링을 통해 $C_L = u_L$ 이 운동방정식 (2)에 작용하는 유일한 입력변수라는 것을 알 수 있으며, 이 양력계수 명령이 이 연구에서 최적화할 변수에 해당한다.

C_{D_0} , C_{D_0} 는 공기의 물리적 성질을 고려했을 때 마하수에 의존하는 함수이며, 이 연구에 사용된 C_{D_0} , C_{D_0} 의 공력 데이터는 그림 1의 ○와 △가 나타내는 것과 같다. 고속 비행체의 항력 모델링에 관한 Bridges의 연구에 따르면, C_{D_0} 와 같이 마하 1을 경계선으로 step 함수와 유사한 형태로 변화하는 항력을 다음과 같이 모델링할 수 있다[15].

$$C_{D_0}(M) = a_{20} + b_{20} \tanh [c_{20}(M - d_{20})] \quad (4)$$

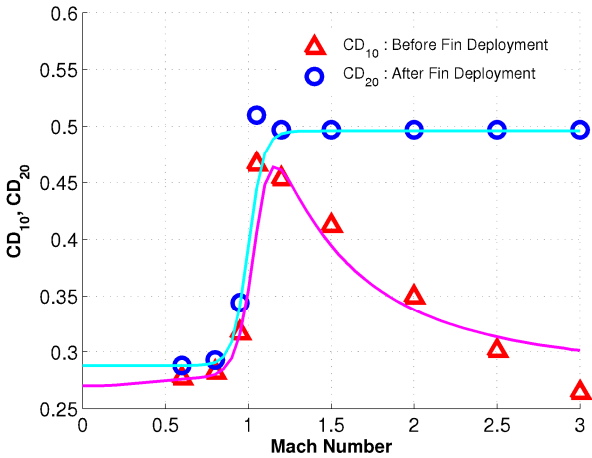


그림 1 항력계수 $C_{D_{10}}$, $C_{D_{20}}$ 의 모델링

Fig. 1 Modeling of the drag coefficient $C_{D_{10}}$, $C_{D_{20}}$

단, M 은 마하수, $a_{20}, b_{20}, c_{20}, d_{20}$ 는 $C_{D_{20}}$ 의 항력 모델링 계수이다. 또한, $C_{D_{20}}$ 는 마하 1을 기점으로 항력계수의 값이 상승한 후 마하수가 증가함에 따라 점차적으로 감소하는 형태로, Bridges의 연구결과를 참고하여 다음과 같이 모델링하였다.

$$C_{D_{20}}(M) = \frac{a_{10} + b_{10} \tanh[c_{10}(M - d_{10})]}{1 + e_{10} M^{n_{10}}} + f_{10} \quad (5)$$

이때, $a_{10}, b_{10}, c_{10}, d_{10}, f_{10}, e_{10}, n_{10}$ 은 $C_{D_{10}}$ 항력 모델링 계수이다. $C_{D_{10}}, C_{D_{20}}$ 와 마찬가지로 K_D 또한 공력의 성질을 엄밀하게 고려한다면 마하수에 관한 함수로 표현되어야 하지만, $C_{D_{20}} + K_D C_L^2$ 에 관한 공력 데이터를 분석한 결과, 트림점이 존재하는 범위 내에서는 상수로 지정하여도 이 연구의 목적을 저해하지 않는 수준으로 공력 데이터를 모사할 수 있다고 판단하여, 마하수에 무관한 상수로 정의하였다.

운동방정식에서 마하수 M 은 속도 v 와 고도 h 의 함수로서, 음속 $a(h)$ 의 모델링을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M(v, h) = \frac{v}{a(h)} \quad (6)$$

$$a(h) = \sqrt{\gamma_a R_a T_a}$$

$$\text{단, } T_a = \begin{cases} T_0 + \lambda h, & \text{when } h \leq 11000 \\ T_0 + 11000\lambda, & \text{when } h > 11000 \end{cases}$$

마지막으로 운동방정식의 상태변수 x 를 $x = [v, \gamma, r, h]^T$ 로 정의하고 양력계수 C_L 을 운동방정식에 대한 입력 u_L 로 표현하면, 공력 모델링 (3)을 이용하여 탄의 운동방정식 (1), (2)를 각각 다음과 같이 다시 기술할 수 있다.

$$\dot{x} = f_1 = \begin{bmatrix} -K_a e^{K_h} v^2 C_{D_{10}} / m - g \sin \gamma \\ -g \cos \gamma / v \\ v \cos \gamma \\ v \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\dot{x} = f_2 = \begin{bmatrix} -K_a e^{K_h} v^2 (C_{D_{20}} + K_D u_L^2) / m - g \sin \gamma \\ K_a e^{K_h} v u_L / m - g \cos \gamma / v \\ v \cos \gamma \\ v \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{단, } K_a = \frac{1}{2} \rho_0 S$$

3. 사거리 최대화를 위한 최적 유도 기법

사거리 최대화와 같은 최적화 문제의 해법은 크게 나누어 직접법(Direct method)과 간접법(Indirect method)의 두 가지 방식으로 연구되어 왔다. 직접법은 상태변수와 제어변수를 매개변수로 이산화하여 최적화 문제를 비선형 프로그램(Non-Linear Programming) 문제로 변환하는 접근 방식으로, 구속조건을 다루기 용이한 구조이기 때문에 넓은 범위의 최적화 문제에 적용되어 왔다. 한편, 간접법을 이용한 최적화 문제의 해법은 기본적으로 폰트랴긴의 최대값 원칙(Pontryagin's Maximum Principle)에 의거하여 해밀터니안 경계치 문제(Hamiltonian Boundary Value Problem)를 푸는 것으로 귀결되며, 해의 정확도가 높으며 1차 미분의 필요조건만 만족하면 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 단, 최적화 변수의 초기값이 최적해와 너무 다르게 설정될 경우 최적화 알고리즘이 발산하기 쉽다는 것이 간접법의 단점이다. 그러나 이 연구에서 해결하고자 하는 문제의 최적화 변수는 양력계수, 조종날개 전개시각, 탄착시각이며 양력계수의 초기값은 트림점의 제한값 부근으로, 조종날개 전개 시각의 초기값은 탄도 정점 부근 도달 시각으로 각각 부여하는 것으로 위에서 언급한 간접법의 단점을 극복할 수 있다. 따라서 이 연구에서는 간접법을 근간으로 한 최적 유도 기법을 사용하여 사거리 최대화를 위한 최적화 문제를 해결하였다.

3.1. 최적화 문제의 정의

2장에 기술한 것과 같이 지능화 탄약의 운동방정식은 2가지로 표현되며, 이는 사거리 최적화를 수행하기 위해 다점 경계치문제(Multi-Point Boundary Value Problem)를 풀어야 한다는 것을 의미한다. 그러나 식 (7)과 같이 조종날개 전개 전의 운동방정식 f_1 은 입력 u_L 에 의존하지 않기 때문에, 온전히 초기 상태변수와 시간의 함수(단, 시간에 대해 non-explicit)이다. 따라서 조종날개 전개 직전과 직후의 상태변수에 대하여 최적화 문제의 경계조건을 조종날개 전개시각 t_i 에 대하여 정의하면, 조종날개 전개 후의 운동방정식 f_2 의 관점으로 최적화 문제를 다음과 같은 Mayer 형태로 기술할 수 있다.

목적함수: $J = \phi(x_f) = -r_{t=t_f}$
구속조건: $\dot{x} = f_2(x, u_L)$ (9)
경계조건: $\chi(x_i) = x_{i=t_i} - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t_i} f_1 dt\right) = 0,$
 $\psi(x_f) = h_{t=t_f} = 0$

여기서, $t_0=0$ 은 포발사 시각이며, t_i 는 조종날개의 전개시각, t_f 는 탄착시각으로 t_i, t_f 는 u_L 과 같은 최적화 변수에 해당한다. 이 문제에서는, 시각 t_i 에서의 경계조건으로서 f_1 에 관한 시간의 함수로 부가함으로써 다점 경계치 문제를 2점 경계치문제로 간주할 수 있다는 점에 주목하자. 그런데 입력변수 u_L 에 공력학적인 한계를 고려하여 부등식 구속조건 $|u_L| \leq u_{Lmax}$ 을 부가해야 한다. 이러한 경우, 폰트라긴의 최대값 원칙의 접근방식을 사용할 수도 있으나, 부등식 구속조건을 u_L 에 대한 새로운 입력 u_d 를 정의하여 다음과 같은 등식 구속조건으로 변환하는 방법을 사용할 경우 u_L 값에 따른 경우의 수를 고려하지 않아도 되며, 최적화 프로그래밍의 범용성을 높일 수 있다[16].

$$C(u) = u_L - u_{Lmax}(1 + \sin u_d)/2 = 0 \quad (10)$$

이때, $u = [u_L, u_d]^T$ 로 정의하였고, u_{Lmax} 는 조종날개 전개 시 탄약의 속도를 고려하였을 때 마하수 $M(v, h)$ 에 무관한 상수로 결정하였다. 따라서 운동방정식의 입력에 대한 구속조건 (10)은 상태변수와 무관계한 오로지 입력 u 만의 함수이다.

결론적으로 목적함수 J 에 대하여 입력에 대한 구속조건 $C(u)$, 경계조건 $\chi(x_i), \psi(x_f)$, 그리고 운동방정식 $\dot{x} = f_2$ 를 병합하여 수정된 목적함수 \bar{J} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{J} = \phi + \nu^T \psi + \eta^T \chi + \int_{t_i}^{t_f} H - \lambda^T \dot{x} dt \quad (11)$$

단, $H = \lambda^T f_2 + \mu^T C$

여기서 ν, η, μ, λ 는 라그랑주 미정계수이며, ν 는 스칼라 상수, η 는 (4x1)차원 벡터 상수, μ, λ 는 시간에 대한 (4x1)차원 벡터 상수이다.

3.2. 사거리 최대화 문제의 수치적 해법

(8)과 같이 표현된 지능화 탄약의 운동방정식은 비선형 시스템이기 때문에 (9)로 표현된 최적화 문제의 해를 해석적으로 구하기가 어려우므로, 이 연구에서는 수치적 해법을 이용하여 최적화를 수행한다. 수치 알고리즘으로서, 최적해까지의 수렴속도는 빠르지 않으나 수학적으로 적용이 용이한 steepest descent법을 적용하였다[17].

(11)과 같이 정의된 수정된 목적함수에 대하여, 각 변수들의 미소변화량에 대한 \bar{J} 의 미소변화량은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta \bar{J} = & \left(\eta^T \frac{\partial \chi}{\partial x} + \lambda^T \right)_{t=t_i} dx(t_i) + \left(\eta^T \frac{\partial \chi}{\partial t} - H \right)_{t=t_i} \delta t_i \\ & + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x} - \lambda^T \right)_{t=t_f} dx(t_f) \\ & + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \right)_{t=t_f} \delta t_f \\ & + \int_{t_i}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \end{aligned} \quad (12)$$

단, 위 식에서 ν, η, μ, λ 와 같은 라그랑주 미정계수의 미소변화량의 계수는 과 동일하기 때문에 생략하였다. \bar{J} 가 최소점이 되는 필요조건은 (12)의 미소변화량의 계수가 0이 되는 것이므로, 최적화를 위한 해석적 필요조건은 경계조건 및 구속조건 (9), (10)을 포함하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda &= - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T, \quad \dot{x} = f_2(x, u_L), \quad (13) \\ C(u) &= 0, \quad \chi(x_i) = 0, \quad \psi(x_f) = 0, \\ \lambda_{t_i}^T &= \left[-\eta^T \frac{\partial \chi}{\partial x} \right]_{t_i}, \quad \lambda_{t_f}^T = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{t_f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \quad \left[-H + \eta^T \frac{\partial \chi}{\partial t} \right]_{t_i} = 0, \quad (14) \\ \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \end{aligned}$$

그런데 수치적으로 문제를 풀 경우, 최적화하여야 할 변수는 u, t_i, t_f 이므로 (14)의 좌변은 \bar{J} 를 최소화하는 u, t_i, t_f 에 대한 steepest ascent에 해당한다. 따라서 (12)를 만족시키기 위하여 (14)를 $\delta u, \delta t_i, \delta t_f$ 를 다음과 같이 정의하여 대체한다.

$$\begin{aligned} \delta u &= -\alpha_u \frac{\partial H}{\partial u}, \quad (15) \\ \delta t_i &= -\alpha_{t_i} \left[-H + \eta^T \frac{\partial \chi}{\partial t} \right]_{t_i}, \\ \delta t_f &= -\alpha_{t_f} \left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_{t_f} \end{aligned}$$

단, $\alpha_u, \alpha_{t_i}, \alpha_{t_f}$ 는 충분히 작은 상수이다. (15)와 같이 u, t_i, t_f 의 값이 변동하였을 때 \bar{J} 의 값이 가장 급격하게 감소하는 방향의 기울기를 $\delta u, \delta t_i, \delta t_f$ 에 대입함으로써 극소점(해)을 찾을 수 있다. 다음으로 라그랑주 미정계수를 구하기 위하여 u, t_i, t_f 에 대한 구속조건 및 경계조건 미소변화량에 대한 식을 표현하면 다음과 같다.

$$dC = \frac{\partial C}{\partial u} \delta u, \quad d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f, \quad d\chi = \left(\frac{d\chi}{dt} \right)_{t_i} \delta t_i \quad (16)$$

(15)를 (16)에 대입한 후 (13)과 연계하면 라그랑주 미정계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{\nu_1} \nu + \lambda_{\nu_2}, \\ \mu &= \mu_{\nu_1} \nu + \mu_{\nu_2}, \\ \nu &= \frac{-\frac{d\psi}{dt} - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t_f} [\lambda_{\nu_1} f_2 + \mu_{\nu_2} C]_{t_f}}{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t_f} [\lambda_{\nu_2} f_2 + \mu_{\nu_1} C]_{t_f}}, \\ \eta &= -\lambda_{t_i} \end{aligned} \quad (17)$$

단, $\lambda_{\nu_1} = \Phi_\lambda [0, 0, 0, 1]^T$, $\lambda_{\nu_2} = \Phi_\lambda [0, 0, -1, 0]^T$, $\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(t^-, t_f)$ 는 역시간 t^- 에 대한 λ 의 천이행렬(transition matrix),

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_1} &= -\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda_{\nu_1} \nu}{\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^T}, \\ \mu_{\nu_2} &= \frac{-\frac{dC}{dt} - \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda_{\nu_2}}{\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^T} \end{aligned}$$

여기까지 정의한 수식을 이용하여 최적화 해를 구하는 알고리즘은 다음과 같으며, 이를 그림 2와 같은 순서도로 도식화하였다.

- (a) 적당한 입력 u , t_i , t_f 를 정한다.
- (b) 운동방정식 $\dot{x} = f_2$ 로 시간방향으로 상태량을 구한 뒤, (13)을 이용하여 역시간 방향으로 λ 의 천이행렬 Φ_λ 를 구한다.
- (c) 라그랑주 미정계수 ν , μ , λ , η 를 차례대로 계산한다.
- (d) (15)에 의하여 α_u , α_{t_i} , α_{t_f} 를 변화시키며 $u \leftarrow u + \delta u$, $t_i \leftarrow t_i + \delta t_i$, $t_f \leftarrow t_f + \delta t_f$ 와 같이 갱신하여 (9)의 J 를 최소로 하는 u^* , t_i^* , t_f^* 를 찾는다(직선탐색).
- (e) 충분히 작은 크기의 ϵ_J 에 대하여 $|dJ| < \epsilon_J$, $\psi(x_f) = 0$ 의 조건을 동시에 만족하면 알고리즘을 종료하고, 만족하지 못하면 $u \leftarrow u^*$, $t_i \leftarrow t_i^*$, $t_f \leftarrow t_f^*$ 와 같이 갱신하고 (b)로 돌아가서 알고리즘을 반복한다.

4. 최적화 결과 및 고찰

3장에서 설명한 바와 같은 수치적 최적화 유도기법을 이용하여 지능화 탄약 사거리 최대화 문제의 해를 산출하였다. 수치해석의 적분 간격은 $dt = 0.005$ [sec]로 설정했으며, 고도에 따라 변화하는 공기 밀도 $\rho = \rho_0 e^{K_h}$ 는 Zhang의 연구와 같은 방식으로 1976 US Standard atmosphere를 다음 식과 같이 근사하여 사용하였다[7].

$$\rho = \begin{cases} 1.232e^{-0.1024h} & \text{when } h \leq 6000 \\ 1.374e^{-0.1207h} & \text{when } 6000 < h \leq 11000 \\ 2.059e^{-0.1572h} & \text{when } h > 11000 \end{cases} \quad (18)$$

4.1. 조종날개 전개시각 최적화의 효과

그림 3~그림 6에 나타난 4개의 비행궤적의 초기조건은 $v_0 = 750$ [m/s], $\gamma_0 = 45$ [deg], $r_0 = 0$ [m], $h_0 = 0$ [m]으로 동일하며, 다음 네 가지 경우의 비행조건을 가정하였다.

1. 발사 시부터 탄착 시까지 조종날개를 전개하지 않음
2. 조종날개를 발사 후 10[sec]에 전개하여 최적 유도비행 (조종날개 전개시점 최적화 미수행)
3. 조종날개를 발사 후 19.66[sec]에 전개, 최적 유도비행 (조종날개 전개시점 최적화)

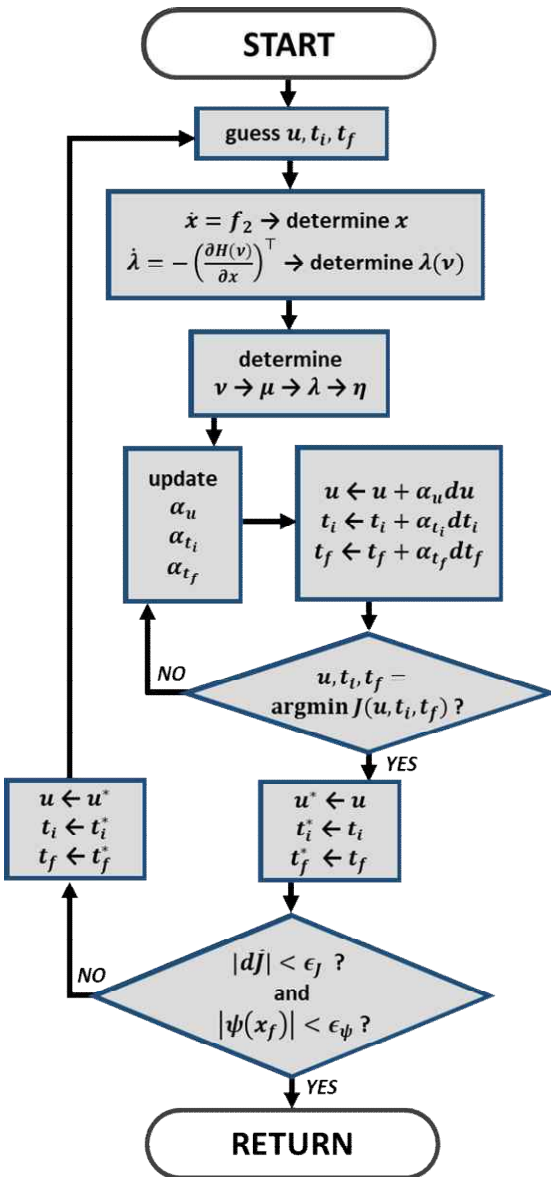


그림 2 최적화 알고리즘의 순서도
Fig. 2 The flow chart of the optimization algorithm

4. 조종날개를 발사 후 35[sec]에 전개, 최적 유도비행
(조종날개 전개시점 최적화 미수행)

조종날개 전개시각이 19.66[sec]인 경우는 유도명령 u_L 와 함께 조종날개 전개시각 t_f 를 최적화 변수로 하여 사거리 최대화를

수행한 결과이며, 다른 두 경우는 유도명령 u_L 만을 최적화한 결과이다. 조종날개를 전개한 세 경우는 조종날개를 전개하지 않은 경우에 비교하여 모두 약 200%의 사거리를 비행하였으며, 그 중에서도 조종날개 전개시각 최적화를 수행한 경우가 가장 긴 사거리를 비행하였다. 전개시각 10[sec]의 경우, 그림 4, 그림 5(a)에

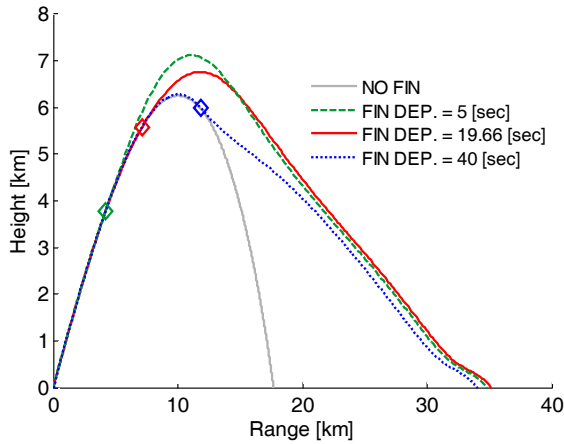


그림 3 사거리/고도 (조종날개 전개시각 최적화와 고정 전개시각 비교) ◇: 조종날개 전개시점

Fig. 3 Height / Range (fin deployment timing optimization and non-optimization) ◇: fin deployment timing

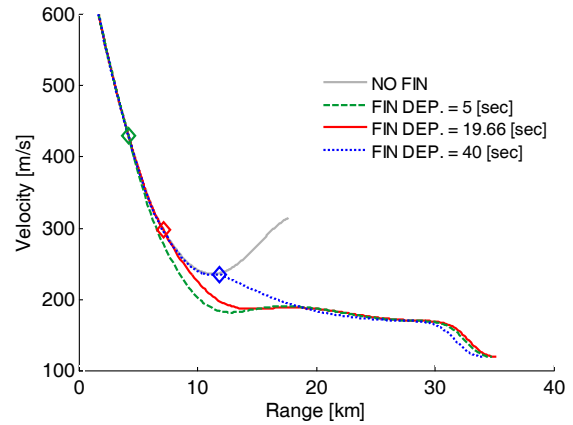


그림 4 사거리 / 속도(조종날개 전개시각 최적화와 고정 전개시각 비교) ◇: 조종날개 전개시점

Fig. 4 Velocity / Range (fin deployment timing optimization and non-optimization) ◇: fin deployment timing

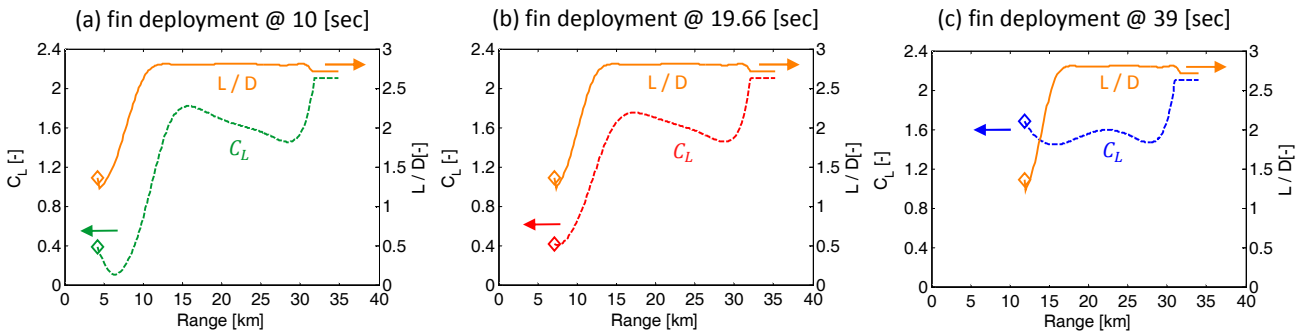


그림 5 양항비 / 사거리와 C_L / 사거리 비교 (조종날개 전개시각 최적화와 고정 전개시각 비교), ◇: 조종날개 전개시점

Fig. 5 Lift-Drage ratio with C_L / Range (fin deployment timing optimization and non-optimization), ◇: fin deployment timing

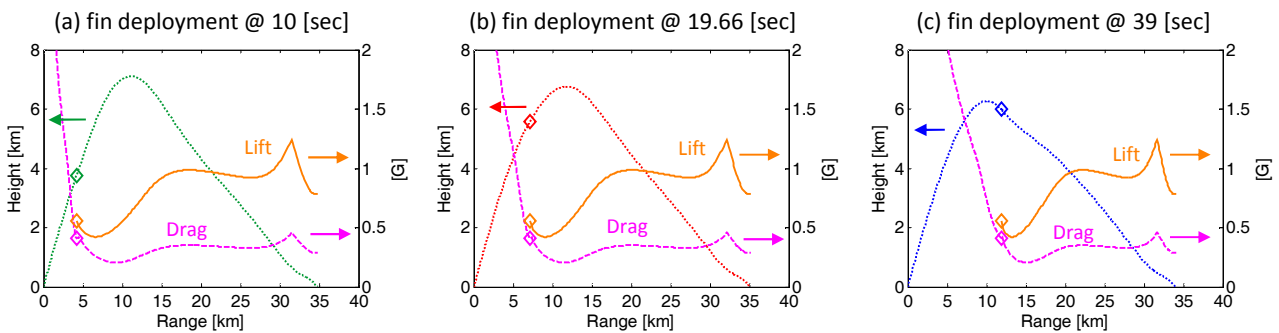


그림 6 양력, 항력 / 사거리와 고도 / 사거리 비교 (조종날개 전개시각 최적화와 고정 전개시각 비교), ◇: 조종날개 전개시점

Fig. 6 Lift, Drag with Height / Range (fin deployment timing optimization and non-optimization), ◇: fin deployment timing

서 확인할 수 있듯이 조종날개를 일찍 전개하여 확보한 속도를 이용하여 큰 양력을 받아 다른 두 경우에 비하여 높은 고도까지 비행한 반면 속도가 빠르게 줄었으며, 전개시간 35[sec]의 경우 낮은 조종날개 전개가 고도 확보 실패로 이어져 조종날개를 전개한 경우 중 가장 짧은 사거리를 비행하였다. 그림 6에서 조종날개 전개 직후의 유도명령 u_f 은 세 경우에 각각 다른 양상을 보이지만, 비행궤적, 양력과 항력 프로파일은 정점 이후 세 경우가 거의 유사한 궤적을 보인다.

표 1을 보면, 발사 고각을 60[deg], 75[deg]로 설정한 경우의 최적화를 수행한 경우에도 비슷한 경향의 결과를 얻었다는 것을 알 수가 있다. 이 경우에도 조종날개 전개시점 최적화를 수행한 경우가 그렇지 않은 경우보다 긴 사거리를 비행하였으므로, 보다 긴 사거리를 비행하기 위해서는 무조건 고도가 높은 탄도 정점 부근에서 조종날개를 전개하기보다, 적절한 시각에 조종날개를 전개해야 한다는 결론을 내릴 수 있다.

또한, 표 1의 최적화 결과는 조종날개 전개시각 최적화를 한 경우가 가장 효율적인 비행을 했다는 것을 알려준다. 표 1이 제시하는 최적화 결과의 초기조건은 모든 경우에 대하여 포구속도 750 [m/s]로 같기 때문에 다음과 같이 정의되는 역학적 에너지 E_m 이 동일하다.

$$E_m = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \tag{19}$$

그러나 조종날개 전개시각을 최적화한 경우와 그렇지 않은 경우는 탄착 시($h=0$ [m])의 비행속도가 다르며, 이것은 최종적인 E_m 이 서로 다르다는 것과 동일한 의미이다. 다른 식으로 표현하면, 발사 시의 역학적 에너지 E_{m0} 와 탄착 시의 역학적 에너지 E_{mf} 를 정의했을 때, 비행 전체에서 소비된 역학적 에너지 $\Delta E_m = E_{m0} - E_{mf}$ 가 세 경우에 대해 모두 다르다. 한편, 이동체의 이동 효율을 나타내는 무차원 지표인 Cost of Transport(이하 CoT로 표기)는 위에서 정의된 변수를 이용하여 다음과 같이 정의된다[18].

$$CoT = \frac{\Delta E_m}{mgr_f} \tag{20}$$

따라서, 최종 CoT가 낮은 비행(이동)을 했을 때 그 물체는 효율적인 비행을 한 것을 의미한다. 이를 고려했을 때 표 1의 결과가 보여주듯이, 조종날개 전개시각 최적화를 수행했을 때가 CoT가 가장 낮아 효율적으로 비행했다고 할 수 있다. 이 경향은 다

표 1 포구속도 750 [m/s] 최적화 결과 (조종날개 전개시각 최적화와 고정 전개시각 비교)

Table 1 Optimization results with initial velocity 750 [m/s] (fin deployment timing optimization and non-optimization)

항목	발사고각 (포구속도 750 [m/s])								
	45 [deg]			60 [deg]			75 [deg]		
t_i [sec]	10	19.66	39	13	33.02	53	23	42.63	63
t_{TOTAL} [sec]	183.90	182.04	170.31	208.97	209.86	199.68	220.75	220.76	212.02
r_f [m]	34.81	35.15	34.04	37.02	37.43	36.13	33.52	33.70	32.62
v_f [m/s]	119.37	119.52	119.94	119.03	119.32	119.74	118.98	119.28	119.70
ΔE_m [kJ]	12365.22	12364.97	12362.74	12367.61	12366.08	12363.82	12367.86	12366.28	12364.01
CoT [-]	0.803	0.795	0.821	0.755	0.747	0.774	0.834	0.829	0.873

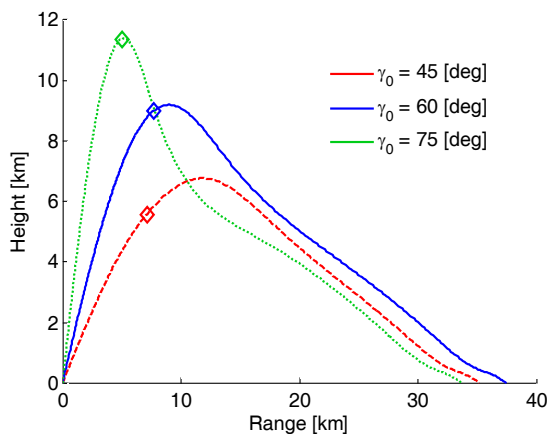


그림 7 고도 / 사거리 (발사 고각이 다른 경우)

◇: 조종날개 전개시점, γ_0 : 발사 고각

Fig. 7 Height / Range (various launch angle)

◇: fin deployment timing, γ_0 : launch angle

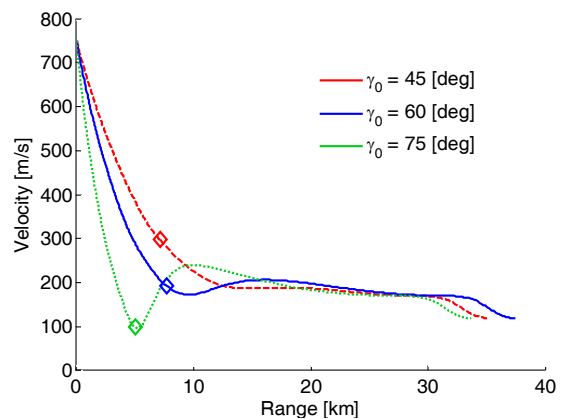


그림 8 속도 / 사거리 (발사 고각이 다른 경우)

◇: 조종날개 전개시점, γ_0 : 발사 고각

Fig. 8 Velocity / Range (various launch angle)

◇: fin deployment timing, γ_0 : launch angle

른 고각에서 발사한 경우에도 비슷하며, 발사 고각이 75[deg]인 경우가 대개 소비된 역학적 에너지 ΔE_m 는 적은데도 불구하고 비행한 사거리가 짧기 때문에 CoT는 높은 것을 알 수 있다. 최적화 문제에서 역학적 에너지는 최적화 변수로 고려하지 않았음에도 불구하고 이러한 결과를 얻은 사실로부터 미루어 보았을 때, 가능한 한 역학적 에너지를 소비하지 않으면서 효율적으로 비행하는 것이 지능화 탄약의 사거리 최대화로 이어지는 전략이라는 것을 알 수 있다.

4.2. 발사 고각에 따른 최적화 결과

그림 7~그림 14에 나타난 비행궤적의 초기조건은 3개의 상태 변수 $v_0=750$ [m/s], $r_0=0$ [m], $h_0=0$ [m] 에 대해서는 동일하나, 각 발사 고각이 각각 $\gamma_0 = 45$ [deg], 60[deg], 75[deg]로 다른 경우에 대하여 u_L 최적화 및 조종날개 전개시각 최적화를 수행한 결과이다. 직관적인 관점에서 최대사거리 획득을 위한 조종날개 전개시각은 탄도 비행으로부터 이어지는 고도 확보를 위하여 정점 부근이라고 생각할 수 있으나, 이 결과는 그에 반하여, 심지어는 발사고각 45[deg]로 사격한 저고도에서도 조종날개 전개시점이 상당히 정점 이전에 위치한 것을 알 수 있다. 그림 9를 보면, 발사고각이 낮을 때는 조종날개를 일찍 전개함으로써 고도의 손실을 감수하며 일찍 양력을 얻어 사거리를 증가시키는 것이 총 사거리 상으로 더 큰 이득을 볼 수 있기 때문이라고 사료된다. 반면, 발사고각이 클 때는 조종날개 전개로 인한 항력 증가가 큰 사거리 대비 고도 손실을 야기하기 때문에, 조종날개를 전개하지

않은 형상으로 정점 부근에 이른 후 조종날개를 전개하는 것이 최적의 비행 시나리오라는 결론을 얻을 수 있다. 이것은 다른 포구속도에서 탄약을 발사했을 경우에도 동일하게 찾아볼 수 있는 경향으로, 표 2의 결과를 보면 모든 포구속도의 경우에 발사고각이 증가할수록 최적 조종날개 전개시각이 정점 이전에서 정점 부근으로 이동하는 것을 알 수 있다. 단, t_{APEX} 는 각 경우의 사거리 최대와 비행에서 정점고도를 획득했을 때의 시간이다.

또한, 4.1절의 경우와 마찬가지로, 그림 9, 그림 10을 보면, 발사고각과 조종날개 전개시각이 다르기 때문에 초기 양력 및 항력 프로파일과 전체 궤적에서 u_L 의 양상은 다르지만 비행궤적이 안정된 이후의 양력 및 항력 프로파일, 양항비 프로파일이 세 경우가 모두 비슷한 수준인 것을 알 수 있다.

한편, 발사부터 탄착까지 사거리에 대한 역학적 에너지 순간 소비량 $\frac{dE_m}{dr}$ 는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\frac{dE_m(t)}{dr(t)} = \frac{d}{dt} \left(mgh + \frac{1}{2}mv^2 \right) \frac{dt}{dr(t)} = \frac{mgh + mvv}{r} \quad (20)$$

식 (20)은 E_m 순간소비량이 사거리에 대한 순간 이동효율(순간 CoT)이라는 것을 의미하고 있다. 그림 11은 이와 같이 정의된 E_m 순간소비량과 비행 시 양항비를 비교하여 보여주는데, 사거리에 따른 양항비의 추이가 E_m 순간소비량과 밀접한 관계를 갖고 있음을 알 수 있다. 조종날개 전개 직후에는 양항비가 높아짐에 따라 E_m 순간소비량도 늘어나지만, 이내 양항비가 안정된

표 2 최적화된 조종날개 전개시각 t_i 와 정점 시각 t_{APEX} , 정점까지의 시간차 $\Delta t = t_{APEX} - t_i$ (발사 조건이 다른 경우)

Table 2 Optimized fin deployment timing t_i with time at the apex t_{APEX} and the time difference $\Delta t = t_{APEX} - t_i$ (various launch condition)

포구속도	발사고각								
	45 [deg]			60 [deg]			75 [deg]		
	t_i [sec]	t_{APEX} [sec]	Δt [sec]	t_i [sec]	t_{APEX} [sec]	Δt [sec]	t_i [sec]	t_{APEX} [sec]	Δt [sec]
600 [m/s]	15.35	35.21	19.86	29.06	35.30	6.24	37.19	38.57	1.38
750 [m/s]	19.66	39.96	20.30	33.02	40.10	7.07	42.63	44.41	1.78
900 [m/s]	24.12	44.18	20.06	37.08	45.66	8.58	48.22	50.37	2.16

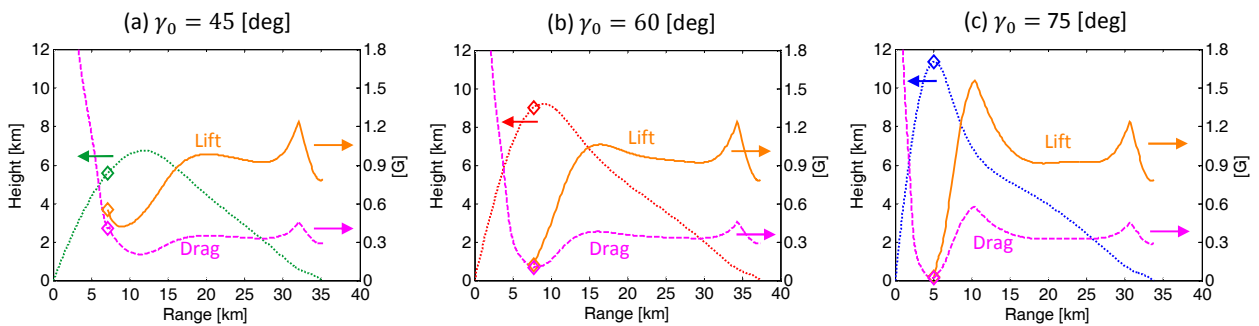


그림 9 양항비 / 사거리와 C_L / 사거리 비교 (발사 고각이 다른 경우), \diamond : 조종날개 전개시점

Fig. 9 Lift-Drage ratio with C_L / Range (various launch angle), \diamond : fin deployment timing

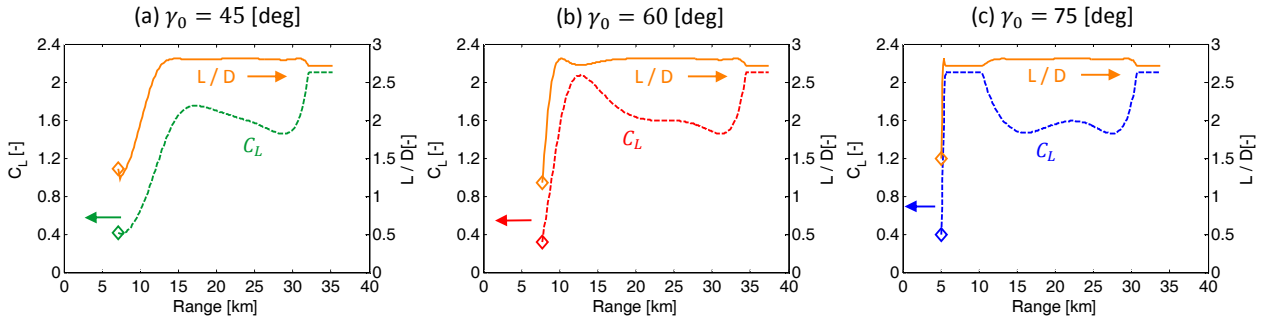


그림 10 양항비 / 사거리와 C_L / 사거리 비교 (발사 고각이 다른 경우), \diamond : 조종날개 전개시점
 Fig. 10 Lift-Drag ratio with C_L / Range (various launch angle), \diamond : fin deployment timing

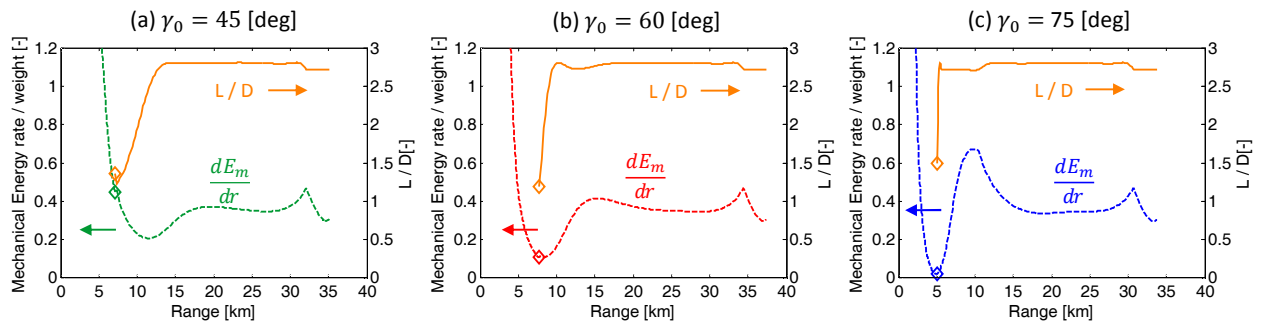


그림 11 양항비 / 사거리와 dE_m/dr / 사거리 비교 (발사 고각이 다른 경우), \diamond : 조종날개 전개시점
 Fig. 11 Lift-Drag ratio with dE_m/dr / Range (various launch angle), \diamond : fin deployment timing

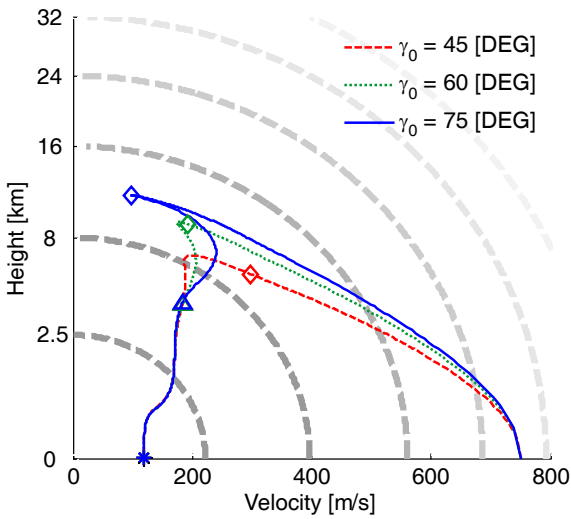


그림 12 역학적 에너지 등고선(점선)과 지능화 탄약의 역학적 에너지 E_m 궤적 (발사 고각이 다른 경우) \diamond : 조종날개 전개시점, \triangle : E_m 수렴 시점, γ_0 : 발사 고각
 Fig. 12 Mechanical energy E_m of the projectile with mechanical energy contour (dashed line) (various launch angle), \diamond : fin deployment timing, \triangle : E_m convergence point, γ_0 : launch angle

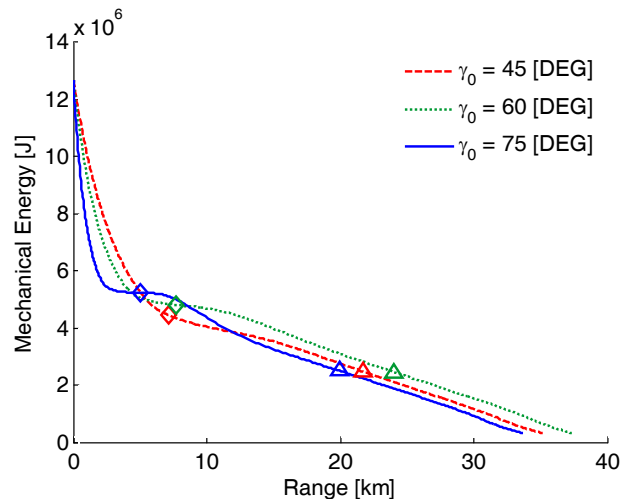


그림 13 역학적 에너지 E_m / 사거리 (발사 고각이 다른 경우), \diamond : 조종날개 전개시점, \triangle : E_m 수렴 시점, γ_0 : 발사 고각
 Fig. 13 Mechanical energy E_m / Range (various launch angle), \diamond : fin deployment timing, \triangle : E_m convergence point, γ_0 : launch angle

비행구간에 들어서면서는 서로 반비례의 관계가 되어, 입력 u_L 이 u_{Lmax} 에 포화되어 양항비가 감소하는 순간에는 E_m 순간소비량이 잠시 높아지다가, 이내 안정된 양항비를 되찾으면 다시 E_m 순간소비량도 안정하는 것을 알 수 있다. 따라서 비행 구간에 따라 사거리 최적화를 위하여 역학적 에너지를 소비하는 양상이 다르며, 활공비행 시에는 양항비를 높게 유지하도록 역학적 에너지를 소비하는 것이 사거리 최대화를 위한 전략이라고 판단된다.

흥미로운 점은, 그림 12~그림 13에서 알 수 있듯이 세 경우가 모두 발사 고각이 다름에도 불구하고, 역학적 에너지 E_m 가 탄착 지점에 이룰수록 비슷한 경로로 수렴하여, 탄착 시에 도달한 최종 역학적 에너지 E_{mf} 의 값이 동일하다는 것이다. 이 경향은 모든 포구속도에 대하여 동일하게 관찰되는 경향인데, 표 3에 따르면 발사 고각이 다름에도 불구하고 발사 시 역학적 에너지, 탄착 시 역학적 에너지, 따라서 소비된 역학적 에너지가 모두 동일한 수준이다. 단, 그림 14와 같이 CoT 관점에서 보았을 때는 발사 고각 60[deg]인 경우가 제일 효율적인 비행을 하였는데, 이는 고각 60[deg]에서 최대사거리 값이 가장 크기 때문이다. 또한, 표 3에 따르면 같은 고각에서 다른 포구속도로 발사했을 경우에 탄착 시의 역학적 에너지는 같은 수준인데, 포구속도가 빠를수록

비행에서 소비되는 역학적 에너지의 총량이 사거리에 비하여 커지기 때문에, 비행 효율이 떨어진다는 것을 그림 14에서 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 조종날개 전개시각을 최적화 변수로 포함한 지능화 탄약의 사거리 최대화를 수행한 방법과 그 결과를 제시 및 분석하였다. 조종날개 전개시각을 경계조건으로 부가함으로써 다구간 최적화 문제를 2점 경계치 문제로 변환하여 최적화를 수행하였으며, 발사 조건 및 비행 상태에 따라 수직축 유도명령 u_L , 조종날개 전개시각 t_f 를 최적화하는 유도기법을 적용하여 지능화 탄약의 비행 사거리를 최대화할 수 있음을 확인하였다. 또한, 그렇게 획득된 최대사거리는 발사고각 γ_0 , 포구속도 v_0 와 밀접한 상관관계가 있음을 역학적 에너지 관점에서 증명하였다.

같은 고각으로 탄약을 발사하더라도, 보다 긴 사거리를 비행하려면 조종날개 전개시각을 최적화 변수로서 고려해야 하며, 그리 하였을 때 이동효율의 지표인 CoT도 감소하여 역학적 에너지 관점에서 효율적인 유도비행을 할 수 있었다.

조종날개 전개시각은 발사고각이 낮을수록 정점 이전에 전개하는 것이 사거리 최대화를 위한 전략이라는 것을 알 수 있었으며, 발사고각이 다른 경우에도, 포구속도가 동일하면 역학적 에너지 또한 동일하므로, 최적 유도비행을 통해 모든 경우가 같은 역학적 에너지 준위에 수렴한다는 것을 알 수 있었다. 그러나 사거리 최대화를 위해서는 발사고각마다 역학적 에너지 소비전략을 다르게 적용해야 하며, 활공비행 시에는 높은 양항비를 유지하도록 에너지를 소비해야 한다는 결과를 얻었다.

포구속도가 같지만 발사고각이 다른 경우, 총 역학적 에너지 소비량이 동일해도 최종적으로 획득된 최대사거리는 다르기 때문에 CoT의 값은 각 발사고각에 따라 다르다는 것을 알 수 있었다. 즉, 포구속도에 따라 최대사거리를 얻기 위한 최적 발사고각이 존재하며, 그 고각에서 사거리 최대화 비행을 수행할 경우 최적의 비행효율을 달성할 수 있다.

이 연구를 통해 얻어진 사거리 최대화 유도 기법은 향후 지능화 탄약 개발 및 운용에 유용한 참고자료가 될 것이며, 설계 및 운용개념 개선에 에너지 효율 관점의 데이터 분석이 유효하게 작용하기를 기대한다.

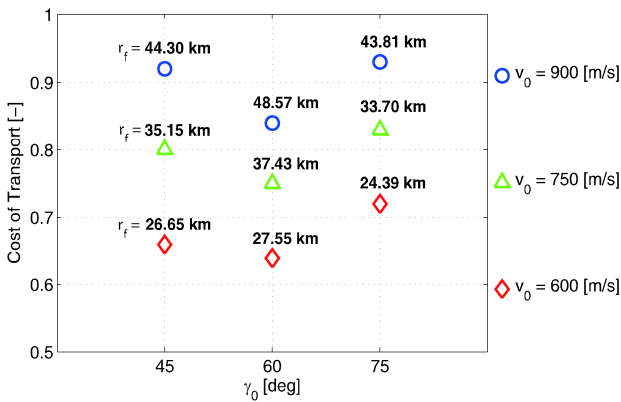


그림 14 Cost of Transport / 발사 고각 (포구속도가 다른 경우), r_f : 탄착 시 사거리, v_0 : 포구속도

Fig. 14 Cost of Transport / Launch angle (various initial velocity), r_f : range at landing point, v_0 : initial velocity

표 3 발사 / 탄착 / 소비 역학적 에너지 [kJ] ($E_{m0}/E_{mf}/\Delta E_m$, 발사 조건이 다른 경우)

Table 3 Mechanical energy at launch, landing, and mechanical energy consumption [kJ] ($E_{m0}/E_{mf}/\Delta E_m$, various launch condition)

포구속도	발사고각								
	45 [deg]			60 [deg]			75 [deg]		
	E_{m0}	E_{mf}	ΔE_m	E_{m0}	E_{mf}	ΔE_m	E_{m0}	E_{mf}	ΔE_m
600 [m/s]	8119.8	323.9	7795.9	8119.8	324.0	7795.8	8119.8	324.8	7795.0
750 [m/s]	12687.2	322.2	12365.0	12687.2	321.1	12366.1	12687.2	320.9	12366.3
900 [m/s]	18269.6	320.0	17949.6	18269.6	318.0	17951.6	18269.6	317.9	17951.7

감사의 글

이 논문의 작성에서 제출에 이르기까지, 내용과 그림의 수정방향에 대하여 귀중한 의견과 충고를 주신 국방과학연구소 이용인 박사님, 최동균 박사님, 안준선 박사님, 최재현 박사님께 감사드립니다.

References

[1] K. L. Teo, "A Computational Method for free time optimal control problems, with application to maximizing the range of an aircraft-like projectile", *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B*, Vol. 28, pp. 393-413, 1987.

[2] R. Burlisch, et al., "Combining direct and indirect methods in optimal control: Range maximization of a hang glider", *ISNM International series of Numerical Mathematics*, Vol. 111 (Optimal Control), pp. 273-288, 1993.

[3] M. Costello, "Range extension and accuracy improvement of an advanced projectile using canard control", *Proceedings of AIAA atmospheric flight mechanics conference, Maryland, USA*, pp. 324-331, 1995.

[4] M. Costello, "Range optimization of a fin stabilized projectile", *Proceedings of AIAA atmospheric flight mechanics conference, New Orleans, LA, USA*, pp. 659-699, 1997.

[5] M. Costello, "Extended range of a gun launched smart projectile using controllable canards", *Shock and Vibration*, Vol. 8, pp.203-213, 2001.

[6] H. J. Kelley, et al., "Boost-glide range optimal guidance", *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 3, 1982.

[7] D. C. Zhang, et al., "An Approximate Optimal Maximum Range Guidance Scheme for Subsonic Unpowered Gliding Vehicles", *International Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 2015, 2015.

[8] W. Yu and W. Chen, "Guidance scheme for glide range maximization of a hypersonic vehicle", *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Portland, Ore, USA*, Vol. 6714, 2011.

[9] A. V. Rao, et al. "Numerical optimization study of multiple-pass aeroassisted orbital transfer", *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 23, pp. 215-238, 2002.

[10] M. Soler, et al., "Hybrid optimal control approach to commercial aircraft trajectory planning", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 33, pp. 985-991, 2010.

[11] M. Soler, et al., "Multiphase optimal control framework for commercial aircraft four-dimensional flight-planning problems", *Journal of Aircraft*, Vol. 52, pp. 274-286, 2015.

[12] P. Bonami, et al., "Multiphase mixed-integer optimal control approach to aircraft trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, pp. 1267-1277, 2013.

[13] H. Fukumoto, "A study on trajectory optimization for minimum-time formation of aircraft", *Master Thesis, Yokohama National University*, 2018.

[14] Q. Chen, et al., "Multiphase trajectory optimization for gun-launched glide guided projectiles", *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 230, pp. 995-1010, 2015.

[15] D. H. Bridges, "Thrust and drag models for performance calculations for high-speed aircraft", *Journal of Aircraft*, Vol. 45, No. 4, 2008.

[16] 加藤寛一郎, 工学的最適制御, 東京大学出版会, 東京, 1988.

[17] A. E. Bryson and Y. Ho, Applied Optimal Control, *Taylor & Francis*, pp. 221-228, 1975.

[18] G. Gabrielli and T. von Karman, "What price speed?", *Mechanical Engineering ASME*, 1950.

저 자 소 개



김 용 재 (Yongjae Kim)

1989년 7월 17일생. 2013년 도쿄공업대학교 제어시스템공학과 졸업(학사). 2015년 동대학 기계우주시스템전공 졸업(석사). 현재 국방과학연구소 연구원.

Tel : 042-821-0916

E-mail : kim4375731@add.re.kr