

이산 모스 이론을 이용한 영역 분할 - 맘모그래피에의 응용

한 희 일[†]

Region Segmentation using Discrete Morse Theory - Application to the Mammography

Hee Il Hahn[†]

ABSTRACT

In this paper we propose how to detect circular objects in the gray scale image and segment them using the discrete Morse theory, which makes it possible to analyze the topology of a digital image, when it is transformed into the data structure of some combinatorial complex. It is possible to get meaningful information about how many connected components and topologically circular shapes are in the image by computing the persistent homology of the filtration using the Morse complex. We obtain a Morse complex by modeling an image as a cubical cellular complex. Each cell in the Morse complex is the critical point at which the topological structure changes in the filtration consisting of the level sets of the image. In this paper, we implement the proposed algorithm of segmenting the circularly shaped objects with a long persistence of homology as well as computing persistent homology along the filtration of the input image and displaying in the form of a persistence diagram.

Key words: Discrete Morse Theory, Cubical Complex, Persistent Homology, Region Segmentation

1. 서 론

디지털 이미지를 분석하기 위하여 그 내부에 존재하는 객체의 크기, 면적 등을 구하거나 삼차원 이미지인 경우에는 부피, 곡률 등을 구하기 위한 많은 연구가 발표되었지만 이들의 위상구조를 측정하기 위한 연구는 최근 들어 제한적으로 진행되고 있다. 이미지 내에 존재하는 객체의 위상구조를 분석하기 위해서는 우선, 이미지를 복합체(combinatorial complex) 형태로 변환하는 전처리 과정이 필요하다. 디지털 이미지는 격자구조에 정의된 이산함수로 해석

될 수 있기 때문에 이러한 공간에 위상구조를 부여하는 것이 쉬운 문제는 아니다. 본 논문에서는 Kovalsky가 제안한 셀 복합체(cubical cellular complex) 모델 [1] 을 이용하여 디지털 이미지를 복합체 구조로 변환한다. 본 논문에서는 화소를 0-셀로 간주하고 4-연결된 두 개의 화소와 네 개의 화소를 각각 1-셀, 2-셀로 인식한다.

매끄러운 다양체의 위상구조를 분석하는 이론은 지금까지 많이 알려져 있고 그 중에서도 대표적인 방식으로는 모스(Morse) 이론을 꼽을 수 있다. 하지만, 단체 복합체(simlicial complex)나 셀 복합체(cell

* Corresponding Author : Hee Il Hahn, Address: Wangsan-ri Mohyeon-myeon, Cheoin-gu, Yongin, Gyeonggi-do, Korea, TEL : +82-31-330-4356, FAX : +82-31-333-4256, E-mail : hihahn@hufs.ac.kr
Receipt date : Oct. 26, 2018, Revision date : Dec. 3, 2018
Approval date : Dec. 18, 2018

[†] Dept. of Information and Communications Eng., College of Engineering, Hankuk University of Foreign Studies
* This research was supported by the Research Program 2018 funded by Hankuk University of Foreign Studies

complex) 등과 같은 이산 공간(combinatorial space)의 위상구조를 분석하기 위한 틀은 상대적으로 발표된 이론이 많지 않은 편이다. 매끄러운 다양체 M 의 위상구조와 M 위에 정의된 임의의 매끄러운 함수의 극점 간에는 긴밀한 관계가 존재한다. 예를 들어 M 이 콤팩트(compact) 이면 τ 는 극대점과 극소점을 반드시 갖는다. Milnor가 발표한 모스이론 [2]은 이러한 사실을 이용하여 매끄러운 다양체의 위상구조를 효과적으로 분석하는 틀이다. 하지만 이산 공간에서는 이 이론을 바로 적용하기가 쉽지 않은 문제점을 갖고 있다. 이를 해결하기 위하여 많은 이론이 제안되었으나 Forman이 이산 모스이론(discrete Morse theory) [3, 4]을 발표하면서 모스 이론이 복합체에 적용될 수 있는 기반이 마련되었다. 이 이론은 연속 함수 대신에 복합체의 각 셀에 서로 다른 값을 할당한 다음 모스이론의 기본개념을 적용하여 이산 공간을 분석한다. 이를 계기로 이산 모스 이론이 대수적 위상수학의 대표 이론인 호모토피 군(homotopy group)과 호몰로지 군(homology group) 등의 개념과 연결되어 새로운 비전을 제시하고 있다.

이미지로부터 구성된 복합체에서 원하는 객체의 구조를 정확히 파악하는 것은 사실상 불가능하기 때문에 호몰로지를 바로 적용하는데 어려움이 발생한다. 이를 해결하기 위하여 지속적 호몰로지(persistent homology) 개념이 도입된다 [5]. 지속적 호몰로지는 매개변수에 따라 복합체가 출현(birth)하거나 사라짐(death)으로 인한 호몰로지의 변화를 측정하는 이론이다. 매개변수에 따른 복합체의 열을 필터레이션(filtration)이라고 부르는데, 필터레이션의 어느 순간에 위상적으로 유의미한 특징들(연결성분, 터널, void 등)이 발생하여 어느 기간 동안 유지되고 있는지를 파악함으로써 주어진 객체의 위상구조를 분석할 수 있다. 이산 벡터장의 극점에 해당되는 극셀(critical cell)은 복합체의 위상구조를 결정하는 매우 중요한 인자로서 이미지의 스켈레톤이나 영역분할과 관련이 깊다. 호몰로지의 지속시간(persistence)이 길지 않은 극점들을 제거하면 스켈레톤을 간략화시키고 인근 영역들을 적절히 병합시키는 효과를 얻을 수 있다.

이산 모스이론은 기본적으로 객체의 위상구조를 분석하는 틀이므로 이의 응용분야는 비교적 다양한 편이다. 예를 들어 천문학에서 갤럭시의 분포 [6], 제

료공학에서 물질 내의 기포검출 [7], 특정 국가의 계절 별 수자원 부족 및 대도시의 월별 범죄발생 추이 [8] 등을 분석하기 위하여 관련 측정 데이터를 이미지화시킨 다음, 위에서 설명한 방식으로 이들의 위상구조를 분석함으로써 주요 정보를 압축, 요약하여 추출한다. 하지만, 이를 이미지 처리나 컴퓨터 비전 분야에 응용한 예는 거의 찾아보기 어렵다. 그 이유는 관심객체의 존재유무 같은 위상정보보다는 그 객체의 크기, 모양 등의 기하구조에 더 비중을 두기 때문일 것이다. 본 논문에서는 이산 모스이론을 이용하여 이미지의 필터레이션을 따라 지속적 호몰로지를 구함과 동시에 폐곡선을 윤곽선으로 갖는 객체를 검출하고 해당 영역을 분할하는 알고리즘을 구현한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 절에서는 셀 복합체의 구조와 이산 모스이론을 리뷰하고, 복합체로부터 이산 벡터장과 함께 극셀을 구하는 방법을 알아본다. 극셀들을 이용하여 모스복합체를 구성할 수 있는데, 이들 간의 연결 관계를 분석하여 복합체의 필터레이션에 대한 지속적 호몰로지를 계산하는 기법을 설명한다. 이산 모스 이론을 이용하여 영역검출하는 알고리즘을 3절에서 설명하고, 4절에서는 모스 복합체에서 구한 지속적 호몰로지 연산 결과와 함께 이미지의 스켈레톤과 영역분할 등을 실험으로 확인한다. 마지막으로 5절에서는 결론을 맺고 향후 연구 진행방향에 대하여 논의한다.

2. 이산 모스 이론

2.1 디지털 이미지의 셀 복합체 변환

디지털 이미지를 셀 복합체로 모델링하기 위하여 점(0-셀), 선(1-셀), 면(2-셀) 등을 본 논문에서는 다음과 같이 정의한다. 0-셀은 이미지의 각 화소로, 1-셀은 4-연결된 두 개의 이웃 화소 쌍으로 나타난다. 2-셀은 정사각형 형태의 네 개 화소로 정의한다. 이미지 경계면을 제외한 내부에서 각 0-셀을 포함하는 1-셀과 2-셀의 수는 각각 네 개다. $M \times N$ 이미지에서 0-셀, 1-셀, 2-셀의 수는 각각 MN , $M(N-1)+N(M-1)$, $(M-1)(N-1)$ 이다. 이미지 D 내에 있는 모든 p -셀의 집합을 $K(D)$ 라고 표현한다. 여기서 p 는 0, 1, 2이다. 셀의 차원은 위 첨자로 표시한다. 예를 들어 $\alpha^{(p)}$ 는 p -셀을 의미한다. $p < q$ 이고 $\alpha^{(p)}$ 의 모든 꼭짓점이 $\beta^{(q)}$ 의 꼭짓점의 부분집합일 때, $\alpha^{(p)}$ 는 $\beta^{(q)}$ 의 변(face)

이고 반대로 $\beta^{(q)}$ 는 $\alpha^{(p)}$ 의 공변(coface)이라고 부르며, $\alpha^{(p)} < \beta^{(q)}$ 로 표기한다. 셀들의 집합 $N \subset K$ 는, 모든 셀 $\alpha \in N$ 에 대하여 그 변도 N 에 속하면 복합체(complex)라고 부른다.

그레이 스케일 이미지 D 의 화소 값이 임계값 t 보다 작은 화소의 집합을 레벨세트(lower level set)로 정의하지만 [9] 셀 복합체에서는 셀 α 에 속한 모든 화소 값이 임계값보다 작은 모든 셀의 집합으로 정의한다[10]. 본 논문에서는 임계값이 증가함에 따라 레벨세트의 위상구조가 어떻게 변하는지를 분석한다. 레벨세트에서의 연결성은 화소들이 4-최근접 이웃(4-nearest neighbor)일 때 연결되어 있는 것으로 판정한다.

2.2 이산 모스 함수

이산 모스함수는 기본적으로 차원이 높은 셀일수록 보다 큰 값을 할당하지만, 최대 한 개의 예외는 허용한다. 이산 모스함수 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ 는 각 셀 $\alpha^{(p)}$ 에 대하여 다음 두 조건을 만족하도록 각 셀에 적절한 값을 할당한다.

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha | f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1 \text{ 이고} \tag{1}$$

$$\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha | f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1 \tag{2}$$

$\alpha^{(p)}$ 가 다음 식을 만족하면,

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha | f(\beta) \leq f(\alpha)\} = 0 \text{ 또는} \tag{3}$$

$$\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha | f(\gamma) \geq f(\alpha)\} = 0 \tag{4}$$

인데, 이를 극셀이라고 부른다. 복합체 K 에 이산 모스함수가 정의될 수 있으면 K 는 p 차원의 극셀당, 한 개의 p 차원 셀을 갖는 CW 복합체 [11]와 호모토피 등가(homotopy equivalent)이다 [3, 4]. 이산 모스함수를 구하면, 함수의 최소값부터 시작하여 오름차순으로 해당 셀을 이어 붙임으로써 셀 복합체를 구성할 수 있다. 이를 통하여 복합체 K 의 레벨부 복합체(level subcomplex) $K(c)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K(c) = \cup_{f(\alpha) \leq c} \cup_{\beta \leq \alpha} \beta \tag{5}$$

$f(\alpha) \in (a, b]$ 인 극셀이 존재하지 않으면, $K(b)$ 는 $K(a)$ 와 호모토피 등가이다.

2.3 경사 벡터장

식 (1)과 식 (2)에 주어진 이산 모스함수의 조건을 만족하도록 복합체의 각 셀에 적절한 값을 할당하는 것은 쉬운 일이 아니고 실제로는 그럴 필요도 없다. 모스함수의 벡터장(gradient vector field)을 구하는 것만으로도 충분하다 [10]. Fig. 1을 살펴보면, 모스함수 값이 1인 에지($f^{-1}(1)$ 로 표기)는 보다 큰 모스함수 값을 갖는 점($f^{-1}(2)$)이 존재하기 때문에 극셀이 아니다. 점($f^{-1}(2)$)은 자신보다 작은 공변 $f^{-1}(1)$ 이 존재하므로 극셀이 아니다. 이와 같이 극셀이 아닌 이웃인 쌍이 존재하는데, 이것이 벡터를 결정한다. 벡터의 방향은 $f^{-1}(2)$ 에서 $f^{-1}(1)$ 로 향한다. 일반적으로 극셀이 아닌 두 개의 셀 $\alpha^{(p)}$ 와 $\beta^{(p+1)} > \alpha$ 의 이산 모스함수 값이 $f(\beta) \leq f(\alpha)$ 를 만족할 때 벡터는 $\alpha^{(p)}$ 에서 $\beta^{(p+1)}$ 를 향하고 각 셀 α 는 최대 한 개의 벡터 쌍에 포함된다. 이 그림에서 $f^{-1}(4)$ 에서 $f^{-1}(3)$ 으로 또 다른 벡터가 존재하고 $f^{-1}(0)$ 와 $f^{-1}(5)$ 는 각각 식 (3)과 식 (4)를 만족하는 0-극셀과 1-극셀이다. Fig. 1에 주어진 복합체는 0-셀과 1-셀이 각각 한 개 존재하는 CW 복합체와 호모토피 등가인 원이다.

식 (3)과 식 (4)에 따라 모든 셀 α 는 정확히 한 벡터의 시작점 또는 끝점, 아니면 시작점도 아니고 끝점도 아닌 세 부류로 나눌 수 있다. 시작점도 아니고 끝점도 아닌 셀은 극셀이다.

복합체 K 상에서의 이산 벡터장 V 는 K 에 속하는 셀들의 쌍 $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$ 들의 집합으로 표현된다. 예를 들어 Fig. 1과 같이 v 가 에지 e 의 경계이고 $f(e) \leq f(v)$ 이면, $V(v)$ 는 v 에서 시작하여 e 로 향하는 이산 접 벡터(tangent vector)로 나타낼 수 있다. 이를 일반화시켜, $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ 이고 $f(\beta) \leq f(\alpha)$ 이면

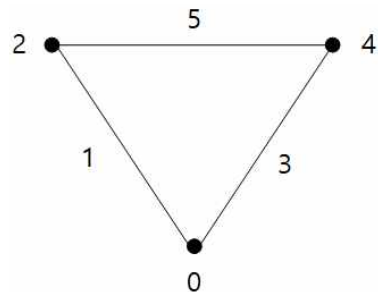


Fig. 1. Example of a cell complex with discrete Morse function values.

$V(\alpha) = \pm\beta$ 로 정의되는데, 여기서 부호는 $\langle \alpha, \partial V(\alpha) \rangle = -1$ 로 정하여 $V(\alpha) = -\langle \alpha, \partial\beta \rangle \beta$ 가 되도록 정한다. 여기서 정수 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 는 α 와 β 가 동일한 방향이면 1이고 그렇지 않으면 -1로 정의된다. 복합체 K 상에서 이산 벡터장 V 가 주어지면, V -경로는 다음 식과 같이

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)} \quad (6)$$

셀들의 열로 표현된다. 여기서 $i=0, 1, \dots, r$ 이고, $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ 이다. V 가 이산 모스함수 f 의 경사 벡터장일 때, $i=0, 1, \dots, r$ 에 대하여 $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ 이고 $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$ 이면, 위 식은 V -경로이다 [3, 4]. f 의 경사경로는 f 가 감소하는 방향으로의 연속적인 셀의 열이다.

V -폐경로가 존재하지 않으면, 이산 벡터장 V 는 이산 모스함수의 경사 벡터장이고, 그 역도 성립한다 [3, 4]. 여기서 이산 벡터장 V 를 맵으로 볼 수 있다. 예를 들어, v 가 극셀이면 경사 벡터가 존재하지 않으므로 $V(v) = 0$ 로 나타낸다. v 가 극셀이 아니면 $f(e) \leq f(v)$ 인 에지 $e > v$ 가 유일하게 존재하여 $V(v) = e$ 이다. 여기서 벡터의 방향은 $-\nabla f$ 의 방향이다. 일반적으로 식 (3)은 $V(v) = \pm\sigma^{(p)}$ 를 만족하는 $v^{(p-1)}$ 가 존재하지 않고, 식 (4)는 $V(\sigma) = \pm\tau^{(p+1)}$ 인 τ 가 존재하지 않음을 의미한다. 극셀 σ 는 $\sigma \notin \text{image}(V)$ 임과 동시에 $V(\sigma) = 0$ 임을 만족하여야 한다.

2.4 모스 복합체

복합체 K 를 CW 분할하여 각 차원 셀의 수를 알지 않고도 복합체의 호몰로지를 정확히 구할 수 있는 방법이 있다. 모스함수 f 가 정의된 복합체 K 에서 $C_p(X, \mathbb{Z})$ 는 p 차원 사슬공간이고 $M_p \subseteq C_p(X, \mathbb{Z})$ 는 p 차원 극셀들이 스패하는 공간이라고 표시한다. K 내의 p -극셀의 수가 m_p 이면 $M_p \cong \mathbb{Z}^{m_p}$ 이다. 여기서 \cong 는 위상동형(homeomorphism)을 의미한다. 호모토피 동가인 두 공간은 동일한 호몰로지를 가지므로 다음이 성립한다. 각 차원 d 에 대하여, 경계 맵(boundary map) $\tilde{\partial}_d : M_d \rightarrow M_{d-1}$ 가 존재하고 $\tilde{\partial}_{d-1} \circ \tilde{\partial}_d = 0$ 이다. 다음과 같은 모스 사슬(morse chain) 열을 이용하여 CW 복합체 X 의 호몰로지 $H_d(X, \mathbb{Z})$ 를 구할 수 있다 [3, 4].

$$0 \rightarrow M_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} M_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} M_0 \rightarrow 0 \quad (8)$$

$H_d(M, \tilde{\partial}) = \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_d)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_{d+1})}$ 으로 정의하면 각 차원 d 에 대하여, $H_d(M, \tilde{\partial}) \cong H_d(X, \mathbb{Z})$ 이고, 경계 맵 $\tilde{\partial}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{\partial}\beta = \sum_{\text{critical } \alpha^{(p)}} c_{\alpha, \beta} \alpha \quad (9)$$

여기서, $c_{\alpha, \beta} = \sum_{\gamma \in I(\beta, \alpha)} m(\gamma)$ 이다. 위 식에서 $I(\beta, \alpha)$ 는 β 의 공차원(codimension)이 1인 변에서 α 까지의 경사경로의 집합이고, $m(\gamma)$ 는 경사경로 γ 에 대하여 β 와 α 의 방향에 따라 ± 1 의 값을 갖는다. 모스 이론에서 가장 중요한 문제 중의 하나는 주어진 공간에 대한 모스함수를 구하는데 있어서 극셀의 수를 최소한으로 유지하는 것이다.

3. 모스 이론을 이용한 영역 검출 알고리즘

3.1 스켈레톤 이미지 구성

임의의 p -셀 $\alpha^{(p)}$ 에 대한 불안정 영역 $U_K(\alpha)$ 는 $\alpha^{(p)}$ 에서 시작하는 V -경로를 이용하여 다음과 같이 정의한다 [12].

$$V^{-1}(\beta^{(p)}) = \gamma^{(p-1)} < \delta^{(p)} \in U_K(\alpha) \Rightarrow \beta \in U_K(\alpha) \quad (10)$$

$U_K(\alpha)$ 는 p -셀들로만 구성된다. $U_K(\alpha)$ 에 속하는 모든 p -셀의 변을 포함하는 $U_K(\alpha)$ 의 복합체 버전 $\bar{U}_K(\alpha)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{U}_K(\alpha) = \{\gamma \mid \gamma \leq \delta \in U_K(\alpha)\} \quad (11)$$

이를 이용하여 부 복합체 $K(c)$ 에 존재하는 모든 극셀 $\delta^{(p)}$ 에 해당되는 $\bar{U}_K(\delta)$ 를 합함으로써 스켈레톤 이미지를 생성할 수 있다.

$$\Sigma_{K(c)} = \bigcup_{\substack{\alpha: \text{critical} \\ f(\alpha) \leq c}} \bar{U}_K(\alpha) \quad (12)$$

Fig. 2는 p 차원 스켈레톤 이미지를 구성하는 알고리즘을 보여준다.

3.2 이미지 영역 분할

불안정 영역 $U_K(\alpha)$ 의 대응으로 안정영역 $S_K(\alpha)$ 를 다음과 같이 정의한다[12].

p 차원 스켈레톤 이미지 구성 알고리즘

Input : 레벨 복합체 $K(c)$ 와 이에 속한 모든 p -극셀 $\delta_i^{(p)}$ ($i = 1, \dots, N_p$)
 $N_p = K(c)$ 에 속한 p -극셀의 수
 $p = 1, 2$
Output : p 차원 스켈레톤 이미지 $\Sigma_{K(c)}$

초기화 $i = 1$
초기화 $\Sigma_{K(c)} = \emptyset$
while $i \leq N_p$ **do**
식 (10)을 이용하여 불안정 영역 $U_K(\delta_i^{(p)})$ 를 계산한다.
 $U_K(\delta_i^{(p)})$ 의 복합체 버전
 $\bar{U}_K(\delta_i^{(p)}) = \{\gamma | \gamma \leq \alpha \in U_K(\delta_i^{(p)})\}$ 를 계산한다.
 $\Sigma_{K(c)} = \Sigma_{K(c)} \cup \bar{U}_K(\delta_i^{(p)})$
end while

Fig. 2. Algorithm of constructing a p -dimensional skeleton image.

$$V(\beta^{(p)}) = \gamma^{(p+1)} > \delta^{(p)} \in S_K(\alpha) \Rightarrow \beta \in S_K(\alpha) \quad (13)$$

복합체 K 의 모든 0-셀은 임의의 0-극셀의 안정 영역에 속하므로 워터셰드(watershed) 알고리즘과 유사하게 이미지의 영역을 분할하는 기능을 수행한다. 식 (12)와 유사한 방법으로 $S_K(\alpha)$ 의 닫힌 공간을 구하여 복합체화시킴으로써 분지(basin)를 구할 수 있다. 분지 $B_K(\alpha)$ 는 단순연결(simply connected)이고 서로 분리(pairwise disjoint)되어 있으며, α 이외에는 극셀을 포함하지 않는다. 모든 0-셀은 임의의 0-극셀의 분지에 포함되나 p -셀($p \geq 1$)은 그렇지 않을 수 있다. 어느 분지에도 속하지 않은 1-셀을 브리지라고 부르는데, 한 개 이상의 1-극셀의 안정영역에 속한다. 임의의 두 개의 0-극셀이 어느 1-극셀의 불안정 복합체 내에 포함되어 있으면 두 0-극셀에 해당되는 분지들은 서로 인접해 있음을 의미하므로 병합시킬 수 있다. 이러한 과정을 반복수행하면 작은 분지들을 병합시킴으로써 이미지 영역을 분할시킬 수 있다. Fig. 3은 모스이론을 이용하여 이미지의 영역을 분할시키는 알고리즘을 보여준다.

4. 실험 및 토론

이산 모스이론을 이용하면 디지털 이미지로부터 위상적으로 유의미한 정보를 추출할 수 있고 이를 기반으로 관심영역을 검출하는데 응용가능하다. 본

모스이론을 이용한 영역분할 알고리즘

Input : 복합체 K 와 이에 속한 모든 p -극셀 $\delta_i^{(p)}$ ($i = 1, \dots, N_p$)
 $N_p = K(c)$ 에 속한 p -극셀의 수
 $p = 0, 1$
Output : 영역분할 이미지 Y_K

초기화 $i = 1$
초기화 $\Sigma_{K(c)} = \emptyset$
while $i \leq N_0$ and $j \leq N_1$ **do**
식 (13)을 이용하여 안정영역 $S_K(\delta_i^{(0)})$ 를 계산한다.
식 (10)을 이용하여 불안정 영역 $U_K(\delta_j^{(1)})$ 를 계산한다.
 $\Sigma_{K(c)} = \Sigma_{K(c)} \cup \bar{U}_K(\delta_i^{(p)})$
end while
for $i, k \leq N_0$ and $j \leq N_1$ **do**
if $\delta_i^{(0)}$ and $\delta_k^{(0)} \in U_K(\delta_j^{(1)})$, merge $S_K(\delta_i^{(0)})$ with $S_K(\delta_j^{(0)})$
end for

Fig. 3. Algorithm of segmenting an image using a discrete Morse theory.

논문에서는 이를 확인하기 위하여 맘모그래피에서 종양(tumor)을 검출하는 실험을 수행한다. 이를 위해서는 우선 이미지를 셀 복합체의 형태로 데이터 구조를 변환하고 이로부터 이산 벡터장을 구하여야 한다. 이미지에 대한 셀 복합체 K 가 주어지면, 레벨 세트 K_t 를 구할 수 있다. 여기서 K_t 는 K 내의 모든 셀 중에서 셀 안의 모든 화소가 t 보다 크지 않은 셀의 집합으로 정의된다. 이를 이용하여 K 의 펠트레이션 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$0 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K \quad (14)$$

위 식에서 m 은 이미지 내 화소의 최댓값이다. 벡터장을 구하기 위해서는 우선 각 화소에 대한 인근영역(lower star)을 다음과 같이 정의한다.

$$St(x) = \{\alpha \in K | x \in K \text{ and } g(x) = \max_{y \in \alpha} g(y)\} \quad (15)$$

$St(x)$ 의 중심화소 x 에서 시작하는 경사 벡터는 Robins의 알고리즘 [10] 을 이용하여 구하고 동시에 각 차원의 극셀을 찾는다. 이산 벡터장과 극셀들을 알고 있으면 모스 복합체를 구성할 수 있다. 이를 위해서는 식 (9)에 제시한 경계 맵 $\tilde{\partial}$ 와 관련된 극셀들 간의 상호관계를 파악하여야 한다. 각 극셀 $\alpha^{(p)}$ 의 변

에서 시작하는 벡터장이 어느 극셀 $\gamma^{(p-1)}$ 에 도달하는지를 찾아야 한다. 본 논문에서는 Robins가 제안한 알고리즘 [10] 을 이용하여 극셀들 간의 연결경로를 검색하였다.

$C_p(X, \mathbb{Z})$ 에서 \mathbb{Z} 계수 대신에 \mathbb{Z}_2 계수를 이용하여 p 차원 사슬군(chain group) $C_p(X, \mathbb{Z}_2)$ 를 정의한다. 이의 장점은 셀의 방향을 고려할 필요가 없고 호몰로지를 구하는 과정이 비교적 쉽게 처리될 수 있다는데 있다. 모스 복합체 $M_p \subseteq C_p(X, \mathbb{Z}_2)$ 는 p -극셀로 구성된 자유 아벨 군(free Abelian group)으로 정의된다. 본 논문에서는 \mathbb{Z} 계수 대신에 \mathbb{Z}_2 계수를 이용하기 때문에, 식 (9) 와 같이 정의된 $\tilde{\partial}\beta = \sum_{critical \alpha^{(p)}} c_{\alpha, \beta} \alpha$ 에서 $c_{\alpha, \beta}$ 를 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$c_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1, & \#I(\beta, \alpha) : \text{홀수} \\ 0, & \#I(\beta, \alpha) : \text{짝수} \end{cases} \quad (16)$$

위 식에서 $\#I(\beta, \alpha)$ 는 극셀 $\beta^{(p+1)}$ 의 변 $\delta^{(p)}$ 에서 극셀 $\alpha^{(p)}$ 까지 벡터장 V -경로의 수를 나타낸다. 각

극셀 $\beta^{(p+1)}$ 가 어느 극셀 $\alpha^{(p)}$ 로 벡터장이 연결되어 있는지를 파악하면 이로부터 식 (14) 에 나타난 복합체 K 의 필터레이션에 대한 지속적 호몰로지를 쉽게 구할 수 있다. $\alpha^{(p)}$ 의 화소 값에서 p 차 호몰로지의 랭크가 1 만큼 증가한 다음 $\alpha^{(p)}$ 에 대응되는 $\beta^{(p+1)}$ 의 화소 값에서 사라진다. 여기서 $\alpha^{(p)}$ ($\beta^{(p+1)}$)의 화소 값이란 $\alpha^{(p)}$ ($\beta^{(p+1)}$)를 구성하는 화소들 중의 최댓값을 의미한다. 이차원 이미지만 경우에 p 는 0 또는 1의 값을 갖는다. 예를 들어 화소 값이 80인 극셀 $\beta^{(2)}$ 에서 화소 값이 25인 극셀 $\alpha^{(1)}$ 으로 연결되는 V -경로가 홀수 개 존재하면, K_{25} 에서 일차원 호몰로지의 랭크가 1 만큼 증가하다가 K_{80} 에서 1 만큼 감소한다. 이러한 내용을 이차원 평면에 좌표 (25, 80) 인 점으로 나타낼 수 있는데, 이를 지속구간 다이어그램(persistence diagram)이라고 부른다. 여기서, 두 좌표 값의 차 $80 - 25 = 55$ 를 지속구간(persistence)이라고 하며 클수록 중요한 위상정보를 지닌 것으로 해석된다.

Fig. 4는 Fig. 5-(a)에 주어진 맘모그램에서 구한

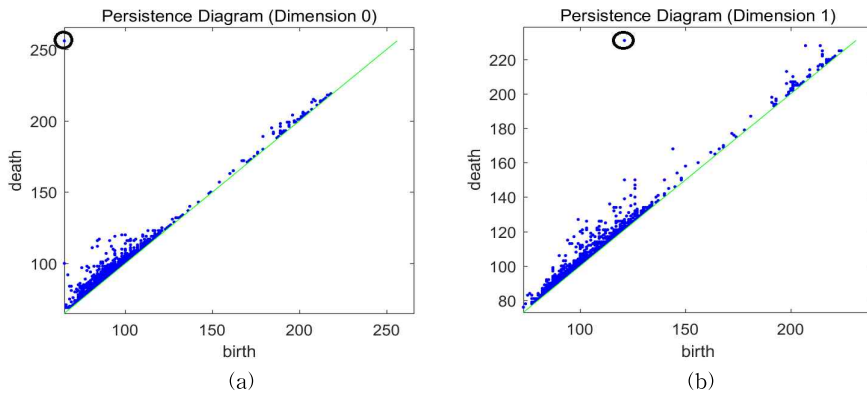


Fig. 4. Persistence diagrams obtained from the image given in Fig. 3(a). (a) 0-dimensional persistence diagram, (b) 1-dimensional persistence diagram.

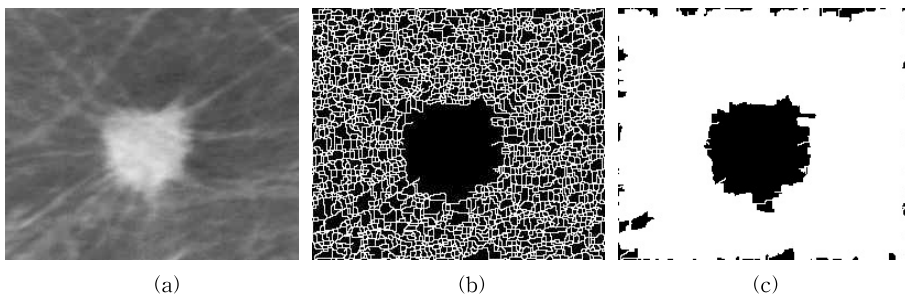


Fig. 5. Image cropped from a mammogram and its skeleton images. (a) Mammogram, (b) 1-dimensional skeleton, (c) 2-dimensional skeleton.

벡터장으로부터 구한 지속적 호몰로지의 랭크 변화를 지속구간 다이어그램으로 표현한 것이다. 이 그림에서 0 차원 호몰로지의 랭크는 필터레이션 K_t 에서 임계값 t 의 변화에 따른 연결성분의 수를 나타내는 반면, 1 차원 호몰로지의 랭크는 위상적으로 원형인 객체의 수에 대한 정보를 지닌다. 이 다이어그램에서 대각선에 근접한 점들은 위상잡음이나 중요도가 떨어지는 객체를 나타내고 멀어질수록 위상적으로 유의미한 정보를 담고 있다. Fig. 5-(a)에서 알 수 있듯이, 한 개의 중앙이 위상 원(topological circle)의 형태로 존재하므로 Fig. 4에 대각선에서 멀리 떨어진 점(원으로 표시함)이 각각 한 개씩 나타남을 확인할 수 있다.

Fig. 5는 입력 mam모그림과 함께 식 (12)에 제시한 방법으로 K_{150} 이하의 필터레이션에서 구한 스켈레톤을 보여준다. 그림을 통하여 알 수 있듯이, 적절한 크기의 필터레이션을 선택하면 스켈레톤 만으로도 원하는 영역을 쉽게 검출할 수 있다.

이와 유사한 방법으로 식 (13)을 이용하여 0-극셀의 안정영역을 구한 다음 이를 복합체화시킴으로써 이미지의 분지를 구할 수 있는데, 그 결과를 Fig. 6-(a)에 제시한다. 중앙영역이더라도 그 내부 화소 값이 균일하지 않으면 여러 개의 극점들이 존재하여 그에 비례하는 수만큼의 영역으로 나뉜다. 또한 각 영역은 그 영역에 대응되는 0-극셀의 화소 값으로 표현하였기 때문에 검출된 영역이 약간 어둡게 보이고 크기가 줄어든 형태로 보일 수 있다.

이와 같이 분지 검출방식은 0-극셀의 수만큼 영역이 분할되기 때문에 분할 영역의 개수를 줄이는 작업이 필요하다. 그런데 임의의 두 개의 0-극셀이 어느

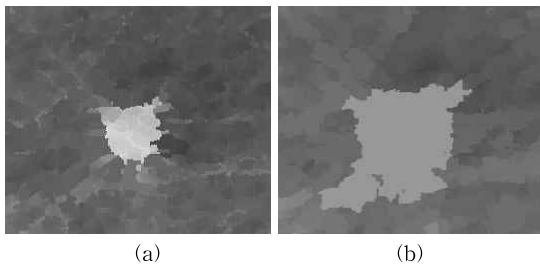
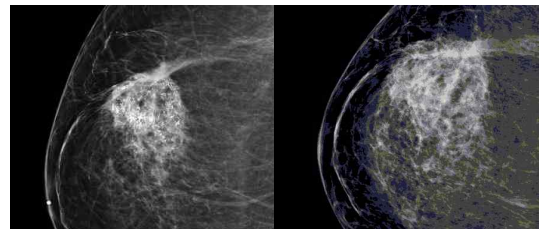
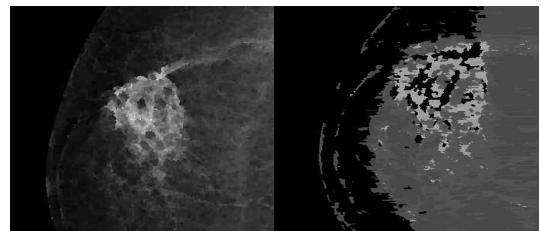


Fig. 6. The persistent basin and its partitioned result, where the persistent basin is merged with the adjacent basins. (a) Persistent basin, (b) Partitioned result.

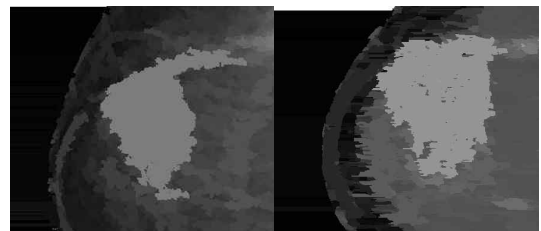
1-극셀의 불안정 복합체에 포함되면 이를 통하여 두 0-극셀에 해당되는 분지들은 서로 인접해 있음을 알 수 있으므로 두 영역을 병합시킬 수 있다. 이와 같은 과정을 반복수행하면 작은 분지들이 서로 병합되므로 보다 안정적인 영역분할이 가능하다. Fig. 5-(a)에서 임의의 1-극셀에서 시작하는 불안정 복합체와 만나는 0-극셀들에 해당되는 영역들을 병합하여 구한 결과 이미지를 Fig. 6-(b)에 제시한다. Fig. 7은 두 개의 다른 mam모그림 이미지에 대하여 Fig. 6의 경우와 동일한 실험을 수행하였을 때의 결과 이미지들을 보여 준다. 여기서, 병합된 이미지에서 중앙에 해당되는 영역의 밝기가 더 어둡게 보이는 이유는 각 영역에 속한 0-극셀들 중에서 밝기가 가장 작은 0-극셀의 값을 대푯값으로 영역을 표현하였기 때문이다. Fig. 6과 Fig. 7의 결과를 통하여 알 수 있듯이, mam모그림에서는 중앙 영역의 경계가 명확하지 않고 주변



(a)



(b)



(c)

Fig. 7. Results of detecting the persistent basins and segmenting the associated partitions. (a) Input images, (b) Persistent basins, (c) Partitioned results,

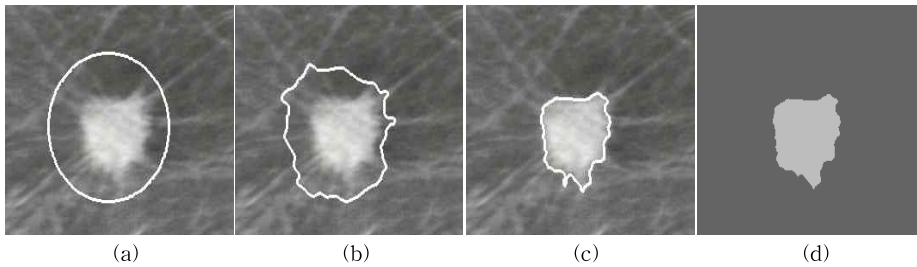


Fig. 8. Segmentation results of ACM, where an image given in Fig. 5-(a) is used as an input. (a) Input image with an initial contour, (b) Intermediate result after 100 times of recurrent running, (c) Final result after 400 times of recurrent running, (d) Partitioned results.

티슈의 특성이 복잡해서 전체적으로 분지 이미지의 중앙 영역은 실제보다 작게 검출되는 반면에 병합결과 이미지에서는 주변 티슈가 중앙에 병합되어 보다 크게 나타나는 경향을 보인다.

제안 알고리즘의 성능을 비교하기 위하여, 영역분할의 대표적인 알고리즘 중의 하나인 ACM(active contour model)을 선택하여 Fig. 5-(a)에 주어진 이미지를 입력하였을 때의 결과를 Fig. 8에 제시한다 [13]. ACM은 기본적으로 검출하고자 하는 객체의 위치를 사전에 알고 이를 기반으로 Fig. 8-(a)와 같이 객체 주위에 윤곽선을 입력으로 제공한다. 윤곽선 내부와 외부 간의 통계적 특성차를 이용하여 윤곽선을 점차적으로 객체의 경계에 수렴하도록 동작하기 때문에 보다 안정적으로 동작한다. Fig. 8-(d)는 Fig. 6에 주어진 제안 알고리즘 결과보다 선명하게 영역분할이 이루어진 것을 확인할 수 있다. 하지만 검출하고자 하는 객체의 위치를 사전에 알고 있어야 적용 가능한 단점이 있다. 반면에 제안방식은 이산 모스이론의 틀 안에서 벡터장만을 특징벡터로 이용하기 때문에 영역분할 성능은 다소 저하되는 한계를 보이고 있으나, 사전 정보가 전혀 요구되지 않고 위상구조 정보를 통하여 검출후보 영역의 개수와 그 위치정보 등을 함께 구할 수 있는 장점이 있다. 제안 알고리즘의 영역분할 성능을 개선시키기 위해서는 보다 다양한 기하정보를 활용하거나 다른 영역분할 알고리즘과 접목시키는 방안이 고려되어야 할 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는 Forman이 제안한 이산 모스 이론을 이용하여 이미지의 위상구조를 분석하는 알고리즘을 구현하였다. 이를 위해서는 우선적으로 이미지

를 복합체의 데이터 구조로 변환하여야 하는데, 본 논문에서는 셀 복합체를 선택하였다. 복합체에서 구한 이산 벡터장에서 0, 1, 2 차원의 극셀들을 찾아낸 다음, 이들 간의 연결관계를 추적하여 모스 복합체를 구성하였다. 모스 복합체가 구성되면 필트레이션의 추이에 따라 각 레벨세트의 연결성분들이 새로 생성되고 병합되는 과정들을 0 차원 호몰로지 군의 관점에서 분석할 수 있을 뿐만 아니라 1 차원 호몰로지를 이용하여 원형 패턴의 존재를 검출할 수 있음을 실험으로 확인하였다.

기본적으로 이산 모스이론은 복합체의 위상구조 분석이 목적이므로 그 안에 연결성분, 폐곡선, 또는 빈 폐공간(void)의 수 등, 위상적으로 유의미한 정보는 효과적으로 찾아내고 있으나 이들의 크기나 모양 등의 기하구조를 구하는 데에는 한계가 있을 수 밖에 없다. 향후에는 이를 이미지 처리나 컴퓨터 비전 등의 알고리즘들과 접목시켜 응용 가능성을 연구함과 동시에 삼차원 이미지로 확대하여 이미지 내에 빈공간의 존재유무와 그 개수 등을 구하기 위한 위상분석 툴로 활용할 계획이다.

REFERENCE

[1] V.A. Kovalevsky, "Finite Topology as Applied to Image Analysis," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 46, No. 2, pp. 141-161, 1989.

[2] J.W. Milnor, *Morse theory*; Princeton University Press, New Jersey, 1963.

[3] R. Forman, "Morse Theory for Cell Complexes," *Advances in Mathematics*, Vol. 134, pp. 90-145, 1998.

[4] R. Forman, "A User's Guide to Discrete Morse Theory," *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, Vol. 48, pp. 1-35, 2002.

[5] A. Zomorodian and G. Carlsson, "Computing Persistent Homology," *Discrete Computational Geometry*, Vol. 33, Issue 2, pp. 249-274, 2005.

[6] T. Sousbie, C. Pichon, and H. Kawahara, "The Persistent Cosmic Web and Its Filamentary Structure: II. Illustrations," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 414, No. 1, pp. 384-403, 2011.

[7] O. Delgado-Friedrichs, V. Robins, and A. Sheppard, "Morse Theory and Persistent Homology for Topological Analysis of 3D Images of Complex Materials," *Proceeding of IEEE Internal Conference on Image Processing*, pp. 4872-4876, 2014.

[8] C. Du, C. Szul, A. Manawa, N. Rasekh, R. Guzman, R. Davidson, et al., "RGB Image-Based Data Analysis via Discrete Morse Theory and Persistent Homology," *arXiv:1801.09530*, 2018.

[9] H.I. Hahn, "Proposing the Technique of Shape Classification Using Homology," *Journal of Korea Multimedia Society*, Vol. 21, No. 1, pp. 10-17, 2018.

[10] V. Robins, P.J. Wood, and A. Sheppard, "Theory and Algorithms for Constructing Discrete Morse Complexes from Grayscale Digital Images," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 33, No. 83, pp. 1646-1658, 2011.

[11] A. Lundel and S. Weingram, *The Topology of CW Complexes*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.

[12] O. Delgado-Friedrichs, V. Robins, and A. Sheppard, "Skeletonization and Partitioning of Digital Images Using Discrete Morse Theory," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 37, No. 3, pp. 654-666, 2015.

[13] H.I. Hahn, "Improving Performance of Region-Based ACM with Topological Change of Curves," *Journal of Korea Multimedia Society*, Vol. 20, No. 1, pp. 10-16, 2017.



한 희 일

1980년 3월 ~ 1984년 2월 서울대학교 제어계측 공학과 공학사

1984년 3월 ~ 1986년 2월 서울대학교 제어계측 공학과 공학석사

1992년 8월 ~ 1995년 12월 University of Arizona 전기및 컴퓨터 공학과 공학박사

1987년 1월 ~ 1998년 3월 한국전자통신연구원, 선임연구원

1998년 3월 ~ 현재 한국외국어대학교 정보통신공학과 교수

관심분야 : 신호처리, 영상처리, 컴퓨터비전, 패턴인식, 미분기하 및 위상수학 응용