

천수 흐름 모의에서 불연속 지형에 따른 흐름 저항

황승용*

Hwang, Seung-Yong*

Flow Resistance by Discontinuous Topography in Simulating Shallow-water Flow

ABSTRACT

The hydrostatic pressure, thrust, and wall reflection by a step were studied as the flow resistance due to the discontinuous topography by using the Hwang's scheme in calculating fluxes with an approximate Riemann solver. Compared with the broad-crested weir experiments, the result simulated by using the thrust was the best among them. Hwang's scheme with the thrust by a step was applied to the side weir experiment. The results of simulation agreed well with those of the experiment. Compared to the existing depth-integrated model, the accuracy was slightly lowered, but the running time was reduced to about 20 %.

Key words : Shallow-water flow, Approximate riemann solver, Discontinuous topography, Thrust, Side weir

초록

근사 Riemann 해법으로 흐름률을 계산할 때 Hwang의 기법을 이용하여 불연속 지형에 따른 흐름 저항으로서 계단에 따른 정수압, 추력, 벽 반사 등을 검토하였다. 광경 위어 실험과 비교했을 때 추력을 이용하여 모의한 결과가 셋 중에서 가장 우수하였다. 계단에 따른 추력을 고려한 Hwang의 기법을 측면 위어 실험에 적용하였으며, 실험 결과와 잘 일치함을 확인하였다. 기존 수심적분 모형에 비해 정확도 저하가 조금 있으나, 계산 시간을 약 20 %로 줄일 수 있어 감수할 만한 수준이었다.

검색어 : 천수 흐름, 근사 Riemann 해법, 불연속 지형, 추력, 측면 위어

1. 서론

수심적분 모형인 천수방정식의 생성항(source term) 중에서 바닥 경사에 따른 항은 바닥 표고에 대한 공간 미분으로 표현된다. 계단의 전면과 같은 불연속 지형에서는 공간 미분이 불가능하므로 그 생성항을 정의할 수 없다. 결국, 기존 수심적분 모형으로는 천수 흐름이 불연속 지형을 지날 때 그것을 경사로 완화하는 것이 불가피하다. 불연속 지형을 실제와 가깝게 모의하기 위해서는 직접 구조물을 급경사로 두어야 했으며, 그로 인한 수치모의의 불안정성을 해소하는 모의 기법이 요구되었다(Hwang, 2015a).

불연속 지형을 지나는 흐름을 직접 해석하기 위해 Alcrudo and Benkhaldoun(2001)은 단일 계단을 지나는 천수 흐름의 Riemann 문제에 대해 에너지 방정식을 적용하여 다양한 초기조건에 따른 정확해(exact solution)를 제시하였다. Hwang(2014)은 계단을 지나는 흐름에 대해 Alcrudo and Benkhaldoun(2001)의 정확 Riemann 해법에 기반한 알고리즘(Hwang, 2013a; Hwang, 2013b)을 불연속 지형에 대한 내부 경계로 설정하여 모의하고 실험 결과와 비교하였다.

* 종신회원 · 교신저자 · 한국건설기술연구원 국토보전연구본부 수석연구원

(Corresponding Author · Korea Institute of Civil Engineering and Building Technology · syhwang@kict.re.kr)

Received November 22, 2018/ revised December 3, 2018/ accepted December 12, 2018

불연속 지형을 지나는 천수 흐름에 대한 정확해법 대신 천수방정식에 대한 수치모의 기법으로 지형의 불연속 문제를 우회할 수 있다. Zhou et al.(2002)은 Surface Gradient Method (SGM)를 불연속 지형에도 적용할 수 있도록 SGM for a Step (SGMS)를 제안하였다. 이 기법에서는 불연속 지형에 따른 흐름 저항으로서 흐름 단면의 급축소(abrupt contraction)에 의한 수두 손실을 반영하였다. Hwang(2015b)은 불연속 지형으로 물이 차거나 빠지는 경우에도 적용하기 위해 계단이 완전히 잠기지 않아도 적용할 수 있도록 SGMS를 보완한 바 있다. Prokof'ev(2005)의 접근도 SGMS와 유사하나, 계단에 의한 반작용(reaction)을 정수압으로 설정한 점이 다르다.

Hwang(2015c)은 계단과 같은 불연속 지형을 지나는 천수 흐름의 해석에서 계단에 따른 흐름 저항이 지배적인 계단 전면과 비교적 그 영향이 덜한 계단의 윗부분을 구분하여 흐름률(flux)을 계산하는 새로운 기법을 제안하였다. Hwang(2015c)은 불연속 지형에 의한 흐름 저항으로서 Prokof'ev(2005)의 연구와 마찬가지로 정수압을 부여하였으며, 계단이 완전히 잠기지 않아 흐름이 전면에 막혀있는 경우에 대해서는 벽 경계조건(wall boundary condition)을 부여하였다. 또한, Hwang(2016)은 계단에 따른 추력(thrust)과 항력(drag)의 영향을 불연속 지형인 측면 위어에 대한 실험실 실험(Kim, 2013)에 대해 검토한 바 있다. Hwang(2018)은 계단이 완전히 잠기지 않을 때 계단 전면이 벽 경계로 작용됨에 착안하여 불연속 지형에 따른 흐름 저항으로서 벽에 의한 반사를 고려하여 Kim(2013)의 실험에 적용한 바 있다.

이 연구에서는 불연속 지형에 따른 흐름 저항을 평가하는 방법으로서 정수압, 추력, 벽 반사 등을 검토한 Hwang(2015c, 2016, and 2018)의 연구를 종합하고 Kim(2013)의 측면 위어 실험 결과와 비교하여 그 영향에 대해 검토한다. 먼저 이론 검토로서 계단에 따른 흐름 저항에 대한 세 가지 방법, 지배 방정식과 수치해법, Hwang(2015c)의 기법 등에 설명한다. 광정 위어(broad-crested weir) 실험에 대해 세 가지 방법을 분석하고 측면 위어에 대한 실험에 적용하여 그 결과에 대해 토의한다.

2. 이론

2.1 불연속 지형에 따른 흐름 저항

천수 흐름이 계단과 같은 불연속 지형을 지날 때, 단일 계단에 따른 흐름 저항을 Fig. 1과 함께 살펴볼 수 있다. 먼저, 계단 전면에 작용하는 정수압, P_w 는 다음과 같다(Chow, 1959; Hwang, 2015c).

$$P_w/\rho = 0.5g\Delta b(2h_1 - \Delta b) \quad (1)$$

여기에서 ρ 는 물의 밀도, g 는 중력가속도, Δb 는 계단의 높이, h 는 수심이고 아래 첨자는 그 위치이다(Fig. 1 참조). 또한, Fig. 1의 ①과 ②에 대해 에너지와 운동량 원리를 적용하여 추력, P_f 를 구하면 다음과 같다(Henderson, 1966; Hwang, 2016). 이때, 계단에 따른 에너지 손실은 고려되지 않는다.

$$P_f/\rho = 0.5g\{(h_1 - h_2)^3 + 4h_1h_2\Delta b\}/(h_1 + h_2) \quad (2)$$

Eqs. (1) and (2)를 살펴보면, 계단 전과 후의 수위가 같으면(즉, $h_1 = h_2 + \Delta b$), Eq. (2)는 Eq. (1)과 같다. 계단을 오르는 천수 흐름이 상류(subcritical flow)라면 계단 위 수위는 계단 상류에서 수위보다 낮으므로 Eq. (2)에 의한 추력이 Eq. (1)에 의한 정수압보다 약간 더 작다.

계단이 잠기지 않아 그 전면이 흐름을 막는 벽으로 작용될 때, 1차원 천수 방정식에 근사 Riemann 해법의 일종인 HLL-형 기법을 적용하여 벽에 의한 반사, P_r 를 구해보면 다음과 같다(Hwang, 2015c; Hwang, 2018).

$$P_r/\rho = 0.5gh_1^2 + q(c_1 + u_1 + |u_1|) \quad (3)$$

여기에서 $c \equiv \sqrt{gh}$, u 는 유속이고 $q \equiv hu$ 이다. Hwang(2015c)이 제시한 식은 Eq. (3)의 우변에서 두 번째 항이 실수로 누락된 것이다.

2.2 지배 방정식과 수치 해법

2차원 천수 흐름에 대한 지배방정식은 다음과 같다(Weiyan, 1992).

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (4a)$$

여기에서 아래 첨자 t 는 시간, x 와 y 는 공간에 대한 편미분을

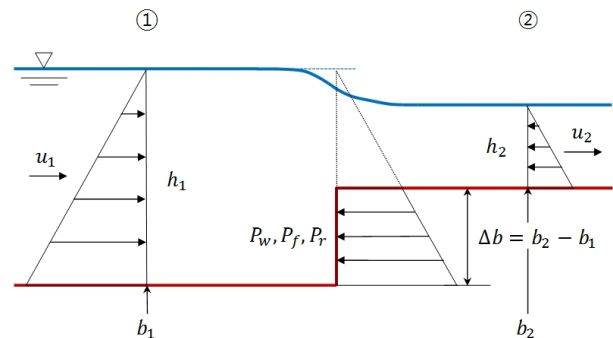


Fig. 1. Definition Sketch of Shallow-Water Flow Over a Step

의미한다. 또한, 보존변수(conservative variable)의 벡터, \mathbf{U} , x 방향의 흐름률 벡터, \mathbf{F} , y 방향의 흐름률 벡터, \mathbf{G} , 생성항 벡터, \mathbf{S} 는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = [h, hu, hv]^T \quad (4b)$$

$$\mathbf{F} = [hu, hu^2 + gh^2/2, huv]^T \quad (4c)$$

$$\mathbf{G} = [hv, huv, hv^2 + gh^2/2]^T \quad (4d)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_f \quad (4e)$$

여기에서 v 는 y 방향 유속이고 \mathbf{S}_0 와 \mathbf{S}_f 는 각각 바닥 경사와 마찰에 의한 생성항으로 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_0 = [0, -ghb_x, -ghb_y]^T \quad (4f)$$

$$\mathbf{S}_f = [0, -m^2gh^{-1/3}u\sqrt{u^2+v^2}, -m^2gh^{-1/3}v\sqrt{u^2+v^2}]^T \quad (4g)$$

여기에서 b 는 바닥 표고이고 m 은 Manning의 조도계수이다.

이론 전개의 간결함을 위해 Eq. (4)로부터 차원을 줄여 다음과 같은 1차원 천수방정식에 대해 검토한다.

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{S} \quad (5a)$$

$$\mathbf{U} = [h, q]^T \quad (5b)$$

$$\mathbf{F} = [q, q^2/h + gh^2/2]^T \quad (5c)$$

$$\mathbf{S} = [0, -ghb_x - m^2gh^{-1/3}u^2]^T \quad (5d)$$

Eq. (5)에 유한체적법을 적용하여 계산 영역 내 어떤 계산 격자, i 에 적용하면 다음과 같다(LeVeque, 2002).

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}) \Delta t / \Delta x + \Delta t \mathbf{S}_i \quad (6)$$

여기에서 아래 첨자, i 는 격자의 중앙, $i-1/2$ 과 $i+1/2$ 은 각각 격자의 왼쪽과 오른쪽 변의 위치를 의미한다. 또한, n 은 시간 단계, Δx 는 계산 격자의 공간 간격이고 Δt 는 시간 간격이다.

Eq. (6)에서 흐름률을 결정하기 위하여 어떤 근사 Riemann 해법, \mathcal{R} 를 격자의 오른쪽 변, $i+1/2$ 에 적용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathcal{R}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L, \mathbf{U}_{i+1/2}^R) \quad (7)$$

여기에서 위 첨자 L 과 R 은 그 변의 왼쪽과 오른쪽 위치를 의미한다. 이 연구에 적용된 근사 Riemann 해법은 HLLL 기법으로서 그에 대한 자세한 설명을 Linde(2002) 또는 Hwang and Lee(2012)의 연구에서 참조할 수 있다.

2.3 Hwang(2015c)의 기법

계단과 같은 불연속 지형을 지나는 흐름에 대해, Fig. 2와 같이, 계단에 따른 저항이 지배적인 계단의 전면부와 그 위를 지나는 흐름 영역으로 구분하여 해석한다(Hwang, 2015c). 따라서 계단의 전면에 인접한 계산 격자, i 의 한 변, $i+1/2$ 에서 흐름률은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \bar{\mathbf{F}}_{i+1/2} + \underline{\mathbf{F}}_{i+1/2} \quad (8)$$

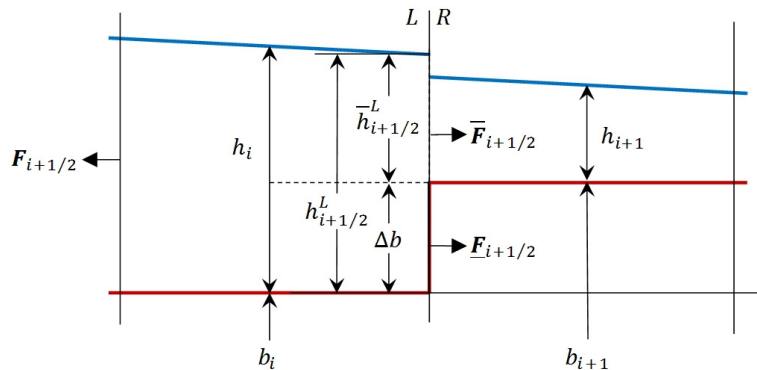


Fig. 2. Definition Sketch of Computational Cell with a Step

여기에서 윗줄과 아랫줄은 각각 계단의 위와 아래를 의미하며, $\bar{F}_{i+1/2}$ 은 Eq. (7)을 적용하여 다음과 같다.

$$\bar{F}_{i+1/2} = \mathcal{R}(\bar{U}_{i+1/2}^L, U_{i+1/2}^R) \quad (9)$$

여기에서 계단 위 흐름에 대한 보존변수, $\bar{U}_{i+1/2}^L = [\bar{h}_{i+1/2}^L, \bar{q}_{i+1/2}^L]^T$ 이다. 또한, $\bar{h}_{i+1/2}^L = h_{i+1/2}^L - \Delta b$ 이고 $\bar{q}_{i+1/2}^L = q_{i+1/2}^L (\bar{h}_{i+1/2}^L / h_{i+1/2}^L)$ 이다.

Eq. (8)에서 $F_{i+1/2} = [0, F_{i+1/2}]^T$ 이다. Eqs. (1) ~ (3)에 맞추어 계단에 따른 흐름 저항에 대해 세 가지 다른 방법으로 흐름률, $F_{i+1/2}$ 을 설정할 수 있다. 먼저 Eq. (1)로부터 정수압에 따른 흐름률은 다음과 같다(Hwang, 2015c).

$$F_{i+1/2}^w = 0.5g\Delta b(2h_{i+1/2}^L - \Delta b) \quad (10)$$

그리고 Eq. (2)로부터 추력에 따른 흐름률은 다음과 같다.

$$\frac{F_{i+1/2}^f}{(h_{i+1/2}^L + h_{i+1/2}^R)} = 0.5g \left\{ (h_{i+1/2}^L - h_{i+1/2}^R)^3 + 4h_{i+1/2}^L h_{i+1/2}^R \Delta b \right\} \quad (11)$$

마지막으로 벽 반사에 따른 흐름률은 Eqs. (1) and (3)으로부터 다음과 같다.

$$\frac{F_{i+1/2}^r}{(c_{i+1/2}^L + u_{i+1/2}^L + |u_{i+1/2}^L|)} = 0.5g\Delta b(2h_{i+1/2}^L - \Delta b) + q_{i+1/2}^L \quad (12)$$

여기에서 $q_{i+1/2}^L = q_{i+1/2}^L (\Delta b / h_{i+1/2}^L)$ 이다. Eqs. (10) and (12)를 살펴보면, 정수(still water)에서 Eq. (12)는 Eq. (10)과 같다. 만일 계단을 오르는 흐름이 발생된다면($u_{i+1/2}^L > 0$), 벽 반사는 Eq. (10)에 의한 정수압보다 Eq. (12)에서 우변의 두 번째 항만큼 더 크다.

3. 적용

3.1 광정 위어 실험

Henri-Émile Bazin은 1886년에 다양한 형태의 위어에 대한 실험에 착수하였다(Horton, 1907). 그 중에서 Kim(2013)의 실험에서 사용된 측면 위어와 폭 대 높이의 비가 비슷하고 월류 양상이 ‘협정 위어’(narrow-crested weir)에 해당하는 실험 경우가 Bazin의 실험 No. 113이다. 위어 상류에서 흐름의 수두(head)를 위어

마루로부터 잼 거리(H)에 대한 위어 폭(W)의 비(H/W)가 0.4와 1.5 사이에 있으면 협정 위어로 불린다(Govinda Rao and Muralidhar, 1963). 이 연구에서는 계단에 따른 흐름 저항에 대해 분석하기 위해 그 실험 경우를 선정하였다.

Bazin의 실험 No. 113은 폭, 0.4 m이고 높이, 0.75 m인 위어에 대해 상류 수위를 달리하면서 모두 19회에 걸쳐 월류량을 잼 것이다(Horton, 1907). 그 중에서 협정 위어에 해당하는 측정은 14회였다. 수로 길이를 7 m, 위어 위치를 상류로부터 5 m에 두고 0.05 m 간격으로 분할하여 1차원 수치 모의를 실시하였다. Eqs. (10) ~ (12)에 따른 수치 모의와 실험 결과를 Fig. 3에 보였다. 그림에서 가로축은 $\sqrt{2gH^3}$, 세로축은 단위 유량(q)이므로 그 경시는 유량 계수(C_d)가 된다. 그림에서 실험 결과는 흑색 원(‘Experiment’), 정수압에 따른 결과는 녹색 원(‘Hydrostatic’), 추력에 따른 결과는 청색 원(‘Thrust’), 벽 반사에 따른 결과는 적색 원(‘Reflection’)으로 보였다. 유량 계수를 살펴보면, 불연속 지형에 따른 추력으로 흐름률을 계산한 결과가 실험 결과에 가장 근접한다. 반면, 계단에 의한 반사에 따른 결과는 실험 결과와 차이가 가장 크다. 이는 2장에서 Eqs. (1) and (2)와 Eqs. (10) and (12)의 대조를 통해 검토한 바와 다르지 않다.

Bazin의 실험 No. 113에서 월류량이 최소, 중앙, 최대인 경우에 대해 2차원 수치모의도 병행하였다. 하폭을 Horton(1907)에 따라 0.305 m로 두고 계산 영역을 536개의 삼각형 격자로 분할하였다. Fig. 3에 2차원 모의 결과도 함께 보였으며, 채운 원으로 표시하였다. 그림으로부터 문제의 차원을 달리하여도 결과의 차이가 거의 없음을 확인할 수 있다.

3.2 측면 위어 실험

Kim(2013)은 2 m 길이의 측면 위어로 연결된 폭, 0.8 m, 길이 16 m의 수로와 4 m × 10 m의 사각형 저류지에 대해 부정류

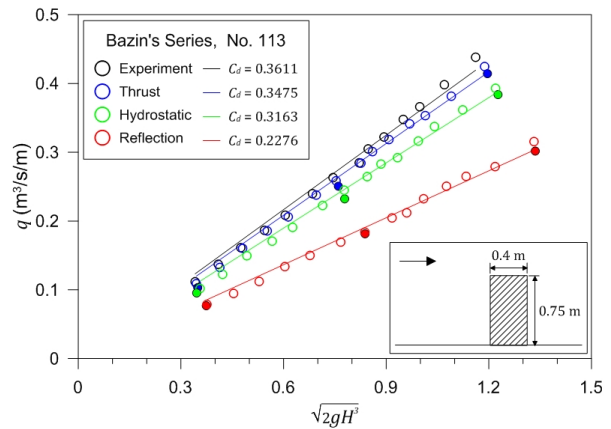


Fig. 3. Bazin's Experiment Series, No. 113

실험을 수행하였다(Fig. 4 참조). 실험 수로의 바닥 경사는 0.0015 이고 그 위에 설치된 측면 위어의 마루 높이는 0.282 m이다. 실험 수로 내 3개 정점, 단면 No. 0, No. 3, No. 16의 중앙과 저류지 내 4개 정점, S1, S2, S3, S4에서 초음파 수위계로 수위를 측정하였다.

Hwang(2015a)은 Kim(2013)의 실험에 대해 2차원 수심적분 수치모형을 적용한 바 있다. 그 중에서 저류지 내에서 측정한 수위와 비교한 경우는 저류지와 본류 사이의 흐름 교환이 일어나는 실험 Case 6이다. 이 실험 경우에서 저류지 내 초기 수위는 0.24 m이고 측면 위어를 통한 월류가 계속되어 저류지의 용량이 초과되면, 위어가 잠기면서 수로로 역류가 일어나게 된다(Kim, 2013).

실험 Case 6에 대해 Hwang(2015a)은 실험 수로와 저류지가 포함된 계산 영역을 1,662개의 삼각형 격자로 분할하였다. 기존 수심적분 모형의 한계로 인해 직립의 측면 위어를 경사면으로 완화할 수밖에 없었다. 직각에 가깝게 경사각을 높이려면 측면 위어 근방에서라도 계산 격자를 조밀하게 배치하는 것이 불가피하다. 측면 위어 근방만 확대한 Fig. 5의 좌측 위 그림('SLOPE')에서 위어의 경사각은 약 78°이다. 그림에서 우측은 Hwang(2015c)의 기법을 적용하기 위해 실험 수로와 저류지를 880개의 삼각형 격자로 분할한 배치이다. 즉, 계산 격자의 수가 'SLOPE'에서 사용된 격자 수의 절반을 약간 넘는 정도이며, 이러한 차이는 계산 시간의 차이로 드러나게 된다. 'SLOPE'를 이용하는 기존 수심적분 모형의

계산 시간이 Hwang(2015c)의 기법에 비해 실험 경우에 따라 약 4.5~5.7 배 이상 더 걸리는 것을 수치실험에서 확인하였다(Table 1 참조). Fig. 5에서 좌측 아래 'STEP'는 측면 위어로 연결된 부분을 확대한 그림이다. 이 격자 배치에 대해 기존 수심적분 모형을 적용하면, 경사각이 약 62°로 낮아져 실험과 동떨어진 결과를 낳는다. 따라서 기존 수심적분 모형으로는 정확도를 유지하면서 계산 시간을 더 줄이는 것은 어려운 실정이다.

Hwang(2015a)은 측면 위어 하류의 단면, No. 3에서 측정 수위에 대한 모의 결과의 RMS 오차가 1.5 mm이고 잠긴 흐름에 의한 영향으로 측면 위어에 대한 수위-유량 관계가 선형(linear)이 아닌 고리(loop) 모양으로 나타난다고 밝혔다. Fig. 6은 Hwang(2015c)의 기법에 Eq. (11)의 계단에 따른 추력을 이용하여 흐름률을 계산한 결과를 보인 그림이다. 단면, No. 3에서 RMS 오차는 1.4 mm로서 실험 결과에 잘 부합된다. 측면 위어

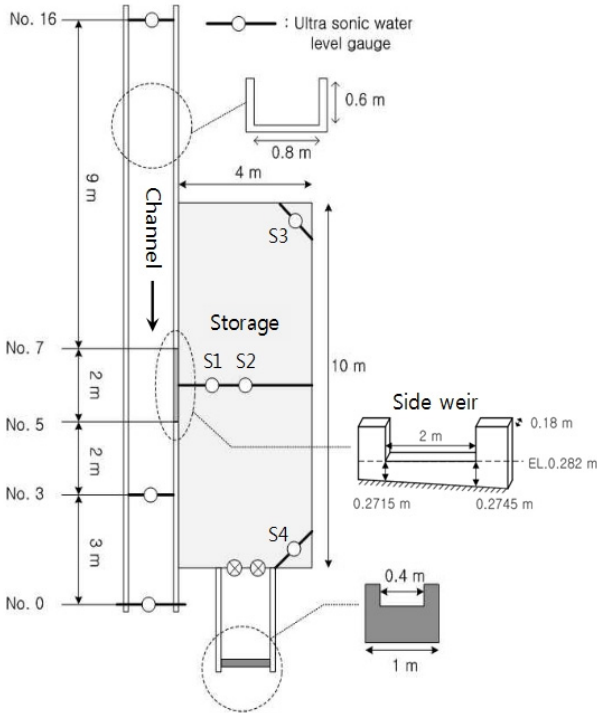


Fig. 4. Experimental Setup for Side Weir (Kim, 2013)

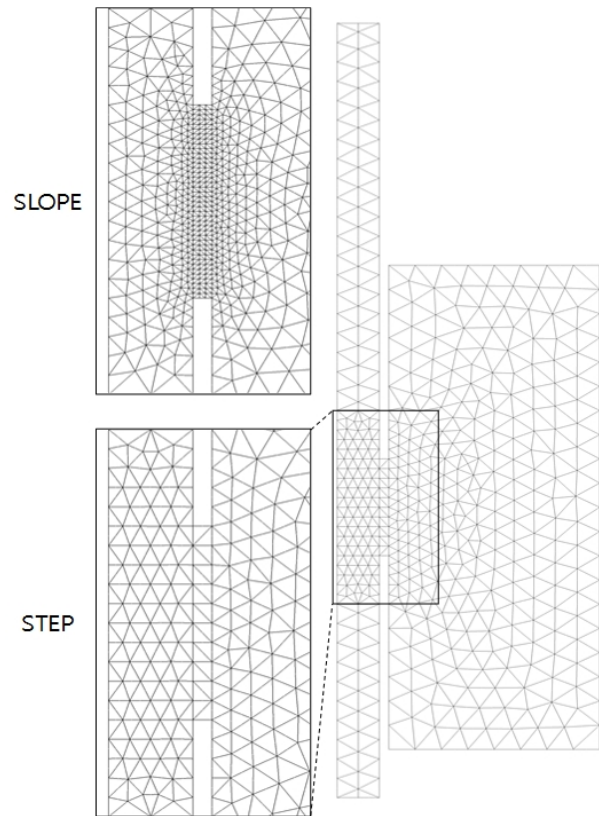


Fig. 5. Layout of Computational Cells for Side Weir Experiment

Table 1. Comparison of SLOPE and STEP (Side Weir Exp. Case 6)

Method	No. Cells	Run time rel. to STEP	Angle of side weir
SLOPE	1,662	5.7	78°
STEP	880	1.0	90°

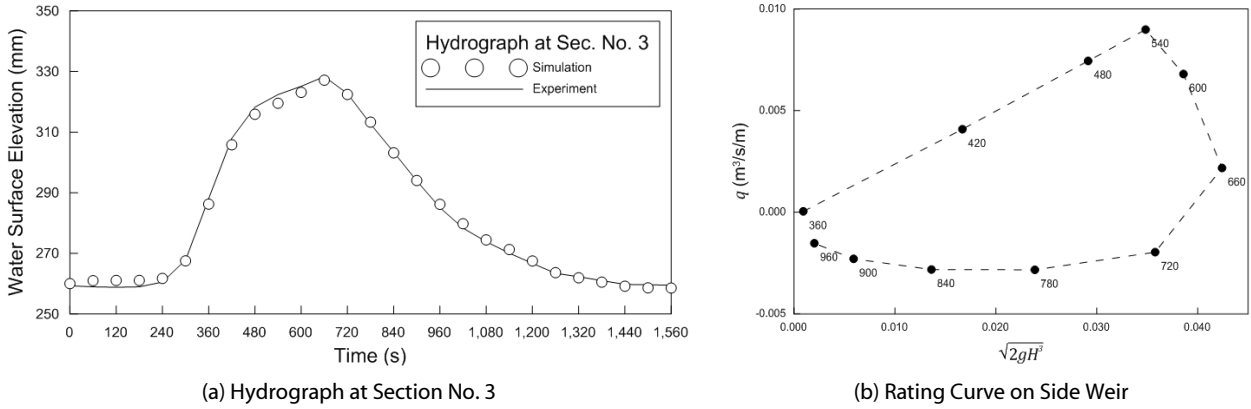


Fig. 6. Hydrograph and Rating Curve (Side Weir Exp. Case 6)

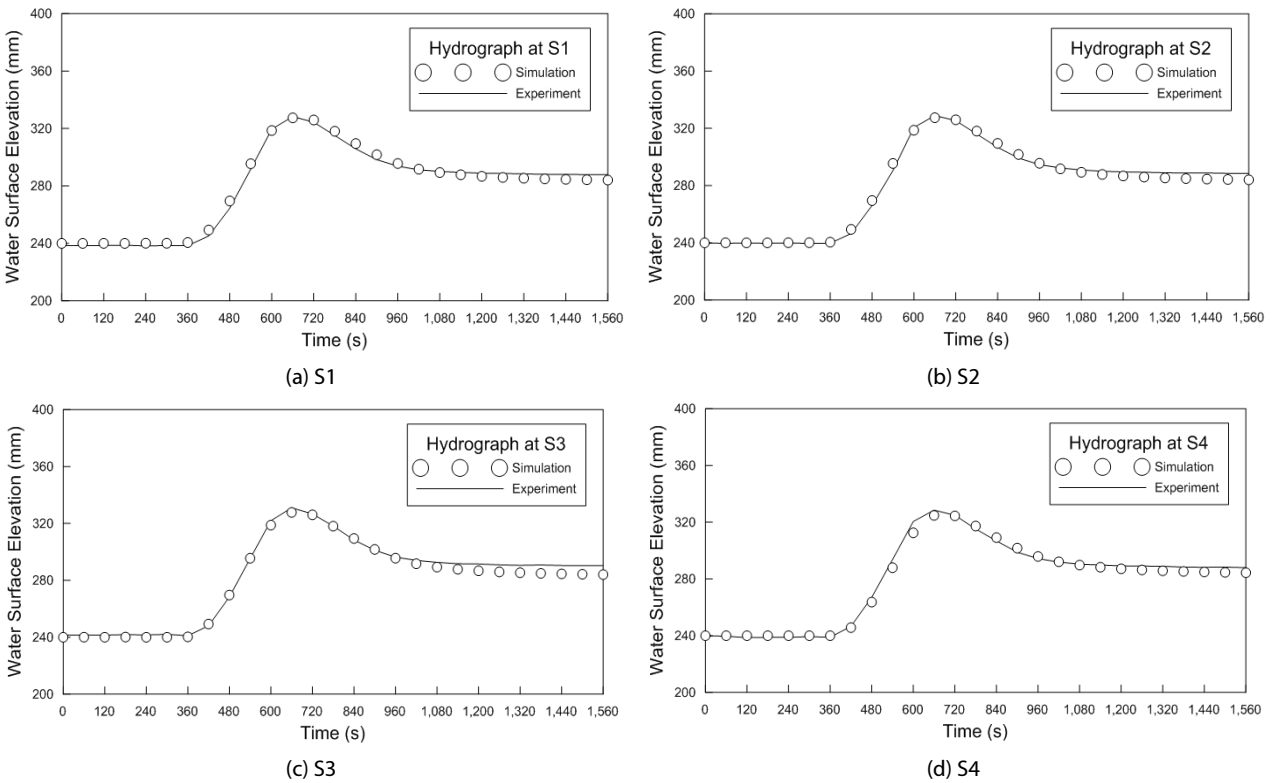


Fig. 7. Hydrographs in Storage (Side Weir Exp. Case 6)

위에서 수위-유량 관계도 고리 모양을 이루는 것을 확인할 수 있다(Fig. 6 참조). Hwang(2015a)은 저류지 내에서 기존 수심적분 모형에 의한 RMS 오차가 2.3~3.3 mm의 범위 안에 든다고 보고하였다. Fig. 7은 네 정점에서 측정된 수위와 모의 결과를 비교한 그림으로 모의 결과는 실험 결과와 잘 일치한다. RMS 오차는 Hwang(2015a)의 결과에 비해 약간 더 커서 2.7~4.1 mm의 범위 안에 있었다.

4. 결론 및 향후 연구

Hwang(2015c)의 기법에 따른 흐름률 계산에 불연속 지형에 따른 흐름 저항으로서 계단에 따른 정수압, 추력, 벽 반사 등을 검토하였다. 이 세 가지 방법을 광정 위어 실험에 적용하였는데, 불연속 지형에 따른 추력을 이용하여 흐름률을 계산한 결과가 실험 결과에 가장 잘 부합하였다. 이를 바탕으로 불연속 지형에 따른 추력을 이용하는 Hwang(2015c)의 기법을 측면 위어에 대한

실험실 실험에서 잠긴 흐름이 발생하는 Kim(2013)의 실험 Case 6에 적용하였다. Hwang(2015a)은 동일한 경우에 대해 기존 수심 적분 모형을 적용하여 저류지 내 수위를 실험 결과와 비교한 바 있어 두 모형의 결과를 비교할 수 있었다.

불연속 지형에 따른 추력을 고려한 Hwang(2015c)의 기법에 따른 결과는 측면 위어 실험 결과와 잘 일치함을 확인하였다. 측정 수위에 대한 RMS 오차를 따져보았을 때 기존 수심적분 모형에 비해 정확도가 약간 낮으나, Hwang(2015c)의 기법 덕분에 계산 시간을 약 20 %로 줄일 수 있었다. 따라서 하천에서 보나 옹벽과 같은 불연속 지형을 넘나드는 흐름에 대해 어느 정도 정확도를 유지하면서도 빠른 계산이 가능하다.

Kim(2013)의 실험에서 측면 위어가 잠기지 않고 저류지로 월류만 이루어지는 실험 Case 2에 대한 수치실험에서 추력에 따른 월류량이 과소 추정되는 경우를 확인하였다. 향후 연구로서 정수압으로 가정한 압력을 계단을 지나는 실제 흐름에 맞추어 보정할 수 있다면, 문제의 해결에 도움이 될 것으로 기대된다.

감사의 글

이 연구는 한국건설기술연구원(주요사업 과제번호: 20180485-001)의 일부 지원에 의한 것이며, 선행 연구에 대해서는 국토교통과학기술진흥원(과제번호: 14CCTI-C063749)의 일부 지원이 있었음을 밝혀둔다.

본 논문은 2018 CONVENTION 논문을 수정·보완하여 작성되었습니다.

References

- Alcrudo, F. and Benkhaldoun, F. (2001). "Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step." *Comput. & Fluids*, Vol. 30, No. 6, pp. 643-671.
- Chow, V. T. (1959). *Open-channel hydraulics*, McGraw Hill Book Company, Inc.
- Govinda Rao, N. S. and Muralidhar, D. (1963). "Discharge characteristics of weirs of finite-crest width." *Houille Blanche*, Vol. 18, pp. 537-545.
- Henderson, F. M. (1966). *Open channel flow*, Macmillan Publishing Co., Inc.
- Horton, R. E. (1907). *Weir experiments, coefficients, and formulas*, Water-Supply and Irrigation Paper No. 200, USGS.
- Hwang, S.-Y. (2013a). "Exact and approximate Riemann solvers for the shallow-water flows over a step." *Proc. KWRA Conf.*, KWRA, p. 575 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2013b). "Exact solutions of the Riemann problem for the shallow-water flow over a step to the dry-bed." *Proc. 39th KSCE Conf.*, KSCE, pp. 1515-1518 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2014). "A study on imposing exact solutions as internal boundary conditions in simulating the shallow-water flows over a step." *J. Korean Soc. Civ. Eng.*, KSCE, Vol. 34, No. 2, pp. 479-492 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2015a). "2D numerical simulations for shallow-water flows over a side weir." *Journal KWRA*, Vol. 48, No. 11, pp. 957-967 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2015b). "2D numerical simulations for shallow-water flows over discontinuous topography." *Proc. 41th KSCE Conf.*, KSCE, pp. 183-184 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2015c). "A novel scheme to depth-averaged model for analyzing shallow-water flows over discontinuous topography." *J. Korean Soc. Civ. Eng.*, Vol. 35, No. 6, pp. 1237-1246 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2016). "Numerical analysis with depth-averaged model for evaluating overflow of side weir." *Proc. 42th KSCE Conf.*, KSCE, pp. 210-211 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. (2018). "Influence of thrust by discontinuous topography in analyzing shallow-water flow." *Proc. 44th KSCE Conf.*, KSCE, pp. 95-96 (in Korean).
- Hwang, S.-Y. and Lee, S. H. (2012). "An application of the HLLL approximate Riemann solver to the shallow water equations." *J. Korean Soc. Civ. Eng.*, Vol. 32, No. 1, pp. 21-27 (in Korean).
- Kim, S. H. (2013). *Analysis on flood-control effect of side-weir detention basin considering the flow pattern over the weir*, Mater's thesis, Myongji University (in Korean).
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume method for hyperbolic problems*, Cambridge Univ. Press.
- Linde, T. (2002). "A practical, general-purpose, two-state HLL Riemann solver for hyperbolic conservation laws." *Int. Journal Numer. Meth. Fluids*, Vol. 40, No. 3-4, pp. 391-402.
- Prokof'ev, V. A. (2005). "Two-dimensional horizontal numerical model of open flow over a bed with obstacles." *Water Resources*, Vol. 32, No. 3, pp. 252-264.
- Weiyang, T. (1992). *Shallow water hydrodynamics*, Elsevier Science Publishers.
- Zhou, J. G., Causon, D. M., Ingram, D. M. and Mingham, C. G. (2002). "Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography." *Int. Journal Numer. Meth. Fluids*, Vol. 38, No. 8, pp. 769-788.