

고무 재질의 내구해석 기법과 시험

(주)브이이엔지 이원재

1. 개요

고무 재료는 탄성 복원 특성과 진동 감쇠 특성이 우수하여 타이어, 실(seal), 호스, 벨트, 신발 등, 변형이 크거나 방진 또는 차폐를 목적으로 하는 용도로 널리 사용되고 있다. 순수한 고무뿐만 아니라, 폼(foam) 및 열가소성 고무(TPE, thermoplastic elastomer) 등, 고무는 산업계와 일상생활에 쓰이지 않는 곳이 없는 만큼 가장 중요한 재료 중 하나이다.

과거의 고무 부품 설계는 주로 실제 시험을 포함한 경험적 데이터를 바탕으로 이루어졌으나, 현재는 컴퓨터 해석 기술의 발달로, 시제품 제작 전에 모든 성능을 고려한 설계가 가능하게 되었다. 고무의 여러 성능 지표 중, 내구수명은 신뢰성 있는 제품 개발에 있어서 필수적인 고려 사항이 되어 왔다. 그러나 고무의 내구수명은, 하중 이력, 환경 요인, 성분 배합 및 응답 특성 등과 같은 다양한 원인들이 복합적으로 작용하여 나타나므로, 신뢰성 있는 내구해석이 간단한 주제는 아니었다.

본 총설에서는, 고무의 내구수명을 예측하는 방법에 대해 살펴보고, 고무내구 해석틀인 Endurica의 솔루션에 대해 소개하고자 한다. 이와 더불어 고무 및 고분자 재질에 대한 재료 시험과 이를 해석에 적용할 수 있도록 하는 해석물성 변환 서비스에 대하여 언급하였다.

2. 고무의 내구해석 방법

고무 부품에 정적 또는 동적 하중이 지속적으로 작용하면, 피로 손상이 누적되어 파손이 발생한다. 고무의 내구수명을 예측하기 위해, 가장 먼저 생각해야 할 것은 피로 손상 파라미터를 결정하는 것이다. 일반적으로 응력, 변형률, 변형률 에너지 밀도(strain energy density) 그리고 에너지 해방률(energy release rate) 등을 손상 파라미터로 정의한다.¹

한편, 파손 프로세스에 대한 메커니즘을 볼 때, 내구수명은, 크랙 발생 수명과 크랙 진전 수명으로 나누어 생각할 수 있다. 따라서 내구해석 방법도 크랙, 크랙 발생 수명을 예측하는 방법과 크랙 진전 수명을 예측하는 방법으로 나눌 수 있다.

크랙 발생 수명을 예측하는 방법은, 탄성론을 기반으로 응력 또는 변형률을 손상 파라미터로 정의하고, 크랙 진전 수명을 예측하는 방법은, 파괴 역학을 기반으로, 크랙 진전 속도를 에너지 해방률을 갖고 정의하는 방법을 쓰고 있다. 각각의 방법은 장단점을 갖고 있고, 여기에 대하여 간단하게 기술하려고 한다.

(1) 크랙 발생 수명 방법

크랙 발생 수명을 예측하는 방법은 고전적인 방법²으로, 응력 이력 또는 변형률 이력을 갖고, 파단 되는 시점을 예측하는 방법이다. 1860년대 Wohler의 연구² 이래로, 이 방법은 주로 금속 재료에 적용되어 왔고, 1940년대에 고무 재료에 적용^{3,4} 하기 시작하여 현재^{5,6}에도 널리 쓰이는 방법이다.

주로 많이 쓰이는 손상 파라미터는, 최대 주변형률(maximum principal strain)과 변형률 에너지 밀도이다. 일반적인 피로 시험이 변위 제어 방식을 통해, 주변형률을 직접적으로 다루게 되므로⁷, 최대 주변형률은, 물체의 거동을 정의하는데 있어서 가장 직관적인 물리량이다.



이 원 재

2002 한국과학기술원 기계공학과(박사)
 2001-2012 현대자동차 연구개발본부 책임연구원
 2012-2015 다쏘시스템코리아 상무
 2015- 현 브이이엔지 전무

Cadwell 등³은 천연 고무의 피로수명에 대한 연구를 수행하였다. 단순 인장과 전단 변형에 대해 동일한 변형률 진폭(amplitude)에서 최소 변형률 값이 증가할수록 피로 수명은 증가하였다. 일반적으로 변형률 결정화(strain crystallization) 특성이 있는 고무는 하중비, R값(최소하중 / 최대하중)이 증가할수록 수명이 증가하는 경향이 있다.⁸

Roberts와 Benzies⁹ 그리고 Roach¹⁰는 단순 인장과 이축 인장 조건에서의 피로 수명에 대한 연구를 수행하였다. 최대 주변형률을 손상 파라미터로 표시하면, 단순 인장에서의 수명이 이축 인장에서의 수명보다 길다는 사실을 제시하였다.

Ro¹¹는 위의 시험을 여러 가지 변형률을 써서 분석했으나, 단순 인장과 이축 인장의 결과를 모두 잘 재현하는 것을 찾을 수 없었다.

몇몇의 연구⁹⁻¹⁴는 변형률 에너지 밀도를 피로 손상 파라미터로 사용하였다. Roberts와 Benzies⁹ 그리고 Roach¹⁰는 변형률 에너지 밀도를 내구수명과 연관 지을 때, 이축인장의 피로수명이 단축인장의 그것 보다 재료에 따라 약 4배에서 16배 정도 긴 것을 보였다. Roach¹⁰는, 단순 인장에서는 변형률 에너지 밀도가 모두 크랙 진전에 쓰이나, 이축 인장에서는 변형률 에너지 밀도의 1/2만 쓰인다고 결론지었다.

Ro¹¹는 장수명 영역에서는, 변형률 에너지 밀도가 변형률보다 실제 현상에 더 잘 부합됨을 보였다. Findey 등¹⁵은 반복 응력 조건에서 변형률 에너지가 일정한 시험을 실시하였다.

변형률 에너지 밀도는 방향 정보가 없는 스칼라 값이므로, 크랙 방향을 표현하기가 어려운 단점이 있다. 특정 응력 상태에서, 변형률 에너지 밀도는 에너지 해방률과 관계되나 임의 조건에서 사용하기에는 제약이 있다.¹⁶⁻¹⁸

(2) 크랙 진전 수명 방법

크랙 진전 수명을 예측하는 방법은 초기 결함이 이미 있다고 가정하고, 이 결함이 성장하여 최종 크랙이 될 때까지의 수명을 계산한다. Griffith¹⁹는 금속 재료에 대하여 외부의 일과 변형률 에너지, 그리고 크랙 표면을 형성하는 에너지를 고려하는 파손 기준을 제안하였다.

크랙 진전을 다룬 Griffith¹⁹의 방법이 고무로 확장되어 연구되었다.²⁰⁻²² Thomas²³는 천연 고무에 대해 크랙 진전 현상을 분석하고, 에너지 해방률과 크랙 진전 속도의 관계식을 제안했다.

에너지 해방률은 크랙면의 단위 면적(dA) 당 저장된

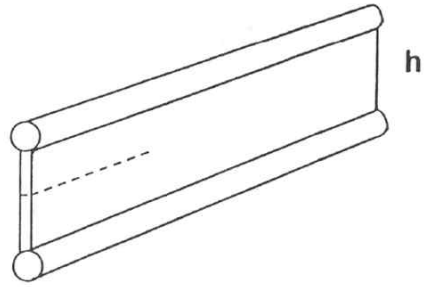


Figure 1. 크랙 진전 속도 시험²⁶

에너지 변화 (dU)이고, 고무에서는 찢김 에너지(tearing energy)와 같다.

$$T = - \frac{dU}{dA} \quad (\text{Equation 1})$$

Thomas²³는 하중비, R=0 조건에서 에너지 해방률에 따른 크랙 진전 속도를 시험으로부터 얻었다.

Rivlin과 Thomas²⁰는 임계 에너지 해방률(critical energy release rate)이 파단을 유발하고 이 값이 시편의 형상에 무관한 재질 상수가 됨을 보였다.

몇몇의 연구^{16,23,24}는 크랙 진전 속도가 에너지 해방률로 표시될 수 있음을 보였다. Lindley²⁵는 변형률 결정화 특성이 있는 고무는 하중비, R > 0에서 크랙 진전 속도가 지연됨을 보였다.

3. Endurica의 고무내구 수명 계산

Endurica는 에너지 해방률과 크랙 진전 속도를 갖고 고무의 내구수명을 계산하는데, 여기에서 전체적인 개념을 간단하게 나타나고자 한다.

고무 재료는 카본 블랙과 같은 배합 재료로 인해, 내부에 이미 크랙을 갖고 있다고 보는 것이 합리적이다. 이러한 초기 결함이 반복 하중으로 성장하고, 크랙 진전 속도를 통해, 파단 시의 크랙 길이가 될 때까지의 수명을 계산하는 것이 가능하다. 또한 에너지 해방률은 임의의 변형 상황에서도 적용 가능한, "재질의 고유한 물성"이 되는 장점이 있다.

일반적으로 행해지는 크랙 진전 시험은 Figure 1과 같이 높이:폭이 1:10되는 평면 인장 시편의 한 쪽을 잘라낸 후, 반복 하중 상태에서의 크랙 진전 길이를 측정한다.

이 때의 에너지 해방률은 Equation 2와 같은데, 크랙

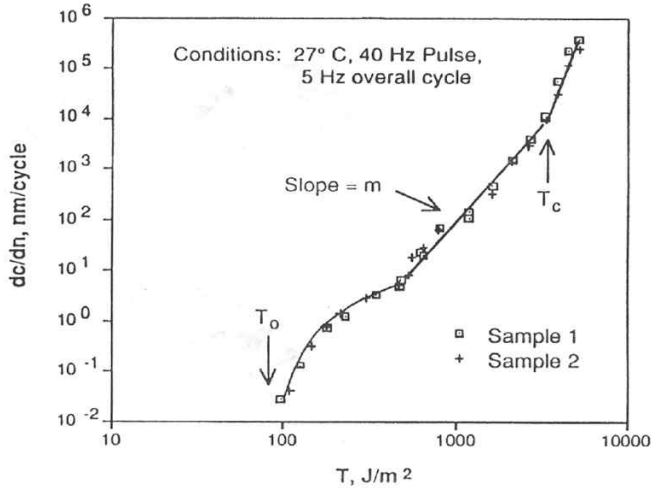


Figure 2. SBR 재질의 피로 크랙 진전 곡선²⁶

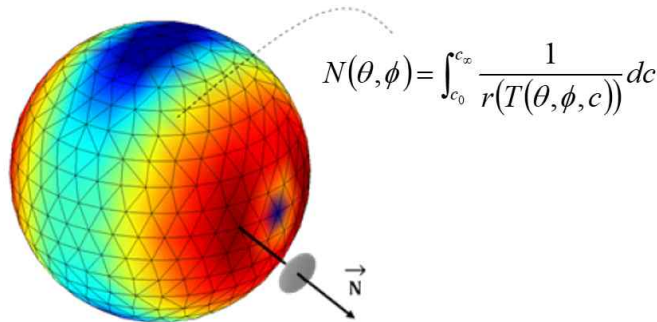


Figure 3. 최대 손상 평면(critical plane) 방법²⁸

길이와는 상관없는 장점이 있다. 여기서 W 는 변형률 에너지 밀도를, h 는 시편 높이를 의미한다.

$$T = -\frac{dU}{dA} = Wh \quad (\text{Equation 2})$$

Figure 2에 참고 문헌²⁶의 시험 결과를 나타내었다. 여기서 중요한 것은, x축의 에너지 해방률과, y축의 크랙 진전 속도가 log-log 선도에서 직선이 되는 기울기를 구하는 것이고, 시험 데이터의 추세선으로부터 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$r \equiv \frac{dc}{dN} = AT^m \quad (\text{Equation 3})$$

여기서, A 는 상수이고, m 은 크랙 진전 속도 선도의

기울기이다. 이 식을 초기 크랙 길이(c_0)에서부터 최종 크랙 길이(c_f)까지 적분함으로써, 임의의 형상 또는 임의의 하중 조건에서 수명이 계산된다.

$$N = \int_{c_0}^{c_f} \frac{1}{r} dc \quad (\text{Equation 4})$$

Equation 4에서, 초기 크랙 길이는, 시편 단위의 내구 시험을 실시하고 이 때의 시험-해석 상관성으로부터 유추할 수 있다.²⁷

또한, Figure 3과 같이 크랙이 가능한 모든 방향에서 손상도를 계산하는, 최대 손상 평면(critical plane) 방법을 쓰므로, 파손 모드가 반영되는 수명을 산출할 수 있다.²⁸

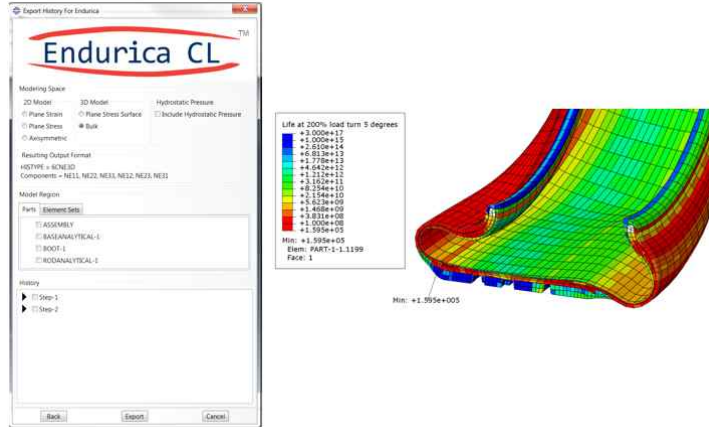


Figure 4. Abaqus 플러그인과 Endurica CL의 해석 결과

4. Endurica의 고무내구 해석 사례

Endurica(핀들레이, 미국)는 2008년도에 설립된 고무 내구에 대한 전문 업체로, 최초의 고무 내구수명 해석에 대한 상용 솔루션인 Endurica CL을 개발하였다.

설립자인 William V. Mars는 토레도 대학에서 고무 내구에 대한 연구로 박사 학위를 받았고, 여러 학회지 (Rubber Chemistry & Technology 및 Tire Science & Technology)의 편집장을 역임하였다.

Endurica에서 제공하는 해석 솔루션은, Endurica CL, Endurica DT, Endurica EIE 및 fa-safe/Rubber로 크게 4가지가 있다.

(1) Endurica CL

Endurica CL은 고무 내구에 특화된 해석 솔루션으로, 단일 내구 사이클에 대한 신뢰성 있는 내구수명을 예측한다.

구조 해석 결과(Abaqus, Ansys 및 MSC/Marc)로부터 손상 평면 방향에서 크랙 진전 속도를 통한 손상도를 계산하고, 각각의 구조 해석 솔버에 맞는 결과 파일을 제공한다.

Figure 4에 Abaqus/CAE 환경에서 작용하는 플러그인(plugin)과 해석 결과를 나타냈다.

(2) Endurica DT

이 모듈은 앞서 설명한 Endurica CL과 함께 사용되는 것으로, 여러 가지 중첩된 내구 시나리오에서 손상도가

누적되는 것을 고려할 수 있다. 또한 구조 해석-크랙 진전 해석의 동시 해석(co-simulation)으로 손상 누적이 따른 점진적 강성 저하를 반영하여 내구수명을 예측한다.

(3) Endurica EIE

시간 이력 하중(time history load)에 대한 효율적인 압축 엔진으로, 전체 시간에 대해 비선형 응력해석을 수행하는 대신, 참고 하중에 대한 결과를 조합하여 전체 시간의 응력 이력을 예측한다.

실하중 이력(real load history)을 반영하여 좀 더 사실적인 해석을 하는 경우, 막대한 계산 비용이 소요되는 비선형 응력 해석 결과를 최소의 계산 비용으로 충분한 신뢰성을 갖고 예측할 수 있다.

(4) fe-safe/Rubber

다쏘시스템 시뮬리아의 포트폴리오으로써, 범용 내구 해석 툴인 fe-safe 환경에서의 고무 내구해석(Endurica CL)을 지원한다.

(5) 적용 사례

Figure 5와 Figure 6은 Endurica CL의 손상 평면 방법을 검증한 사례이다. 하중비, $R=0$ 인 경우와, $R>0$ 인 경우에 대해 각도에 따른 손상도(크랙 방향)를 예측한 결과와 실제 시험에서의 파단 사진을 비교하여 나타내었다.²⁹⁾

손상 평면 방법은, 하중비, $R>0$ 에서 발생하는 변형률

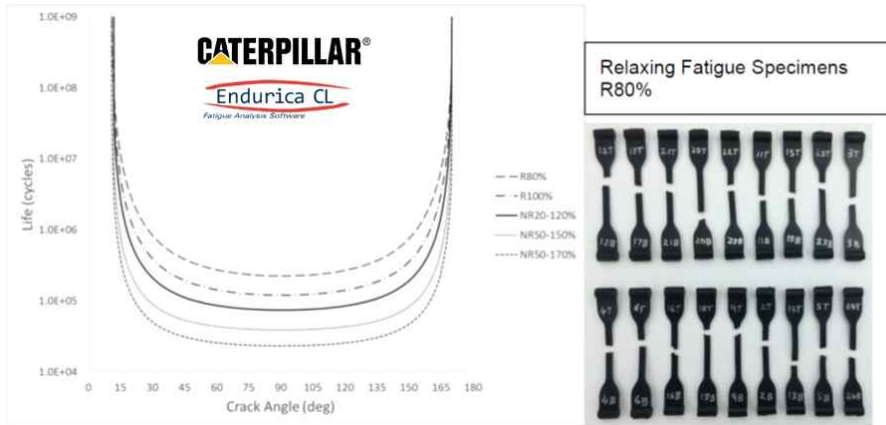


Figure 5. 변형을 결정화 특성이 없는 재질(no strain crystallization)의 내구해석²⁹

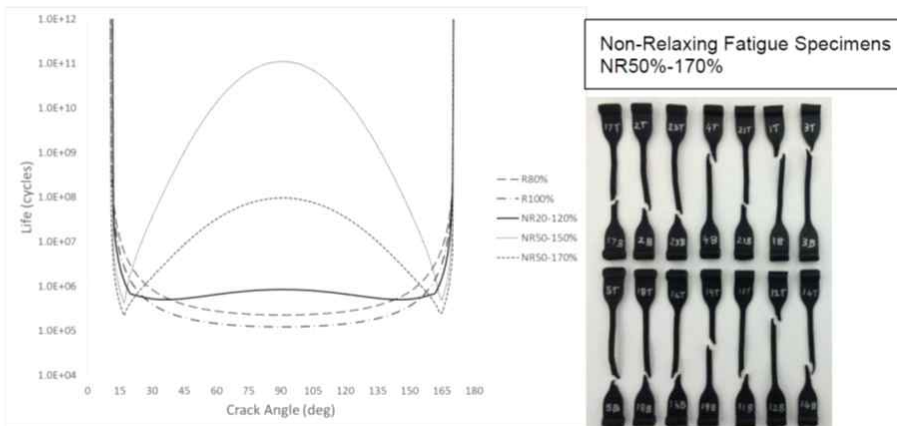


Figure 6. 변형을 결정화 특성이 있는 재질(strain crystallization)의 내구해석²⁹



탱크의 트랙 패드

파손 모드



Figure 7. 탱크 트랙 패드의 내구 파손³⁰

결정화 특성이 있는 고무의 손상 방향을 잘 반영하는 것을 알 수 있다.

Figure 7과 Figure 8은 탱크의 트랙 패드가 반복적인 열변형에 의해 내구 손상이 발생하는 것을 해석으로 예측하고 실제와 비교한 것이다. Endurica CL은 실제 제품

의 파손 위치를 정확히 모사하는 것을 알 수 있다.³⁰

Figure 9는 실 도로 하중에서 자동차 고무 부식의 내구해석 결과를 시험과 비교한 것이다.³¹

손상 평면 방법에 의한 Endurica CL은 실제 파손 위치

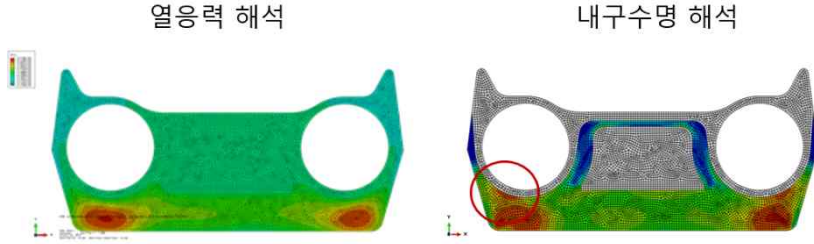


Figure 8. 탱크 트랙 패드의 내구해석³⁰

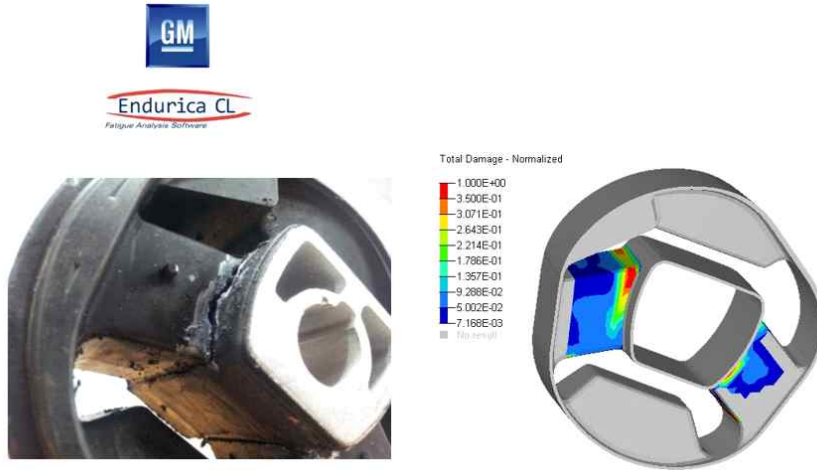


Figure 9. 자동차 고무 부식의 내구해석³¹

와 파손 수명을 신뢰성 있게 예측하고 있다.

Figure 10에 시간 영역에서의 하중을 나타냈는데, Endurica EIE를 이용하면, 시간영역에서의 응력 이력을 1만배 가속하여 빠르게 예측할 수 있다.

Figure 11은 자동차 고무 부식의 여러 하중 모드에 대한 내구해석 결과를 시험과 비교한 것이다. 3방향의 단축 시험과 이축 시험 조건에서, 해석수명이 실제 시험 결과를 잘 모사하고 있음을 보이고 있다.³²

5. 고무의 물성 시험

고무 부품의 정확한 해석을 위해서는 신뢰성 있는 물성 시험으로부터 얻어진 해석 물성이 필요하다. 구조 해석을 위하여, 기본적으로 초탄성(hyperelastic) 시험과 체적 압축(volumetric compression) 시험이 필요하고, 내구해석을 위하여, 찢김(static tearing) 시험과 크랙 진전(crack growth) 시험이 필요하다.

(1) 초탄성 시험

고무는 대변형의 비선형 거동을 하고, 반복 응력-변형을 거동은 단조(monotonic) 하중에서의 거동과는 다른 특성을 보일 뿐 만 아니라, 변형 모드에 따라 응력-변형을 선도가 상이한 특성이 있다.

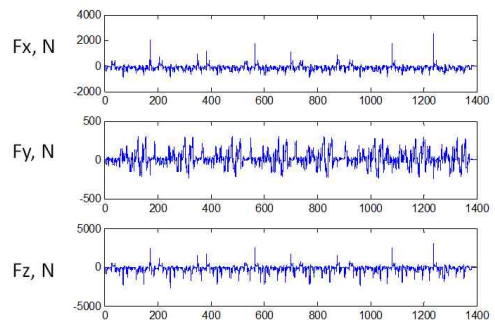
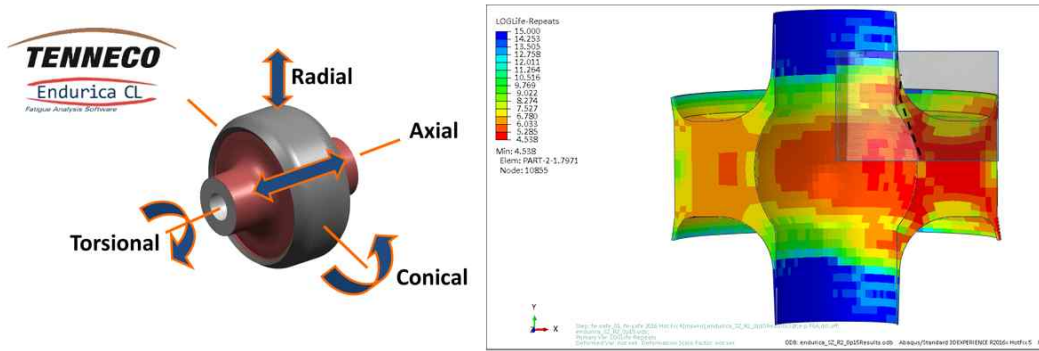


Figure 10. 자동차 고무 부식의 시간 이력 하중³¹



Test Conditions	+/- 7,000N	+/- 2,000N	+/- 43°	+/- 4,500N & +/- 30°
Termination Conditions	+/- 9.5 mm	+/-22 mm	80,000 Cycles	+/-7.75 mm Radial Travel
Simulated Cycles (1 mm Tear)	17,257	65,912	37,668	12,162
Cycle of Initial Rate Change	24,132	77,275	50,000	13,362
Part Rate Life vs Prediction	140%	117%	133%	110%
Bench Durability Cycles	28,142	83,685	79,195	21,374
Tear Length End of Test	14.32 mm	17.55 mm	23.57 mm	19.57 mm

Figure 11. 자동차 고무 부싱의 내구시험-해석 비교³²

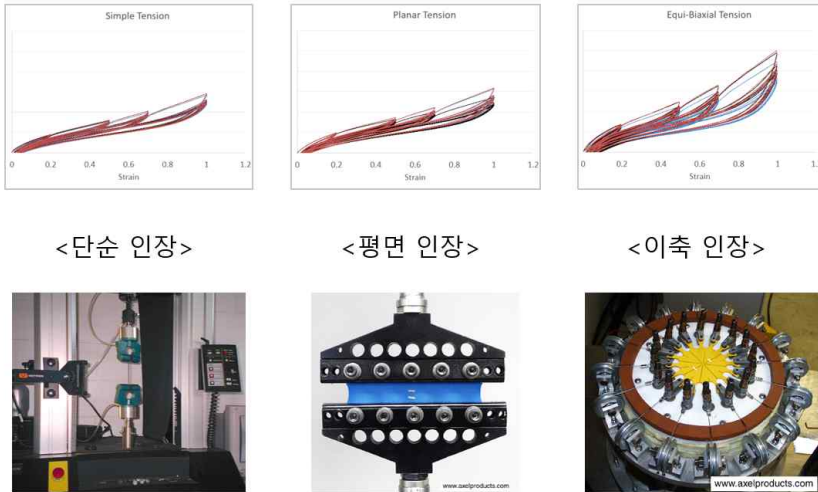


Figure 12. 여러 모드의 시험

구조 해석을 위한 기본적인 물성을 위하여, 반복 응력-변형률(cyclic stress-strain) 시험이 필요한데, 가능한 한 여러 변형 모드에서의 결과가 필요하다. Mooney-Rivlin, Ogden 또는 Yeoh 등과 같은 고무 모델이 비선형 수확 함수를 쓰기 때문에, 시험 모드가 부족한 경우, 부족한 모드에서 실제와 다른 거동을 보여주는 함수가 정의되

는 경우가 있기 때문이다.

일반적으로 단축 인장, 평면 인장 및 이축 인장 시험이 행해지고 있는데, 특히, 고무 부품이 압축의 역할을 목적으로 하는 경우가 많고, 압축 시험의 경우 추산이 어려운 마찰 계수의 영향이 크므로, 압축과 등가인 이축 인장 시험이 압축 시험보다 신뢰성이 높은 것으로 평가

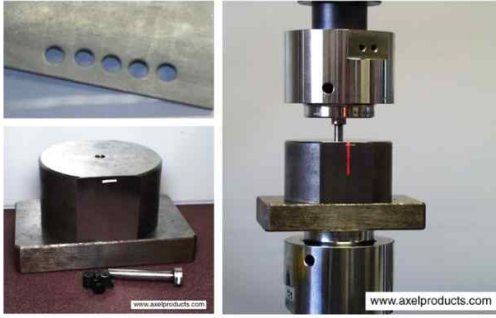


Figure 13. 체적 압축 시험

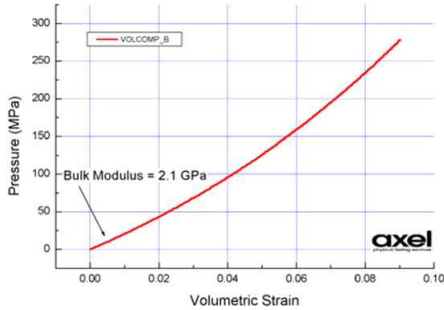


Figure 14. 체적 강성

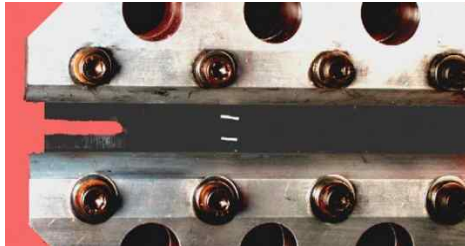


Figure 15. 찢김 시험

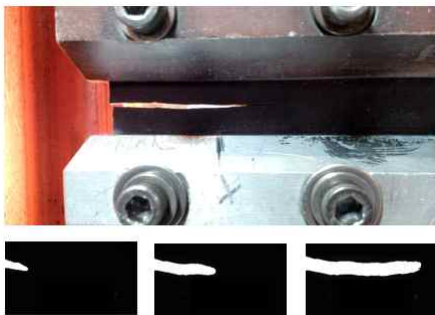


Figure 16. 크랙 진전 시험

Figure 12에 고무의 초탄성 계수를 선정하기 위한 기본 시험인 단축 인장, 평면 인장 그리고 이축 인장 시험을 나타내었다.

(2) 체적 압축 시험

체적 강성(bulk modulus) 평가를 위한 시험으로, Figure 13과 같은 시험으로부터 Figure 14과 같이, 체적 변형률에 대한 압력 선도를 구한다. 이 선도의 기울기가 체적 강성(bulk modulus)이고, 고무의 경우 전단계수의 수 천 배를 쓰기도 한다.

(3) 찢김 시험

평면 인장 시험의 한쪽에 크랙을 내고, 완전히 파단 될 때까지의 응력-변형률 선도를 그린다. Figure 15에 시험 형상을 나타내었다.

이 시험으로부터 응력-변형률 선도를 그릴 수 있다. 이 때의 면적이 변형률 에너지 밀도를 의미하고, 이것으로부터 찢김 에너지를 구할 수 있다.

(4) 크랙 진전 시험

찢김 시험과 동일한 형상의 시편에 반복 변위를 주어 하중 반복수, 에너지 해방률 및 크랙 길이를 측정한다. Figure 16에 시험 형상과 크랙이 진전하는 모습을 나타냈다. 이 시험으로부터 결국 Figure 2와 같이 에너지 해방률에 대한 크랙 진전 속도를 구할 수 있다.

기본적으로 하중비, $R=0$ 으로 시험이 행해지는데, $R>0$ 의 경우 변형률 결정화 특성이 있는 고무는 결정의 크랙 지연 효과로 인해, 수명이 상대적으로 증가하는 경향을 보인다. 이런 경우는 크랙 진전 속도가 하중비의 함수가 된다.

(5) 시험 지원

(주)브이이엔지는 2016년 이래로, 고무시험 전문기관인 Axel Products(앤아버, 미국)와 협력 관계를 맺고, 국내 산업 현장에서 필요한 고무 및 고분자 재료 시험의 전후처리를 지원하고 있다. 시험 전후의 기술 지원과 물성 변환, 그리고 연관된 해석 기술의 자문을 통해, 고객의 정확한 물성 시험과 신뢰성 높은 해석이 되도록 하고 있다.

된다.

6. 맺음말

본 총설에서는, 고무의 내구성능을 예측하는 방법에 대해 살펴보고, 검증된 고무내구 해석툴인 Endurica의 솔루션에 대해 소개하였다. Endurica의 솔루션은 파괴 역학을 기반으로, 최신 이론을 종합하여 내구수명을 계산하고, 여러 문헌으로부터 신뢰성이 검증된 것을 보였다.

가장 중요한 산업 재료 중 하나인 고무 재질은 복잡한 거동으로 인해 사실적 모사(realistic simulation)가 어려운 재료이기도 하다. (주)브이이엔지는 최적의 솔루션과 심도 있는 엔지니어링 서비스를 제공하여 고무와 관련된 시험 및 해석 분야에 최고의 가치를 전달하고자 한다.

- 문의처 및 추가 정보

(주)브이이엔지 (sales@veng.co.kr, 070-7770-5590, www.veng.co.kr)

Endurica (www.endurica.com)

Axel Products (www.axelproducts.com)

7. 참고 문헌

1. W. V. Mars and A. Fatemi, "A Literature Survey on Fatigue analysis Approaches for Rubber", *International Journal of Fatigue*, 24, 949-961, 2002
2. A. Wohler, "Wohler's experiments on the strength of metals", *Engineering*, 1867
3. S. M. Cadwell, R. A. Merrill, C. M. Sloman and F. L. Yost, "Dynamic fatigue life of rubber", *Industrial and Engineering Chemistry, Analytical Edition*, 19-23, 1940
4. J. H. Fielding, "Flex life and crystallization of synthetic rubber", *Industrial and Engineering Chemistry*, 1259-1261, 1943
5. Standard test method for rubber property - extension cycling fatigue, ASTM D 4482-4485, 1994
6. D. Klenke and A. Beste, "Endurance of the fatigue-life of metal-rubber components", *Kautschuk und Gummi Kunststoffe*, 1067-1071, 1987
7. Handbook of molded and extruded rubber, Goodyear Tire and Rubber Company, 1969
8. W. V. Mars and A. Fatemi, "Factors that affect the fatigue life of rubber: a literature survey", *Rubber Chemistry and Technology*
9. B. J. Roberts and J. B. Benzies, "The relationship between uniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon black filled vulcanizates", *Proceedings of Rubbercon*, 77, vol. 2.1, 1977
10. J. F. Roach, "Crack growth in elastomers under biaxial stresses", Ph.D. Dissertation, University of Akron, 1982
11. H. S. Ro, "Modeling and interpretation of fatigue failure initiation in rubber related to pneumatic tires", Ph.D. Dissertation, Purdue University, 1989
12. A. G. James, "Fatigue in elastomers", *Kautschuk und Gummi Kunststoffe*, 1973
13. H. Hirakawa and F. Urano, "Analysis of the fatigue process", *International Polymer Science and Technology*, 1976
14. H. Hirakawa, F. Urano and M. Kida, "Analysis of fatigue process of rubber vulcanizates", *Rubber Chemistry and Technology*, 1978
15. W. N. Findley, P. N. Mathur, E. Szczepanski and A. O. Temel, "Energy versus stress theories for combined stress - fatigue experiment using a rotating disc.", *Journal of Basic Engineering, Trans. ASME*, 1961
16. M. P. Lee and A. Moet. "Analysis of fatigue crack propagation in NR/BR rubber blend", *Rubber Chemistry and Technology*, 304-316, 1993
17. N. A. Hocine, M. N. Abdelaziz and G. Mesmacque, "Experimental and numerical investigation on single specimen methods of determination of J in rubber materials", *International Journal of Fracture*, 321-338, 1998
18. A. N. Gent, P. B. Lindley and A. G. Thomas, "Cut growth and fatigue of rubbers. I. The relationship between cut growth and fatigue", *Journal of Applied Polymer Science*, 455-466, 1964
19. A. A. Griffith, "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 163-198, 1920
20. R. S. Rivlin and A. G. Thomas, "Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing", *Journal of Polymer Science*, 291-318, 1953
21. A. G. Thomas, "Rupture of rubber. II. The strain concentration at an inclusion", *Journal of Polymer Science*, 177-188, 1955
22. H. W. Greensmith and A. G. Thomas, "Rupture of rubber. III. Determination of tear properties", *Journal of Polymer Science*, 189-200, 1955
23. A. G. Thomas, "Rupture of rubber. V. Cut growth in natural rubber vulcanizates", *Journal of Polymer Science*, 467-480, 1958
24. G. J. Lake and P. B. Lindley, "Cut growth and fatigue of rubbers. II. Experiments on a noncrystallizing rubber", *Journal of Applied Polymer Science*,

- 455-466, 1964
25. P. B. Lindley, "Relation between hysteresis and the dynamic crack growth resistance of natural rubber", *International Journal of Fracture*, 449-461, 1973
 26. Don G. Young, "Application of Energy Based Fatigue Crack Growth to Elastomer Compound Development", Axcel Products, 2001
 27. I. S. Choi and C. M. Roland, "Intrinsic defects and the failure properties of cis-1,4-polyisoprenes", *Rubber Chemistry and Technology*, 591-599, 1996
 28. K. Miller, "Fatigue and Failure Testing of Elastomers for Analysis", Axcel Products
 29. A. Ramachandran, R. P. Wietharn, S. I. Mathew, W. V. Mars, and M. A. Bauman, "Critical Plane Selection Under Nonrelaxing Simple Tension with Strain Crystallization", Presented at the Fall 192nd Technical Meeting of the Rubber Division, 10-12, 2017
 30. W. V. Mars, M. Castnier, D. Ostberg and W. Bradford. "DIGITAL TWIN FOR TANK TRACK ELASTOMERS: PREDICTING SELF-HEATING AND DURABILITY", GVSETS, 2017
 31. K. P. Barbash and W. V. Mars, "Critical Plane Analysis of Rubber Bushing Durability under Road Loads", No. 2016-01-0393, SAE Technical Paper, 2016
 32. J. R. Goossens, W. Mars, G. Smith, P. Heil, S. Braddock and J. Pilarski, "Durability Analysis of 3-Axis Input to Elastomeric Front Lower Control Arm Vertical Ride Bushing", No. 2017-01-1857, SAE Technical Paper, 2017