

입력지연을 갖는 이산시간 선형시스템을 위한 예측기 피드백 제어기의 강인성 해석

Robustness Analysis of Predictor Feedback Controller for Discrete-Time Linear Systems with Input Delays

최 준 영*

Joon-Young Choi*

Abstract

We analyze the robustness of the existing predictor feedback controller for discrete-time linear systems with constant input delays against the structured model uncertainty. By modeling the constant input delay with a first-order PdE (Partial difference Equation), we replace the input delay with the PdE states. By applying a backstepping transformation, we build a target system that enables to construct an explicit Lyapunov function. Constructing the explicit Lyapunov function that covers the entire state variables, we prove the existence of an allowable maximum size of the structured model uncertainty to maintain stability and establish the robustness of the predictor feedback controller. The numerical example demonstrates that the stability of closed-loop system is maintained in the presence of the structured model uncertainty, and verifies the robustness of the predictor feedback controller.

요 약

본 논문에서는 상수 입력지연을 갖는 이산시간 선형시스템을 위한 기존의 예측기 피드백 제어기의 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성을 해석한다. 상수 입력지연을 1차 PdE (Partial difference Equation)로 모델링하여 입력지연을 PdE 상태변수로 대체하고 백스테핑 변환을 적용하여 목표 시스템을 구축한다. 목표 시스템을 기반으로 전체 상태변수를 포함하는 명시적 리아푸노프 함수를 구성하여 안정성이 유지되는 구조적 모델 불확실성의 최대 크기의 존재를 증명하고 예측기 피드백 제어기의 강인성을 확립한다. 모의실험을 통하여 모델 불확실성이 존재하는 경우에도 닫힌 루프 시스템의 안정성이 유지되는 것을 예증하고 예측기 피드백 제어기의 강인성을 검증한다.

Key words : Input delay systems, Predictor feedback controller, Robustness, Backstepping transformation, Lyapunov function

* Dept. of Electronics Engineering, Pusan National University

★ Corresponding author

E-mail : jyc@pusan.ac.kr, Tel : +82-51-510-2490

※ Acknowledgment

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (NRF-2018R1D1A3B07043053).

Manuscript received Dec. 9, 2019; revised Dec. 21, 2019; accepted Dec. 26, 2019.

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

I. 서론

시간지연 현상은 대부분의 제어 시스템에서 발생하고 있으며 시스템의 불안정성 및 성능저하의 원인으로 알려져 있다. 이러한 시간지연의 문제를 해결하기 위해 시간지연을 보상하는 제어기 설계에 대한 많은 연구결과가 발표되었다[1]. 그 중에서 연속시간 지연 시스템의 지연 보상을 위해 모델로부터 구성되는 상태변수 또는 출력 예측기 피드백 기반의 제어기가 제안되었다[2]-[6].

그러나 연속시간 상태변수 또는 출력 예측기는 항상 무한 차원을 나타내기 때문에 구현을 위해 근사적인 방법을 적용하는데 이때 안정성 및 성능 저하가 발생한다. 이러한 무한 차원 제어기를 구현할 때 발생하는 문제를 해결하고 대부분의 제어 시스템이 디지털 컴퓨터 기반으로 구현되는 경향을 고려하여 이산시간 시스템 기반으로 예측기 피드백 제어기를 설계하는 접근 방법이 제안되었다[7].

상수 입력지연을 갖는 이산시간 선형 시스템에 대하여 상태변수 예측기 피드백 제어기를 적용하면 비록 입력지연이 존재하더라도 광역 지수적 안정성이 성립하는 특성을 명시적 리아푸노프 함수를 기반으로 증명하였다[8]. 또한 시변 입력지연을 갖는 이산시간 비선형 시스템에 대하여 입력지연을 보상하는 상태변수 예측기 피드백 제어기를 설계하고 광역 점근적 안정성을 보장하는 충분조건을 명시적 리아푸노프 함수 기반으로 확립하였다[7]. 이러한 이산시간 기반 상태변수 예측기 피드백 제어기는 근사화 없이 유한차원으로 설계가 되어 무한차원의 문제점을 해결하고 디지털 컴퓨터를 이용하여 직접적으로 구현이 가능한 장점이 있다.

한편 물리적인 플랜트와 그 수학적 모델 사이에는 항상 오차가 존재하며 수학적 모델로 실제 시스템을 완전하게 표현하는 것은 불가능하다. 따라서 공칭 시스템에 대하여 설계된 제어기의 모델 불확실성에 대한 강인성을 해석하는 것은 실제로 제어기를 구현하여 사용하는 실용적인 관점에서 반드시 필요한 과정이다[9]. 그러나 입력지연을 갖는 이산시간 선형시스템에 대한 예측기 피드백 제어기의 경우 [8]에서 광역 지수적 안정성은 증명되었으나 모델 불확실성에 대한 강인성 해석 결과는 아직 발표되지 않고 있다.

본 논문에서는 상수 입력지연을 갖는 이산시간

선형 시스템 제어를 위해 설계된 예측기 피드백 제어기의 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성을 해석한다. 모델 불확실성을 포함한 모델에 대하여 입력지연을 PdE (Partial difference Equation)로 모델링하고 백스테핑 변환을 기반으로 명시적인 리아푸노프 함수를 구성하여 예측기 피드백 제어기의 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성을 확립한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 본 논문에서 해결하고자 하는 문제를 정의한다. III장에서는 입력지연을 PdE로 모델링하고 백스테핑 변환을 통해 시스템 모델을 해석하기 용이한 목표시스템으로 변환한다. IV장에서는 광역 지수적 안정성을 유지하는 모델 불확실성의 최대 크기가 존재하는 것을 증명하고 강인성을 확립한다. V장에서는 모의실험을 통해 예측기 피드백 제어기의 강인성을 검증하고 VI장에서는 결론을 도출한다. 다음은 본 논문에서 사용할 수학적 기호를 나타낸다.

기호 정의 : $i < j$ 를 만족하는 정수 i, j 에 대하여 집합 $I_{[i,j]}$ 는 $I_{[i,j]} = \{i, i+1, \dots, j\}$ 와 같이 정의된다. PdE의 상태변수는 $u_i(k)$ 로 나타내고 $k \in Z$ 는 이산시간 변수, $i \in I_{[0,D]}$ 는 공간변수를 의미한다. 유한 차원 벡터 X 의 2-norm은 $|X|$ 로 나타내고 2-norm으로부터 유도된 정방행렬 M 의 행렬 norm은 $\|M\|$ 로 나타낸다. $\lambda_{\min}(M)$ 과 $\lambda_{\max}(M)$ 는 각각 정방행렬 M 의 최소 고유치와 최대 고유치를 나타낸다. I_n 은 $n \times n$ 단위행렬을 나타내고 \equiv 가 사용된 식에서 좌변은 우변으로 정의되는 것을 나타낸다.

II. 문제 정의

다음과 같은 상수 입력지연과 구조적 모델 불확실성을 갖는 이산시간 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + BU(k-D) \\ &= (A_0 + \gamma I_n)X(k) + BU(k-D) \end{aligned} \quad (1)$$

위식에서 $X(k) \in R^n$ 은 상태변수, $A \equiv A_0 + \gamma I_n$, $A_0 \in R^{n \times n}$ 는 공칭 시스템 행렬, $\gamma I_n \in R^{n \times n}$ 은 구조적 모델 불확실성, $\gamma > 0$ 은 모델 불확실성의 크기를 나타내는 상수, (A_0, B) 는 제어 가능한 시스템, 입력 신호 $U(k-D) \in R$ 은 D 이산시간동안 지연되어 시스템에 입력되는 것을 나타낸다. (1)에서 입력지연과 모델 불확실성이 없을 때 즉 $D=0$ 이고 $\gamma=0$ 일

때 시스템을 안정화 시키는 정적 상태변수 피드백 제어기 $U(k) = KX(k)$ 가 설계되어 $A_0 + BK$ 가 Schur 안정성 특성을 만족한다고 가정한다. 한편 (1)에서 $\gamma=0$ 일 때 즉 공칭시스템의 광역 지수적 안정성을 항상 보장하는 예측기 피드백 제어기는 다음과 같이 설계 된다[8].

$$U(k) = K \left[A_0^D X(k) + \sum_{j=k-D}^{k-1} A_0^{k-j-1} B U(j) \right] \quad (2)$$

본 논문의 목표는 공칭시스템 제어를 위해 설계된 예측기 피드백 제어기 (2)를 구조적 모델 불확실성을 포함한 시스템 (1)에 적용했을 때 닫힌 루프 시스템에 대하여 명시적 리아푸노프 함수를 체계적으로 구성하고 광역 지수적 안정성을 보장하는 조건을 도출하여 예측기 피드백 제어기의 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성을 확립하는 것이다.

III. 시스템 모델 변환

구조적 모델 불확실성을 포함한 시스템의 안정성을 해석하기 위해서는 명시적 리아푸노프 함수 구성이 필요한데 이러한 리아푸노프 함수 구성이 용이하도록 시스템 (1)의 입력지연을 1차 PdE로 모델링한다. 입력지연을 나타내는 PdE의 상태변수 $u(k) \equiv [u_0(k) \ u_1(k) \ \dots \ u_{D-1}(k)]^T$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$u_i(k) = U(k+i-D), \quad i \in I_{[0,D]} \quad (3)$$

그러면 입력지연은 다음과 같은 PdE로 표현이 되고 경계조건은 $u_0(k) = U(k-D)$ 와 $u_D(k) = U(k)$ 로 얻을 수 있다.

$$u_i(k+1) = u_{i+1}(k), \quad i \in I_{[0,D-1]} \quad (4)$$

이러한 입력지연 모델을 (1)에 적용하면 시스템 (1)은 다음과 같이 표현되고 입력지연이 PdE 상태변수로 대체된 것을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu_0(k) \\ &= (A_0 + \gamma I_n + BK)X(k) + Bu_0(k) \\ u_i(k+1) &= u_{i+1}(k), \quad i \in I_{[0,D-1]} \\ u_D(k) &= U(k) \end{aligned} \quad (5)$$

위식은 PdE의 경계 조건으로부터 얻어지는 입력

$U(k)$ 로 구동되는 OdE (Ordinary difference Equation)-PdE 연결 형태를 형성한다. 이제 다음과 같은 이산시간 백스테핑 변환과 역백스테핑 변환을 고려한다[8].

$$w_i(k) = u_i(k) - K \left[A^i X(k) + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B u_j(k) \right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_i(k) &= w_i(k) \\ &+ K \left[(A+BK)^i X(k) + \sum_{j=0}^{i-1} (A+BK)^{i-j-1} B w_j(k) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

위식 (6)에서 $i=0$ 일 때 우변의 시그마 항은 0이라는 가정 하에 $w_0(k)$ 를 계산하고 $i=D$ 일 때 $w_D(k)$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_0(k) &= u_0(k) - KX(k) \\ w_D(k) &= u_D(k) - K \left[A^D X(k) + \sum_{j=0}^{D-1} A^{D-j-1} B u_j(k) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

백스테핑 변환 (6)을 (5)식에 적용하고 (8)을 이용하면 다음과 같이 $X(k)$, $w_i(k)$, $U(k)$ 로 표현되는 목표 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= (A+BK)X(k) + Bw_0(k) \\ &= (A_0 + \gamma I_n + BK)X(k) + Bw_0(k) \\ w_i(k+1) &= w_{i+1}(k), \quad i \in I_{[0,D-1]} \\ w_D(k) &= U(k) - K \left[A^D X(k) + \sum_{j=0}^{D-1} A^{D-j-1} B u_j(k) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(3)에 의하여 $u_D(k) = U(k)$ 이고 $u_j(k) = U(k+j-D)$ 이므로 (9)의 마지막 식의 $U(k)$ 에 예측기 피드백 제어기 (2)를 적용하면 다음과 같은 닫힌 루프 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= (A+BK)X(k) + Bw_0(k) \\ &= (A_0 + \gamma I_n + BK)X(k) + Bw_0(k) \\ w_i(k+1) &= w_{i+1}(k), \quad i \in I_{[0,D-1]} \\ w_D(k) &= K \left[A_0^D X(k) + \sum_{j=0}^{D-1} A_0^{D-j-1} B u_j(k) \right] \\ &\quad - K \left[A^D X(k) + \sum_{j=0}^{D-1} A^{D-j-1} B u_j(k) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

다음 장에서는 닫힌 루프 시스템 (10)의 광역 지수적 안정성을 보장하는 구조적 모델 불확실성 γ 의 최대 크기가 존재한다는 것을 명시적 리아푸노프 함수 기반으로 증명한다.

IV. 강인성 해석

먼저 상태변수 $X(k)$ 에 대한 리아푸노프 함수를 다음과 같이 선택한다.

$$V(X(k)) = X^T(k)PX(k) \quad (11)$$

A_0+BK 가 Schur 안정성 특성을 만족하므로 임의의 $Q=Q^T>0$ 에 대하여 다음 이산시간 리아푸노프 방정식의 해가 존재하고 그 해를 위식의 $P=P^T>0$ 로 정한다.

$$(A_0+BK)^T P(A_0+BK) - P = -Q \quad (12)$$

(11)의 순방향 차이는 (10)과 (12)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= [(A_0+BK+\gamma I_n)X(k) + Bw_0(k)]^T P \\ &\quad \times [(A_0+BK+\gamma I_n)X(k) + Bw_0(k)] - X^T(k)PX(k) \\ &= X^T(k)[(A_0+BK)^T P(A_0+BK) - P]X(k) \\ &\quad + 2\gamma X^T(k)(A_0+BK)^T PX(k) \\ &\quad + \gamma^2 X^T(k)PX(k) \\ &\quad + 2X^T(k)(A_0+BK+\gamma I_n)^T PBw_0(k) + B^T PBw_0^2(k) \\ &= -X^T(k)QX(k) + 2\gamma X^T(k)(A_0+BK)^T PX(k) \\ &\quad + \gamma^2 X^T(k)PX(k) \\ &\quad + 2X^T(k)(A_0+BK+\gamma I_n)^T PBw_0(k) + B^T PBw_0^2(k) \end{aligned} \quad (13)$$

위식의 전개를 위해 Young의 부등식으로부터 얻어지는 다음 부등식을 사용하고 상수 $a>0$ 는 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned} &|2X^T(k)(A_0+BK+\gamma I_n)^T PBw_0(k)| \\ &\leq \frac{2}{a} |X^T(k)(A_0+BK+\gamma I_n)^T PB|^2 + \frac{a}{2} w_0^2(k) \\ a &\equiv 4\lambda_{\max}((A_0+BK+\gamma I_n)^T PBB^T P(A_0+BK+\gamma I_n)) \\ &\quad \div \lambda_{\min}(Q) \end{aligned} \quad (14)$$

위식을 (13)에 적용하면 (11)의 순방향 차이의 상계는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &\leq -X^T(k)QX(k) + 2\gamma \|P(A_0+BK)\| |X(k)|^2 \\ &\quad + \gamma^2 \lambda_{\max}(P) |X(k)|^2 \\ &\quad + \frac{2}{a} |X^T(k)(A_0+BK+\gamma I_n)^T PB|^2 + \frac{a}{2} w_0^2(k) \\ &\quad + B^T PBw_0^2(k) \\ &\leq -\frac{1}{2} X^T(k)QX(k) + 2\gamma \|P(A_0+BK)\| |X(k)|^2 \\ &\quad + \gamma^2 \lambda_{\max}(P) |X(k)|^2 + \left(\frac{a}{2} + B^T PB\right) w_0^2(k) \\ &\leq -\left[\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P(A_0+BK)\| - \gamma^2 \lambda_{\max}(P)\right] \\ &\quad \times |X(k)|^2 + \left(\frac{a}{2} + B^T PB\right) w_0^2(k) \\ &= -g(\gamma) |X(k)|^2 + \beta w_0^2(k) \end{aligned} \quad (15)$$

위식에서 사용된 상수 $\gamma>0$ 에 대한 2차 다항식 $g(\gamma)$ 와 상수 $\beta>0$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} g(\gamma) &\equiv \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P(A_0+BK)\| \\ &\quad - \gamma^2 \lambda_{\max}(P) \\ \beta &\equiv a + B^T PB \end{aligned} \quad (16)$$

다음으로 변환된 PdE 상태변수 $w(k) \equiv [w_0(k) \ w_1(k) \ \dots \ w_{D-1}(k)]^T$ 에 대한 리아푸노프 함수를 다음과 같이 선택한다.

$$L(w(k)) = \sum_{j=0}^{D-1} (j+1) w_j^2(k) \quad (17)$$

위식에 (10)의 두 번째 식을 적용하면 순방향 차이는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \Delta L(k) &= L(k+1) - L(k) \\ &= \sum_{j=0}^{D-1} (j+1) [w_j^2(k+1) - w_j^2(k)] \\ &= \sum_{j=0}^{D-1} (j+1) [w_{j+1}^2(k) - w_j^2(k)] \\ &\quad (\because w_j(k+1) = w_{j+1}(k)) \\ &= -\sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) + Dw_D^2(k) \end{aligned} \quad (18)$$

위식의 $w_D(k)$ 는 변환된 PdE 상태변수 $w(k)$ 에 속하지 않으므로 안정성 해석이 가능하기 위해서는 $w_D^2(k)$ 상계를 상태변수 $X(k)$ 와 $w(k)$ 로 나타내는 것이 필요하다. 이를 위해 (10)의 마지막 식을 이용하는데 (10)의 마지막 식은 $u(k)$ 를 포함하고 있어 우선 $u(k)$ 의 상계를 $X(k)$ 와 $w(k)$ 로 나타내는 것이 필요하며 이는 다음의 보조정리에서 구해진다.

보조정리 1 : (3)에서 정의된 입력지연을 나타내는 PdE 상태변수 $u(k)$ 와 (6)에 의하여 정의된 변환된 PdE 상태변수 $w(k)$ 는 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \leq \psi_1 \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) + \psi_2 |X(k)|^2 \quad (19)$$

위식에서 ψ_1 과 ψ_2 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv 3 \left(1 + D \sum_{j=0}^{D-1} |K(A+BK)^j B|^2 \right) \\ \psi_2 &\equiv 3 \sum_{j=0}^{D-1} |K(A+BK)^j|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

증명 : 역백스테핑 변환 (7)의 우변에 Cauchy - Schwarz 부등식을 다중으로 적용하면 (19)의 결과를 얻을 수 있다[7]. ■

보조정리 1을 이용하면 다음 보조정리와 같이 (18)에 나타난 $w_D^2(k)$ 항의 상계를 $w(k)$ 와 $X(k)$ 로 나타낼 수 있다.

보조정리 2 : (10)의 마지막 식으로 표현되는 $w_D(k)$ 의 상계는 다음과 같이 $w(k)$ 와 $X(k)$ 로 구해진다.

$$w_D^2 \leq \gamma(\psi_3 + \psi_2\psi_4) |X(k)|^2 + \gamma\psi_1\psi_4 \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \quad (21)$$

위식에서 ψ_1, ψ_2 는 (20)에서 정의되고 ψ_3, ψ_4 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \psi_3 &\equiv 2 \left| K \sum_{m=1}^D \binom{D}{m} \gamma^{m-1} A_0^{D-m} \right|^2 \\ \psi_4 &\equiv 2 \sum_{j=0}^{D-1} \left[K \sum_{m=1}^{D-j-1} \binom{D-j-1}{m} \gamma^{m-1} A_0^{D-j-1-m} B \right]^2 \quad (22) \\ \binom{D}{m} &\equiv \frac{D!}{m!(D-m)!} \\ \binom{D-j-1}{m} &\equiv \frac{(D-j-1)!}{m!(D-j-1-m)!} \end{aligned}$$

증명 : (10)의 마지막 식에 Cauchy - Schwarz 부등식을 2번 연속 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} w_D^2(k) &\leq 2 [K(A_0^D - A^D)X(k)]^2 \\ &+ 2 \left[\sum_{j=0}^{D-1} K(A_0^{D-j-1} - A^{D-j-1})Bu_j(k) \right]^2 \quad (23) \\ &\leq 2 |K(A_0^D - A^D)|^2 |X(k)|^2 \\ &+ 2 \sum_{j=0}^{D-1} |K(A_0^{D-j-1} - A^{D-j-1})B|^2 \sum_{j=0}^{D-1} u_j^2(k) \end{aligned}$$

한편 $A^D = (A_0 + \lambda I_n)^D$ 에 이항정리를 적용하면 A^D 는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} A^D &= (A_0 + \gamma I_n)^D \\ &= \sum_{m=0}^D \binom{D}{m} \gamma^m A_0^{D-m} \quad (24) \\ &= A_0^D + \gamma \sum_{m=1}^D \binom{D}{m} \gamma^{m-1} A_0^{D-m} \end{aligned}$$

위식을 (23)에 적용하면 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} w_D^2(k) &\leq 2\gamma \left| K \sum_{m=1}^D \binom{D}{m} \gamma^{m-1} A_0^{D-m} \right|^2 |X(k)|^2 + \\ &2\gamma \sum_{j=0}^{D-1} \left| K \sum_{m=1}^{D-j-1} \binom{D-j-1}{m} \gamma^{m-1} A_0^{D-j-1-m} B \right|^2 \sum_{j=0}^{D-1} u_j^2(k) \quad (25) \end{aligned}$$

위식에 (19)를 적용하면 (21)을 얻을 수 있다. ■
보조정리 2를 (18)에 적용하면 (17)의 순방향 차이 상계는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \Delta L(k) &= L(k+1) - L(k) \\ &\leq \gamma D(\psi_3 + \psi_2\psi_4) |X(k)|^2 - (1 - \gamma\psi_1\psi_4) \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \quad (26) \end{aligned}$$

이제 (10)으로 표현되는 전체 닫힌 루프 시스템의 안정성을 해석할 수 있도록 전체 상태변수를 포함하는 전체 리아푸노프 함수를 다음과 같이 선택한다.

$$W(X(k), w(k)) = V(k) + 2\beta L(k) \quad (27)$$

위식에서 $\beta > 0$ 는 (16)에서 정의 되었고 모든 상태변수를 포함하는 리아푸노프 함수 (27)을 기반으로 닫힌 루프 시스템 (10)의 광역 지수적 안정성을 보장하는 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성을 확립하는 정리는 다음과 같다.

정리 1 : 구조적 모델 불확실성을 포함하는 제어 대상 시스템 (1)에 공칭 시스템에 대하여 설계된 예측기 피드백 제어기 (2)를 적용하면 닫힌 루프 시스템이 모든 $\gamma \in [0, \gamma^*)$ 에 대하여 광역 지수적으로 안정한 상수 $\gamma^* > 0$ 이 존재한다.

증명 : 전체 리아푸노프 함수 (27)의 순방향 차이의 상계는 (15)와 (26)을 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Delta W(k) &= W(k+1) - W(k) \\ &\leq -g(\gamma) |X(k)|^2 + \beta w_0^2(k) \\ &+ 2\beta\gamma D(\psi_3 + \psi_2\psi_4) |X(k)|^2 - 2\beta(1 - \gamma\psi_1\psi_4) \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \quad (28) \\ &\leq -[g(\gamma) - 2\gamma\beta D(\psi_3 + \psi_2\psi_4)] |X(k)|^2 \\ &- \beta(1 - 2\gamma\psi_1\psi_4) \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \end{aligned}$$

위식에서 $|X(k)|^2$ 항의 계수의 음의 값을 $h(\gamma)$ 이라 정의하면 (16)으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= g(\gamma) - 2\gamma\beta D(\psi_3 + \psi_2\psi_4) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - \gamma^2 \lambda_{\max}(P) \\ &- 2\gamma [\|P(A_0 + BK)\| + \beta D(\psi_3 + \psi_2\psi_4)] \quad (29) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\psi_5 - \gamma^2 \lambda_{\max}(P) \end{aligned}$$

위식에서 ψ_5 는 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_5 \equiv \|P(A_0 + BK)\| + \beta D(\psi_3 + \psi_2\psi_4) \quad (30)$$

위식 $h(\gamma)$ 에 근의 공식을 적용하면 $h(\gamma) > 0$ 이 성립하는 γ 의 범위는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$0 < \gamma < \gamma_1$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{-\psi_5 + \sqrt{\psi_5^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q)}}{\lambda_{\max}(P)} \quad (31)$$

한편 (28)에서 $\sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k)$ 항의 계수가 음의 값이 되는 γ 의 조건은 $\gamma < \frac{1}{2\psi_1\psi_4}$ 로 얻어지고 이때 $\gamma^* > 0$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma^* \equiv \min\left\{\gamma_1, \frac{1}{2\psi_1\psi_4}\right\} \quad (32)$$

따라서 $0 < \gamma < \gamma^*$ 인 경우 (27)의 순방향 차이의 상계 (28)은 전체 상태변수 $X(k)$ 와 $w(k)$ 에 대하여 음의 정부호가 되고 이로부터 전체 닫힌 루프 시스템 (10)은 모든 $\gamma \in [0, \gamma^*)$ 에 대하여 광역 지수적으로 안정하다. ■

정리 1에 의하면 입력지연을 갖는 이산시간 선형 시스템 (1)의 공칭시스템에 대하여 설계된 예측기 피드백 제어기 (2)는 일정한 크기 이내의 구조적 모델 불확실성에 대하여 광역 지수적 안정성을 유지한다. 따라서 예측기 피드백 제어기 (2)의 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성은 정리 1로부터 확립된다. 이러한 결과를 얻을 수 있는 핵심적인 요인은 순방향 차이의 상계를 (28)과 같이 모델 불확실성의 크기 γ 로 나타낼 수 있는 명시적 리아푸노프 함수 (27)의 구성이 가능하기 때문이다. 또한 이러한 리아푸노프 함수 구성이 가능한 요인은 입력지연의 PdE 모델 (4)를 도입하여 입력지연을 제거하고 백스테핑 변환 (6)을 적용하여 목표시스템 (9)로 변환하기 때문이다.

V. 모의 실험

정리 1에서 확립된 구조적 모델 불확실성에 대한 예측기 피드백 제어기의 강인성을 검증하기 위해 다음과 같이 입력지연과 구조적 모델 불확실성을 갖는 2차의 열린 루프 불안정 시스템을 고려한다.

$$X(k+1) = (A_0 + \gamma I_n)X(k) + BU(k-D)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2 + \gamma & 0.1 \\ 0.5 & 1.0 + \gamma \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix} U(k-D) \quad (33)$$

위식에서 공칭시스템의 고유치는 $\{1.34, 0.86\}$ 으로 계산이 되며 제어입력 (2)를 설계하기 위한 피드백 이득은 $K = [14.17 \quad -11.83]$ 로 선택한다. 이러한 피드백 이득은 $A_0 + BK$ 의 고유치를 $\{0.5 \pm 0.1j\}$ 로 할당하고 고유치의 크기는 0.51로서 입력지연과 모델 불확실성이 없는 경우 닫힌 루프 시스템이 광역 지수적으로 안정하게 된다. 초기 상태 변수는 $X(0) = [3 \quad -5]^T$, 입력지연은 $D = 7$ 로 설정한다.

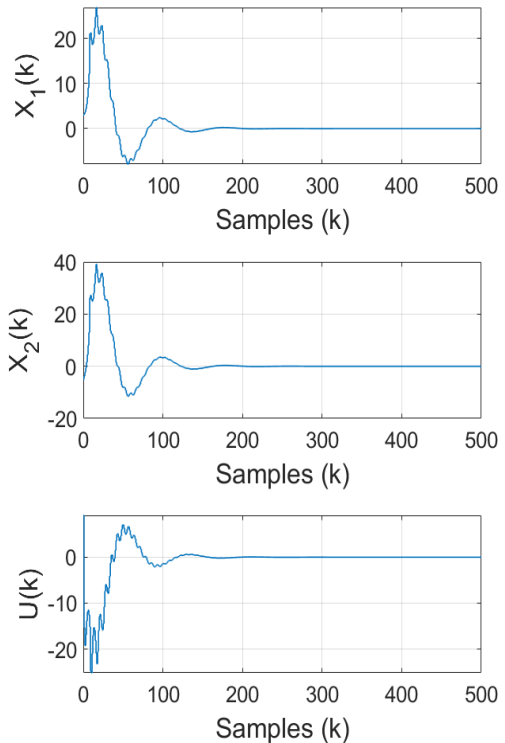


Fig. 1. System input and state variables for $\gamma = 0.05$.

그림 1. $\gamma = 0.05$ 일 때 시스템 입력 및 상태변수

모의실험은 3가지 모델 불확실성의 크기 $\gamma = 0.05, \gamma = 0.06, \gamma = 0.07$ 에 대하여 수행되었고 모의실험 결과는 그림 1, 2, 3과 같다. 그림 1, 2에서는 상태변수가 원점으로 수렴하고 그림 3에서는 발산한다. 이러한 결과로부터 정리 1의 모델 불확실성의 최대 허용 값 γ^* 의 존재가 검증되고 γ^* 는 $0.06 < \gamma^* < 0.07$ 범위에 속한다고 추정할 수 있다. 따라서 모의실험 결과는 구조적 모델 불확실성에 대한 예측기 피드백 제어기의 강인성을 검증한다.

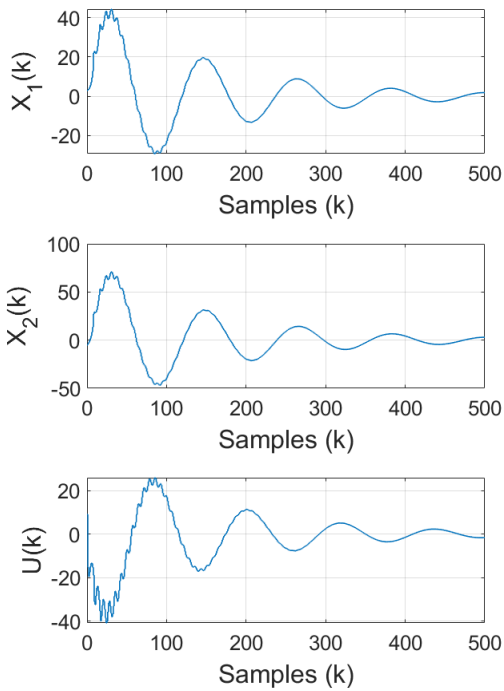


Fig. 2. System input and state variables for $\gamma=0.06$.
 그림 2. $\gamma=0.06$ 일 때 시스템 입력 및 상태변수

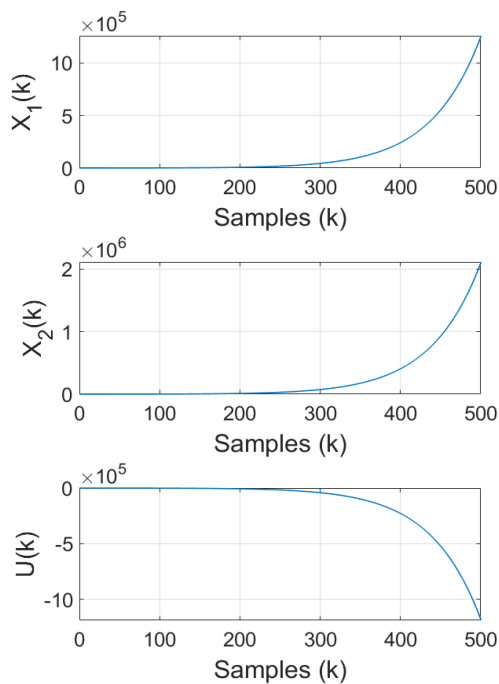


Fig. 3. System input and state variables for $\gamma=0.07$.
 그림 3. $\gamma=0.07$ 일 때 시스템 입력 및 상태변수

VI. 결론

상수 입력지연과 구조적 모델 불확실성을 갖는 이산시간 선형 시불변 시스템에 대하여 상수 입력 지연을 PdE로 모델링하여 상태변수를 확장함으로

써 입력지연이 없는 시스템으로 변환하였다. 확장된 PdE 상태변수에 대하여 시스템의 동적 특성이 반영된 백스테핑 변환을 적용함으로써 명시적 리아푸노프 함수를 구성하기 용이한 목표 시스템 형태로 변환하였다. 공칭 시스템에 대하여 설계된 예측기 피드백 제어를 적용한 닫힌 루프 목표 시스템에 대하여 전체 상태변수를 포함하는 명시적 리아푸노프 함수를 구성하고 안정성 해석을 통하여 광역 지수적 안정성을 보장하는 구조적 모델 불확실성의 최대 크기의 존재를 증명하였다. 따라서 예측기 피드백 제어기의 구조적 모델 불확실성에 대한 강인성을 확립하였으며 이러한 결과로부터 예측기 피드백 제어기는 실용적으로도 유용한 것을 판단할 수 있다.

References

[1] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Birkh"auser Boston, 2009.

[2] W. H. Kwon and A. E. Pearson, "Feedback stabilization of linear systems with delayed control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.25, pp.266-269, 1980. DOI: 10.1109/TAC.1980.1102288

[3] Z. Artstein, "Linear systems with delayed controls: a reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.27, pp.869-879, 1982. DOI: 10.1109/TAC.1982.1103023

[4] S. Mondie and W. Michiels, "Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.48, pp.2207-2212, 2003. DOI: 10.1109/TAC.2003.820147

[5] M. Krstic and A. Smyshlyaev, "Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays," *Systems & Control Letters*, vol.57, pp.750-758, 2008. DOI: 10.1109/CDC.2007.4434474

[6] M. Krstic, "Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: Inverse optimality and robustness to delay mismatch," *Automatica*, vol.44, pp.2930-2935, 2008. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.04.010

[7] J.-Y. Choi and M. Krstic, "Compensation of time-varying input delay for discrete-time nonlinear systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.26, pp.1755-1776, 2016.

DOI: 10.1002/rnc.3382

[8] J.-Y. Choi, "Exponential Stability of Predictor Feedback for Discrete-Time Linear Systems with Input Delays," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol.19, No.7, pp.583-586, 2013. DOI: 10.5302/J.ICROS.2013.13.1913

[9] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

BIOGRAPHY

Joon-Young Choi (Member)



1994, 1996, 2002 : BS, MS, and PhD degree in Electronics and Electrical Engineering, Pohang University of Science and Technology.

2005~Present : Professor, Dept. of Electronics Engineering, Pusan National University.