J. Korean Soc. Aeronaut. Space Sci. 47(11), 787-794(2019)
DOI:https://doi.org/10.5139/JKSAS.2019.47.11.787
ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

혼합정수선형계획법을 이용한 다수 이종 근접 방어 시스템의 최적 무장 할당

노희건[1], 오영재[2], 탁민제[3], 정영란[4]

Optimal Weapon-Target Assignment of Multiple Dissimilar Closed-In Weapon Systems Using Mixed Integer Linear Programming

Heekun Roh[1], Young-Jae Oh[2], Min-Jea Tahk[3] and Young-Ran Jung[4]
Korea Advanced Institute of Science and Technology[1,2,3], Agency for Defense Development[4]

ABSTRACT

In this paper, a Mixed Integer Linear Programming(MILP) approach for solving optimal Weapon-Target Assignment(WTA) problem of multiple dissimilar Closed-In Weapon Systems (CIWS) is proposed. Generally, WTA problems are formulated in nonlinear mixed integer optimization form, which often requires impractical exhaustive search to optimize. However, transforming the problem into a structured MILP problem enables global optimization with an acceptable computational load. The problem of interest considers defense against several threats approaching the asset from various directions, with different time of arrival. Moreover, we consider multiple dissimilar CIWSs defending the asset. We derive a MILP form of the given nonlinear WTA problem. The formulated MILP problem is implemented with a commercial optimizer, and the optimization result is proposed.

초 록

본 논문에서는 다수 이종 근접 방어 시스템(Closed-In Weapon System, CIWS)의 최적 무장 할당 문제를 제시하고, 이를 혼합정수선형계획법(Mixed Integer Linear Programming, MILP)으로 변형해 해결하는 기법을 제안한다. 일반적인 무장 할당 문제의 경우 다양한 경우의 수를 고려해야하기 때문에 계산 시간이 기하급수적으로 증가하는 경우가 잦다. 하지만 주어진 문제를 MILP와 같은 혼합 정수 최적화 문제로 변형하면 준실시간 내에 전역 최적해를 찾을 수 있다. 본 논문에서는 다수 위협이 각각 다른 시점에 다른 방향에서 방어 자산을 공격하는 상황을 고려한다. 또한, 제원이 다른 다수 CIWS를 동시 운용하는 경우를 추가로 고려한다. 본 논문에서는 이와 같은 문제 상황을 비선형 혼합정수계획 문제로 정식화하고, 이를 MILP로 변형하는 기법을 제시하였다. 또한, 이를 상용 최적화 프로그램으로 구현해 최적화 성능을 검증하였다.

Key Words : Weapon-Target Assignment(무장 할당), Optimization(최적화), Mixed Integer Linear Programming(혼합정수선형계획법)

† Received : June 3, 2019 Revised : October 12, 2019 Accepted : October 28, 2019
[1] Graduate Student, [2] Graduate Student, [3] Professor, [4] Researcher
[1] Corresponding author, E-mail : heekunroh@kaist.ac.kr, ORCID 0000-0002-8860-2318

Ⅰ. 서 론

현대 전장이 점점 복잡해질수록, 공격 시스템뿐만 아니라 방어 시스템 또한 발전을 거듭하고 있다. 특히 함정과 같은 고가치 표적은 다양한 방어 시스템을 탑재해 이중, 삼중으로 자신을 방어하고 있다. 이와 같은 함정 방어 시스템은 일반적으로 방어용 요격 미사일을 이용해 중장거리 위협을 제거한다. 이뿐만 아니라, 근접 방어 시스템(Closed-In Weapon System, CIWS)라는 명칭으로 자동으로 표적을 추적, 공격하는 기관포 시스템이 대부분의 전투함에 탑재되고 있다. CIWS는 근거리에서 고속으로 접근하는 위협을 담당해 방어하게 된다.

하지만 이와 같이 다양한 방어 시스템이 있더라도 여러 위협이 동시에 공격하면 방어에 성공하기 어렵다. 기존에는 유도 기법의 한계로 다수 대함 유도 미사일이 일제 공격하기가 어려웠다. 하지만 최근에는 유도탄간 협업 기술, 개별 유도 기법 등의 발전에 따라 다수 유도탄의 동시 대함 공격 가능성이 증가하고 있다[1,2].

현대전에서 지속적으로 함정 방어의 난이도가 상승함에 따라 기존 교전 교리 기반 방어의 한계가 예상되고 있다. 따라서 탑재된 방어 자산으로 최선의 방어 성능을 내기 위해 방어 자산의 할당 최적화 문제의 중요성이 대두되고 있다. 이와 같은 문제를 최적 무장 할당 문제(Weapon-Target Assignment, WTA)라 한다[3]. 최적 무장 할당 문제의 목표는 방어 자산의 물리적 제약 조건을 만족하면서도 최소의 노력으로 최선의 방어 효과를 얻는 방법을 찾는 것이다. 따라서, 최적 무장 할당 문제는 (1) 어떤 방어 자산을, (2) 어떤 순서로, (3) 어느 위협에게 공격할지를 결정하는 문제가 되는 것이다. 하지만 이런 조합 최적화(Combinatorial Optimization) 문제는 NP 문제의 하나로, 위협의 수에 따라 계산 시간이 기하급수적으로 증가하는 특성으로 인해 시시각각 변화하는 전장 환경에 바로 적용하기에는 무리가 있다.

무장 할당 문제의 계산 복잡도 문제를 해결하기 위해 다양한 기법들이 제시되고 있다. 일반적으로는 조합 최적화 문제의 휴리스틱 근최적해를 빠른 시간 내에 제시하는 기법들이 널리 연구되고 있다. 적절한 근사[4], 휴리스틱[5], 기하학적 특성[6]을 활용하는 무장 할당 기법도 제시되었고, 진화 기법을 이용한 최적 무장 할당 기법[7,8]도 연구되고 있다. 또한 강화 학습[9]과 마코프 의사결정[10] 등을 이용한 학습 형태의 최적 무장 할당 기법도 제안되고 있다. 단, 이와 같은 휴리스틱 접근의 경우 해의 질(Quality)을 보장할 수 없고, 문제의 전역 최적해를 구하지 못한다는 단점이 있다.

대부분의 NP 조합 최적화 문제는 전역 최적해를 빠르게 찾는 것이 불가능하다. 하지만 최적화 문제가 적절한 수학적 구조를 가질 경우 비교적 빠른 시간 내에 최적화가 가능함이 알려져 있다. 이와 같은 문제의 대표적인 예가 혼합 정수 선형 최적화(Mixed-Integer Linear Programming, MILP) 문제이다[11,12]. MILP 문제는 모든 목적 함수 및 제약 조건이 선형이면서, 일부 변수가 정수 변수인 문제를 말한다. MILP 문제에는 Simplex 기법 또는 Interior Point 기법 등의 다항 시간 선형 최적화 기법을 적용할 수 있고, 추가로 기하학적 특성을 응용한 Cutting Plane, Branch and Bound 기법 등을 활용할 수 있다[11,12]. 따라서 비선형 조합 문제를 MILP로 변형해 빠르게 전역 최적화 하는 기법이 여러 분야에서 연구되고 있다. MILP 변환 기법은 현재 경로 계획[13], 자원 할당, 무장 할당[14,15] 등의 문제에 널리 응용되고 있다.

본 논문에서는 단일 근접 방어 시스템의 MILP를 이용한 최적 무장 할당 기법[15]을 토대로, 여러 개의 근접 방어 시스템을 갖춘 함정의 최적 무장 할당 문제를 MILP로 변형 및 해결하고자 한다. 일반적인 근접 방어 시스템의 경우 회전 포탑에 탑재되어 있기 때문에 위협의 접근 방향에 따라 요격 준비 시간에 큰 차이가 날 수 있다. 따라서 최적 무장 할당을 위해서는 다양한 위협들의 접근 방향 및 접근 시각을 고려해 공격 순서를 조정하여야만 한다. 추가로, 서로 다른 제원의 근접 방어 시스템이 존재하는 경우 각각의 특성을 고려해 어떤 방어 수단을 어떤 위협에 할당할지를 결정해야만 한다. 이와 같은 문제는 본질적으로 비선형 문제이지만, 적절한 수학적 테크닉을 활용하면 모두 선형 제약 조건으로 변형할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2.1장에서는 본 논문에서 다루는 다수 근접 방어 시스템의 무장 할당 문제를 정의한다. 2.2장에서는 주어진 최적 무장 할당 문제를 선형화해 MILP로 변형하는 방법을 제시한다. 2.3장에서는 유도한 MILP 문제를 구현해 최적화한 결과를 제시하고 이를 검증한다. 또한, MILP 기법의 성능을 단순한 전수 조사 기법과 비교한다. 3장에서는 결론을 서술한다.

Ⅱ. 본 론

2.1 CIWS의 무장 할당 문제

2.1.1 기호 정의

- 공용 상수 및 인덱스

I : 방어 자산의 개수

J_i : 각 방어 자산의 최대 공격 가능 횟수
$J_i \leq K \ \forall i$

K : 위협의 개수

i : 방어 자산의 번호, $i \in \{1,...,I\}$
j : 각 공격의 순번, $j \in \{1,...,J_i\}$
k : 위협의 번호, $k \in \{1,...,K\}$

- 방어 자산의 제원

θ_{0i} : 각 방어 자산의 초기 회전각
ω_{0i} : 각 방어 자산의 회전 각속도
TL_i : 방어 자산별 Lock-on 소요시간
TF_i : 방어 자산별 교전소요시간
TC_i : 방어 자산별 교전 결과 확인 소요시간

- 위협 정보

D_k : 위협별 진입 방위각
CT_{ik} : 위협 k가 방어 자산 i의 교전 가능 영역에 진입하는 시각
TA_k : 위협 k가 방어 자산에 도달할 것으로 예측되는 시각

- 최적화 변수

X_{ijk} : i번 방어 자산의 j번째 교전 대상이 위협 k이면 1, 아니면 0인 이진 최적화 변수, $X_{ijk} \in \{0,1\}$
T_{ijk} : i번 방어 자산의 j번째 공격이 위협 k와의 교전을 끝낸 시각, $T_{ijk} \geq 0$
T_{risk} : $TA_k - T_{ijk}$ 중 최솟값, 즉 교전 후 위협 파괴 실패 시 추가 대응 가능한 잔여 시간의 최솟값

- 기타 추가 최적화 변수

M : 선형 변환에 사용되는 충분히 큰 상수
l_{ijk} : 교전 종료 시각 $T_{ijk}X_{ijk}$의 선형화를 위해 사용되는 변수
m_{ij} : 방어 자산의 회전 시간 선형화를 위해 사용되는 변수
p_{ij} : j 번째 교전 대상이 교전 영역에 진입하기까지 대기하는 시간을 나타내는 변수
r_{ij} : 교전 간 시간 간격 제약 조건의 선형화에 사용되는 변수
s_{ij} : $\sum_{k=1}^{K} X_{ijk}$에 해당하는 새 변수
t_{ij} : $\sum_{k=1}^{K} l_{ijk}$에 해당하는 새 변수

2.1.2 제약 조건 및 목적 함수 모델

근접 방어 시스템(CIWS)은 회전하는 포탑을 포함하는 시스템이다. 따라서 각각의 방어 자산은 한 번에 한 위협만 교전 가능하다. 또한, 방어 자산이 위협과 교전 가능한 시각은 위협이 방어 자산의 사정거리 안에 들어온 이후(CT_{ik})이다. 또한, 다음 위협을 공격하려면 이전 교전이 종료되어야만 한다. 추가로, CIWS는 조준을 위해 회전해야 하므로 위협이 진입하는 방향에 따라 공격과 공격 사이에 회전 시간이 소요될 수 있다. 마지막으로 교전에는 Lock-on 시간(TL_i), 교전 소요 시간(TF_i), 교전 결과 확인 시간(TC_i)이 소요된다. 각각 방어 자산의 사정거리 및 제원에 따라 위의 값들은 변경될 수 있다. 제시한 문제 상황을 기호 정의에 맞추어 최적화 문제로 정식화하면 다음과 같다.

① 한 번의 공격은 최대 한 위협에만 할당된다.

$$\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq 1 \quad \forall i,j \tag{1}$$

② $j+1$번째 공격은 j번째 공격이 실행되었을 때만 가능하다.

$$\sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k} \leq \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \ \forall i, j \neq J \tag{2}$$

③ 각 위협과 모두 한 번씩 교전한다.

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ijk} = 1 \ \forall k \tag{3}$$

④ T_{risk}는 모든 (위협 도착 예상 시간) - (위협과의 교전 종료 시간) 보다 작다.

$$T_{risk} \leq TA_k - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} T_{ijk}X_{ijk} \ \ \forall k \tag{4}$$

⑤ 위협과의 교전 개시 시간은 최소한 위협의 공격 가능 영역 진입 시간보다 늦다. 즉 직전 교전 종료 시간, 방어 자산 조준 시간, Lock-on 시간, 대기 시간의 총 합은 다음 공격할 위협의 $CT_{i,k}$ 이후이다.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{K} CT_{ik}X_{i,j+1,k} \leq \\ &\sum_{k=1}^{K} T_{ijk}X_{ijk} + \frac{1}{\omega_{0,i}}\left|\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k}\right| \\ &\quad + TL_i + p_{i,j+1} \ \ \forall i,j \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{K} CT_{ik}X_{i,1,k} \leq \\ &0 + \frac{1}{\omega_{0,i}}\left|\theta_{0,i} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,1,k}\right| + TL_i + p_{i,1} \end{aligned} \tag{6}$$

⑥ 교전 종료 시간은 최소한 직전 교전 종료 시각부터 방어 자산 조준, Lock-on, 대기 및 교전, 교전 결과 확인을 거친 시간보다 늦다.

단, 이 제약 조건은 $\sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k} = 1$, 즉 $j+1$ 번째 발사가 존재하는 경우에만 유효하다. 만약 이와 같은 추가 조건이 없으면 $\sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k} = 0$이고 $\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} = 1$인

경우 (방어 자산 i의 총 공격이 j회인 경우) 항상 주어진 제약 조건이 불능(Infeasible)이게 된다. 식 (7)을 예로 들면, 추가 조건이 성립하지 않는 경우 제약 조건의 좌변은 0이 되지만 우변은 항상 양수가 되어 항상 제약 조건이 불능임을 확인할 수 있다. 따라서 식 (7), (8)은 조건 $\sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k}=1$ 이 성립할 경우에만 고려하는 조건부 제한으로 처리해야만 한다.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K} T_{i,j+1,k}X_{i,j+1,k} \geq \\ &\sum_{k=1}^{K} T_{ijk}X_{ijk} + \frac{1}{\omega_{0,i}}\left|\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k}\right| \\ &+ TL_i + p_{i,j+1} + TF_i + TC_i \\ &\forall\, i,j \;\; s.t. \;\; \sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k} = 1\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K} T_{i,1,k}X_{i,1,k} \geq 0 + \frac{1}{\omega_{0,i}}\left|\theta_{i,0} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,1,k}\right| \\ &+ TL_i + p_{i,1} + TF_i + TC_i \;\; \forall\, i \;\; s.t. \;\; \sum_{k=1}^{K} X_{i,1,k} = 1\end{aligned} \tag{8}$$

⑧ (목적 함수) 최적화 목표는 T_{risk}를 최대화하여 교전 실패시 대응 시간을 최대한 확보하는 것이다.

$$\text{maximize} : \; T_{risk} \tag{9}$$

⑨ (기타 조건) 본 논문에서 고려하는 최적화 변수들은 다음과 같은 비음, 이진 변수이다. (일부 변수들의 사용법은 후술)

$$T_{ijk},\, T_{risk},\, l_{ijk},\, m_{ij},\, p_{ij},\, r_{ij},\, t_{ij} \geq 0 \tag{10}$$

$$X_{ijk},\, s_{ij} \in \{0,1\} \tag{11}$$

2.2 무장 할당 문제의 선형화

2.2.1 제약 조건의 선형화

(이진 변수와의 곱셈 꼴)

2.1장에서 제시한 무장 할당 문제는 비선형 최적화 문제이다. 하지만 X_{ijk}가 이진 변수라는 조건을 활용하면 비선형 항들을 모두 선형 제약 조건으로 변형할 수 있다.

- $T_{ijk}X_{ijk}$의 선형화

$$\begin{aligned}&MX_{ijk} \geq l_{ijk},\;\; -MX_{ijk} \leq l_{ijk} \\ &l_{ijk} \geq T_{ijk} - M(1-X_{ijk}) \\ &l_{ijk} \leq T_{ijk} + M(1-X_{ijk})\end{aligned} \tag{12}$$

위와 같은 곱셈 꼴의 선형화는 X_{ijk}가 0 또는 1인 이진 변수이기 때문에 가능한 것이다. 기존의 비선형 항인 $T_{ijk}X_{ijk}$는 $X_{ijk}=1$일 때 T_{ijk}, $X_{ijk}=0$일 때 0이 된다. 동시에, 위의 선형 제약 조건들에 $X_{ijk}=1$을 대입하면 $M \geq l_{ijk} \geq -M$, $T_{ijk} \geq l_{ijk} \geq T_{ijk}$이 되고, $X_{ijk}=0$을 대입하면 $0 \geq l_{ijk} \geq 0$, $T_{ijk}+M \geq l_{ijk} \geq T_{ijk}-M$이 됨을 확인할 수 있다. 따라서 $M > |T_{ijk}|$가 성립하면 $l_{ijk}=T_{ijk}X_{ijk}$임을 보장한다. 같은 원리로 다른 이진변수와의 곱셈 꼴은 모두 선형화 할 수 있다.

$CT_{ik}X_{ijk}$, D_kX_{ijk}도 이진변수와의 곱과 유사한 형태이다. 하지만 이 때 CT_{ik}, D_k는 상수이므로 선형화가 필요하지 않다.

(절댓값 함수)

마지막으로, 방어 자산 조준을 위한 회전 시간에 해당하는 절대값 형태의 선형화가 필요하다. (※ 주의 : 이와 같은 제약 조건 형태는 CIWS가 ±180°를 통과하는 경우를 고려하지 않는다. 실제 CIWS의 경우 기동 가능 영역이 ±150° 정도로 제한되어 360°회전하지 않는다.)

- $\frac{1}{w_{0,i}}\left|\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k}\right|$의 처리

$$\begin{aligned}&m_{i,j+1} \geq +\frac{1}{w_{0,i}}\left(\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k}\right) \\ &m_{i,j+1} \geq -\frac{1}{w_{0,i}}\left(\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&m_{i,1} \geq +\frac{1}{w_{0,i}}\left(\theta_{i,0} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,1,k}\right) \\ &m_{i,1} \geq -\frac{1}{w_{0,i}}\left(\theta_{i,0} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,1,k}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

이와 같이 선형화 할 경우,

$m_{i,j+1} \geq \frac{1}{w_{0,i}}\left|\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k}\right|$을 보장한다.

(조건부 제한 형태)

식 (7-8)의 조건부 제한 또한 선형 제약 조건으로 변형해야 모든 문제를 MILP로 변환할 수 있다. 다행히도 조건부 제한은 이진 변수와의 곱 형태를 응용해 해결할 수 있다.

식 (7)을 예로 들면, 추가 조건이 성립하지 않는 경우 우변이 0이 되지 않는 문제가 발생한다. 하지만, 이진변수 곱 형태의 선형화 이후 우변의 모든 항에 $\sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k}$를 곱해주면 다음과 같은 새로운 제약 조건을 얻을 수 있다. 하단의 조건 (15)는 (7)과 동치이다.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K} l_{i,j+1,k} \;\geq \sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k} \times \\ &\left(\sum_{k=1}^{K} l_{ijk} + m_{i,j+1,k} + TL_i + p_{i,j+1} + TF_i + TC_i\right) \\ &\forall\, i, j \neq J\end{aligned} \tag{15}$$

$\sum_{k=1}^{K} X_{i,j+1,k}$ 또한 최적점에서는 제약 조건 (1)에 의해 값이 0 또는 1인 이진 변수이다. 따라서 곱의 선형화 기법이 적용 가능하다.

곱의 선형화를 진행하기 전에, 먼저 다음과 같이 반복되는 합 형태를 새로운 변수로 정의한다. 이와 같은 작업은 전체 선형 제약 조건을 행렬로 나타냈을 때 0이 아닌 행렬원소(Nonzero Matrix Element)의 개수를 줄여 최적화 계산 작업시 성긴 행렬(Sparse Matrix)의 계산 속도 향상에 도움을 준다.

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \quad \forall i,j \tag{16}$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{K} l_{ijk} \quad \forall i,j \tag{17}$$

새로 정의한 변수들을 바탕으로 (7)를 재정의하면 (18)과 같다. 같은 방법으로 (8) 또한 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} & t_{i,j+1} \geq s_{i,j+1} \times \\ & (t_{ij} + m_{i,j+1} + TL_i + p_{i,j+1} + TF_i + TC_i) \\ & \forall i,j \neq J \end{aligned} \tag{18}$$

이진변수 s_{ij}와의 곱 형태는 (19)와 같이 새로운 변수를 정의하면 선형으로 변환 가능하다. 결과적으로 (7, 8)의 비선형 제약 조건은 (27)의 선형 제약 조건과 (28, 31-33)의 보조 제약 조건들로 변형된다.

$$\begin{aligned} & Ms_{ij} \geq r_{ij}, \ -Ms_{ij} \leq r_{ij} \\ & r_{ij} \geq t_{i,j-1} + m_{ij} + TL_i + p_{ij} \\ & \quad + TF_i + TC_i - M(1 - s_{ij}) \\ & r_{ij} \leq t_{i,j-1} + m_{ij} + TL_i + p_{ij} \\ & \quad + TF_i + TC_i + M(1 - s_{ij}) \\ & r_{i,1} \geq 0 + m_{i1} + TL_i + p_{i,1} \\ & \quad + TF_i + TC_i - M(1 - s_{i,1}) \\ & r_{i,1} \geq 0 + m_{i1} + TL_i + p_{i,1} \\ & \quad + TF_i + TC_i + M(1 - s_{i,1}) \\ & \quad \forall i,j \neq 1 \end{aligned} \tag{19}$$

2.2.2 혼합 정수 선형 최적화 문제

2.1장에서 제시한 비선형 무장 할당 문제는 2.2.1장과 같은 선형화 과정을 거치게 되면 최종적으로 다음과 같은 혼합 정수 선형 최적화 문제로 변형된다. 이와 같은 문제는 MILP를 지원하는 상용 솔버로 적절한 시간 내에 해결할 수 있음이 알려져있다.

maximize:

$$T_{risk} \tag{20}$$

subject to:

$$s_{ij} \leq 1 \quad \forall i,j \tag{21}$$

$$t_{i,j+1} \leq t_{ij} \forall i,j \neq J \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} X_{ijk} = 1 \ \forall k \tag{23}$$

$$T_{risk} \leq TA_k - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} l_{ijk} \quad \forall k \tag{24}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{K} CT_{ik} X_{i,j+1,k} \leq \\ & \sum_{k=1}^{K} l_{ijk} + m_{i,j+1} + TL_i + p_{i,j+1} \quad \forall i,j \end{aligned} \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{K} CT_{ik} X_{i,1,k} \leq 0 + m_{i,1} + TL_i + p_{i,1} \tag{26}$$

$$t_{ij} \geq r_{ij} \quad \forall i,j \tag{27}$$

$$\begin{aligned} & MX_{ijk} \geq l_{ijk}, \ -MX_{ijk} \leq l_{ijk} \\ & l_{ijk} \geq T_{ijk} - M(1 - X_{ijk}) \\ & l_{ijk} \leq T_{ijk} + M(1 - X_{ijk}) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} & m_{i,j+1} \geq + \frac{1}{w_{0,i}} \left(\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k} \right) \\ & m_{i,j+1} \geq - \frac{1}{w_{0,i}} \left(\sum_{k=1}^{K} D_k X_{ijk} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,j+1,k} \right) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} & m_{i,1} \geq + \frac{1}{w_{0,i}} \left(\theta_{i,0} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,1,k} \right) \\ & m_{i,1} \geq - \frac{1}{w_{0,i}} \left(\theta_{i,0} - \sum_{k=1}^{K} D_k X_{i,1,k} \right) \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} & Ms_{ij} \geq r_{ij}, \ -Ms_{ij} \leq r_{ij} \\ & r_{ij} \geq t_{i,j-1} + m_{ij} + TL_i + p_{ij} \\ & \quad + TF_i + TC_i - M(1 - s_{ij}) \\ & r_{ij} \leq t_{i,j-1} + m_{ij} + TL_i + p_{ij} \\ & \quad + TF_i + TC_i + M(1 - s_{ij}) \\ & r_{i,1} \geq 0 + m_{i1} + TL_i + p_{i,1} \\ & \quad + TF_i + TC_i - M(1 - s_{i,1}) \\ & r_{i,1} \geq 0 + m_{i1} + TL_i + p_{i,1} \\ & \quad + TF_i + TC_i + M(1 - s_{i,1}) \\ & \quad \forall i,j \neq 1 \end{aligned} \tag{31}$$

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \quad \forall i,j \tag{32}$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{K} l_{ijk} \quad \forall i,j \tag{33}$$

$$T_{ijk}, \ T_{risk}, \ l_{ijk}, \ m_{ij}, \ p_{ij}, \ r_{ij}, \ t_{ij} \geq 0 \tag{34}$$

$$X_{ijk}, s_{ij} \in \{0, 1\} \tag{35}$$

2.3 시뮬레이션 및 결과

2.3.1 시뮬레이션 환경 구현

제시한 MILP 문제는 다양한 상용 최적화 솔버를 사용해 모델링 및 최적화가 가능하다. 본 연구에서는 Gurobi[16] 솔버의 python 인터페이스를 이용해 문제를 직접 구현하였다. Gurobi는 다양한 presolve, branch and bound, cutting plane, 병렬 계산 기법 등을 이용해 MILP 문제의 전역 최적해를 빠른 시간 내에 제공한다.

또한 MILP 기법의 검증 및 성능 확인을 위해 모든 경우의 수를 전수 조사(Exhaustive Search)하는 기법을 python 스크립트로 구현하였다. 전수 조사 기법은 작은 크기(위협 ~10개 내외, 방어 자산 2개 이하)의 문제에서만 현실적인 시간 내에 동작한다. 하지만 모든 경우의 수를 고려하므로 MILP 기법의 무오류성을 검사하는데 적절하다.

2.3.2 결과 검증 및 분석

MILP 기법에서 제공하는 해의 전역 최적성은 전수 조사 기법으로 찾은 전역 최적해와 비교해 검증할 수 있다. 최적해의 검증을 위해 다음과 같은 예시 시나리오를 고려하였다.

$$I=1,\ J=9,\ K=9 \tag{36}$$

$$TL_1=0,\ TF_1=1,\ TC_1=1\,(\mathrm{sec}) \tag{37}$$

$$\theta_{0,1}=0\,(\mathrm{deg}),\quad \omega_{0,1}=100\,(\mathrm{deg/sec}) \tag{38}$$

$$D_{1k}=[-50,-30,-10,+40,+60,\\ +00,+14,-05,-50]\,(\mathrm{deg}) \tag{39}$$

$$CT_{1k}=[1,4,2,3,0,3,8,0,7]\,(\mathrm{sec}) \tag{40}$$

$$TA_{1k}=CT_{1k}+100\ (\mathrm{sec})\,\forall k \tag{41}$$

이 경우 전수 조사 기법과 MILP 기법에서 제공하는 해는 각각 Table 1, Table 2와 같다. (X_{ijk}, T_{ijk} 중 의미 있는 부분만 표기하였다.) 계산 시간은 Intel® i7-8750 프로세서 및 16GB 메모리가 탑재된 컴퓨터에서 50회 실행 후 평균 내어 측정하였다.

Table 1. Optimization result using exhaustive search

Algorithm	exhaustive search
Optimal Objective (TA)	86.95 sec
Order of Engagement (X_{ijk})	[8, 5, 4, 6, 3, 1, 2, 9, 7]
Time of Engagement (T_{ijk})	[2.05, 4.7, 6.9, 9.2, 11.4, 13.8, 16.0, 18.8, 21.05] sec
Computation Time	12.95 sec

Table 2. Optimization result using MILP approach

Algorithm	MILP
Optimal Objective (TA)	86.95 sec
Order of Engagement (X_{ijk})	[8, 5, 4, 6, 3, 1, 2, 9, 7]
Time of Engagement (T_{ijk})	[2.05, 4.7, 6.9, 9.2, 11.4, 13.8, 16.0, 18.8, 21.05] sec
Computation Time	0.273 sec

최적화 결과(Tables 1,2)에서 확인할 수 있듯이, 두 접근 방법 모두 동일한 최적해로 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 예시 시나리오에서 전수 조사는 137초가량 계산 시간이 소요된 반면, MILP 기법을 이용한 경우 1초 안에 최적해를 얻을 수 있었다. 이와 같은 결과는 (지면상 포함하지 않은) 다른 추가 시나리오 테스트에서도 동일하였다. 따라서 2.2장에서 유도한 MILP 형태 정식화가 올바르고, 계산 시간을 확연히 단축함을 확인할 수 있다. 또한, 다양한 휴리스틱 근최적 기법과 달리 MILP 기법을 사용하면 근사 없이 기존 비선형 문제의 전역 최적해를 정확히 구할 수 있음도 확인할 수 있다.

Table 3은 무작위로 다양한 시나리오를 생성해 전수 조사와 MILP 기법의 계산 시간 평균치를 비교한 결과이다. 위협 개수와 방어 자산 개수가 적을 때는 전수 조사가 빠를 수 있지만, 미지수 개수가 늘어나면 전수 조사의 성능이 급격히 떨어지는 것을 확인할 수 있다. 반면 MILP의 경우에는 미지수 개수가 늘어나도 비교적 빠르게 최적화가 가능함을 확인할 수 있다. 또한, MILP 기법을 사용하는 경우 확장성(Scalability)이 개선되어 위협 ~15개 정도까지는 10초 내외에 전역 최적화를 수행할 수 있는 것을 확인할 수 있다.

Table 3. Computation time comparison, exhaustive search versus MILP approach

	Num. CIWS (I)			
	1		2	
Num. Threat (K)	Exhtv.	MILP	Exhtv.	MILP
3	0.0010	0.014	0.0014	0.022
5	0.0034	0.048	0.015	0.085
7	0.140	0.156	1.083	0.264
10	137.7	2.079	1501.0	1.245
15	N. A.	17.57	N. A.	14.31

Table 4. Mean Computation time, MILP approach

	Num. CIWS (I)				
Num. Threat (K)	1	2	3	5	10
5	0.156	0.264	0.311	0.504	N. A.
10	2.079	1.245	1.581	2.206	2.957
15	17.57	14.31	16.57	18.73	19.80
20	415.3	407.9	387.6	341.4	399.2

Table 5. Min/Max Computation time, MILP approach

		Num. CIWS (I)				
Num. Threat (K)		1	2	3	5	10
5	Min	0.097	0.122	0.193	0.348	N. A.
	Max	0.247	0.393	0.535	0.654	N. A.
10	Min	0.499	0.606	0.797	0.972	2.083
	Max	7.290	1.879	2.916	4.558	9.062
15	Min	5.675	3.176	4.831	5.680	8.683
	Max	143.0	37.71	96.40	50.63	39.21
20	Min	23.54	39.36	33.71	42.31	41.94
	Max	2463	2142.	2144.	2052.	2390.

Tables 4, 5에서는 더욱 자세한 MILP 기법의 계산 소요 시간 결과를(평균, 최소, 최대) 확인할 수 있다. 계산 시간은 D_k, CT_{ik}를 무작위로 바꾸어가며 생성한 50개의 무장할당 문제를 풀어 측정하였다.

Ⅲ. 결 론

본 논문에서는 다수 이종 근접 방어 시스템의 최적 무장 할당 문제를 제시하고, 이를 선형화해 MILP 문제로 변형, 빠르게 해결하는 기법을 제안하였다. 또한, 결과로 제시한 선형 문제를 직접 구현하여 전수 조사 기법과 비교 및 분석하였다. 실제 구현을 바탕으로 MILP 기법에서 얻은 해와 전수 조사에서 얻은 해를 비교해 MILP 변환의 적절성을 검증하였다. 또한, 위협 및 방어 자산 개수가 늘어날수록 MILP 기법이 계산 시간 측면에서 유리함을 확인하였다. 또한, 위협 개수 15개 내외까지 최적해를 준실시간(10초 내외) 안에 계산해낼 수 있음을 보였다.

본 논문에서는 간단한 근접 방어 시스템 모델만을 사용하였다. 하지만 실제 함정 운용 시에는 추가적인 비선형 제약 조건들이 존재한다. 이와 같은 제약 조건들을 추가로 고려하면 실제 함정 방어 시스템에 MILP 기법을 적용 가능할 것으로 기대한다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 지원(UD170001DD)을 받아 수행하였으며, 이에 감사드립니다.

References

1) Jeon, I. S., Lee, J. I., and Tahk, M. J., “Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles,” *IEEE Transaction on Control Systems Technology,* Vol. 14, No. 2, March 2006, pp. 260~266.

2) Tahk, M. J., Shim, S. W., Hong, S. M., Lee, C. H., and Choi, H. L., “Impact time control based on time-to-go prediction for sea-skimming anti-ship missile,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* Vol. 54, No. 4, August 2018, pp. 2043~2052.

3) Rosenberger, J. M., et al, “The Generalized Weapon Target Assignment Problem,” *10th International Command and Control Research and Technology Symposium*, June 2005.

4) Ma, F., Ni, M., Gao, B., and Yu. Z., “An Efficient Algorithm for the Weapon Target Assignment Problem,” *Proceeding of the 2015 IEEE International Conference on Information and Automation*, August 2015, pp. 2093~2097.

5) Xin, B., et al., “An Efficient Rule-Based Constructive Heuristic to Solve Dynamic Weapon Target Assignment Problem,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part A: Systems and Humans*, Vol. 41, No. 3, 2011, pp. 598~606.

6) Leboucher, C., et al., “Optimal Weapon Target Assignment Based on an Geometric Approach,” *Proceedings of the 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace,* Vol. 46, Issue 19, 2013, pp. 341~346.

7) Leboucher, C., et al., “Novel Evolutionary Game Based Multi-Objective Optimisation for Dynamic Weapon Target Assignment,” *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Vol. 47, Issue 3, 2014, pp. 3936~3941.

8) Park, J. M., Roh, H., and Tahk, M. J., “Co-evolutionary Method For Dynamic Weapon-Target Assignment,” *Advances in Control and Optimization of Dynamic Systems, Hyderabad, India,* February 2018.

9) Mouton, H., Roodt, J., and le Roux, H., “Applying Reinforcement Learning to the Weapon Assignment Problem in Air Defence,” *Scientia Militaria, South African Journal of Military Studies*, Vol. 39, No. 2, 2011, pp. 123~140.

10) Ma, Y., and Chou, C., “Weapon Target Assignment Decision Based on Markov Decision Process in Air Defense,” *System Simulation and Scientific Computing*, Vol. 327, 2012, pp. 353~360.

11) Vielma, J. P., “Mixed Integer Linear Programming Formulation Techniques,” *SIAM Review*, Vol. 57, No. 1, February 2015, pp. 3~57.

12) Wolsey, L. A., Nemhauser, G. L., *Integer and Combinatorial Optimization*, 1st Ed., John Wiley & Sons, New York, 1999.

13) Richards, A., Schouwernaars, T., How, J. P., and Feron, E., “Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 4, 2002, pp. 755~764.

14) Lee, D. R., and Yang, J. H., “A Study on the Allocation and Engagement Scheduling of Air Defense Missiles by Using Mixed Integer Programming,” *Korean Management Science Review*, Vol. 32, No. 4, December 2015, pp. 109~133.

15) Roh, H., and Tahk, M. J., “Optimization of Closed-In Weapon System Target Assignment Using Mixed Integer Linear Programming,” *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Spring Conference,* April 2018, pp. 437~438.

16) *Gurobi Optimizer Reference Manual*, Gurobi Optimization, LLC, http://www.gurobi.com, 2018.