



## Two-dimensional unsteady flow analysis with a five region turbulence models for a simple pipeline system

Kim, Hyun Jun<sup>a</sup> · Kim, Sangh Hyun<sup>a\*</sup> · Baek, Da Won<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Civil Engineering, Pusan National University

Paper number: 18-066

Received: 9 August 2018; Revised: 11 September 2018; Accepted: 11 September 2018

### Abstract

An accurate analysis of pipeline transient is important for proper management and operation of a water distribution systems. The computational accuracy and its cost are two distinct components for unsteady flow analysis model, which can be strength and weakness of three-dimensional model and one-dimensional model, respectively. In this study, we used two-dimensional unsteady flow model with Five-Region Turbulence model (FRTM) with the implementation of interaction between liquid and air. Since FRTM has an empirical component to be determined, we explored the response feature of two-dimensional flow model. The relationship between friction behaviour and the variation of undetermined parameter was configured through the comparison between numerical simulations and experimental results.

**Keywords:** Pipeline analysis, Two-dimensional flow analysis, Turbulence model, Velocity profile, Waterhammer

## 단순한 관망체계에서 5영역 난류 모형을 이용한 2차원 부정류 흐름 해석 연구

김현준<sup>a</sup> · 김상현<sup>a\*</sup> · 백다원<sup>a</sup>

<sup>a</sup>부산대학교 공과대학 환경공학과

### 요 지

관망의 해석은 관망의 설치, 운영에서 매우 중요한 요소이다. 이를 위한 연구 방법은 1차원 모형과 3차원 모형이 있으나 각각은 정확도와 계산속도의 면에서 관망 해석에 장점과 한계점을 보인다. 2차원 모형의 경우 1차원 모형과 달리 난류 점성을 이용하여 보다 정확한 마찰을 모의할 수 있게 하는데, 이때 사용되는 난류 점성을 모의하는 모형은 Five-Region Turbulence Model을 이용하였다. 그러나 이들 모형에 사용되는 매개 변수들은 실험에 의한 값이기 때문에 이러한 매개변수에 따른 2차원 부정류 해석 방법의 응답 특성을 알아보았다. 이를 위해 실제 상수관망에서의 수격압 데이터와 부정류 해석 모형으로 부터의 수격압 데이터를 비교하고, 다양한 매개변수에 따른 속도 분포 모의 특성을 조사하였다. 이를 통해서, 난류 해석 모형의 마찰 거동과 매개변수와의 관계를 규명하였다.

**핵심용어:** 관망해석, 2차원 부정류 해석, 난류 모형, 속도 분포, 수격압

## 1. 서 론

상수 관망해석은 밸브조작, 펌프거동 등의 경계 조건의 변화에 따른 압력과 유량 변화를 정확히 예측하는데 유용하게 사용된다. 이중 부정류 해석(unsteady flow analysis)은 상수

관망의 설계와 수리학적 구조물의 설치와 운용 중요하고, 부정류를 동반한 수질 문제에도 중요하게 사용될 뿐만 아니라 진단 도구로서도 중요한 역할을 한다(Ghidaoui *et al.*, 2005).

부정류 해석에서 가장 널리 사용되는 모형화 방법은 1차원 모형(one-dimensional model)이다. 이는 모형의 단순함과 빠른 수치연산의 속도를 이유로 가장 널리 사용된다(Chaudhry, 1987; Wylie *et al.*, 1993). 하지만, 모형에 존재하는 정상상태

\*Corresponding Author. Tel: +82-51-510-2479  
E-mail: kimsangh@pusan.ac.kr (S. H. Kim)

마찰항(steady state friction term)의 존재에 의해 실제 실험결과와 현격한 차이가 발생하고, 이러한 차이를 줄이기 위한 다양한 비정상상태 마찰항들이 제안되기도 했다(Zielke, 1968; Brunone *et al.*, 1991; Vardy *et al.*, 1993). 부정류 해석방법 중 가장 정확한 3차원 모형(three-dimensional model)은 나비에-스톡스 식(Navier-Stokes Equation)을 이용하여 부정류 현상의 모의하는 방법으로 1차원 모형에 비해서 높은 정확도를 보이지만 아주 많은 계산시간이 소모되므로 관로의 연장이 길고, 긴 모의 시간을 요구하는 실제 상수관망 해석에 이용하는 것은 불가능하다.

2차원 모형(2D model)은 1차원 모형의 계산 효율성과 3차원 모형의 모형 정확도의 합리적인 절충안이다. 2차원 모형은 전이상태(transient state)에서의 마찰항을 1차원모형에 비해서 정확하게 묘사할 수 있으며, 관내에서의 속도분포(velocity profile)를 얻어낼 수 있어서, 이를 이용하여 관내의 물질 전달 현상을 보다 정확하게 묘사할 수 있다. 또한, 3차원 모형에 비해서 훨씬 작은 계산시간이 소모되어 수관망 적용에도 매우 용이하다. 이러한 2차원 모형은 1차원 모형의 검증 도구로도 이용될 수 있어서 그 활용도가 매우 크다(Ghidaoui *et al.*, 2005). 1차원 모형과 차별되는 2차원 모형의 해석적 특징은 1차원 모형에서는 관 내부에서 모두 동일한 유속을 가정(Uniform velocity)하여 길이방향(Longitudinal direction)에서만 시간에 따른 수두-유량(Head-Flowrate)를 해석하지만, 2차원 모형에서는 관 내부 직경방향(Radial direction)에 따른 해석을 추가적으로 수행한다는 점이다. 최초의 2차원 모형의 지배방정식(Governing equation)은 Vardy and Hwang (1991)이 제안하였다. 이후 계산의 효율성을 높이기 위해 Zhao and Ghidaoui (2003)이 개선된 수치 해석 방법을 제안하고, 이를 통해 계산의 정확도는 유지하면서 개선된 계산속도를 얻어낼 수 있었다. 두개의 연구 모두에서 2차원 모형의 부정류 해석 결과가 1차원 모형의 해석 결과보다 실험관망의 관측결과와 높은 일치도를 보임을 확인했다.

앞서 서술한 바와 같이 2차원 모형은 1차원 모형이 정상상태 마찰항을 사용함과 달리 전이상태에서의 마찰을 상대적으로 정확히 모의할 수 있는 방법을 이용한다. Vardy and Hwang (1991)의 모형에서는 Kita *et al.* (1980)에서 제안된 Five-Region Turbulence Model (FRTM)을 이용한다. 이는 관벽에서부터 관의 중심까지를 총 다섯개의 영역으로 나누어, 각 영역에서의 점성을 동적으로 적용하는 모형이다. FRTM은 실험에 의해 만들어진 모형이므로 모형에 사용되는 계수들의 값도 역시 실험에 의해 정해지고, 이를 미리 정하는 것이 불가능하다(Naser, 2006). 그렇기 때문에, 2차원 모형을 이용하기 위해서

는 시스템에 대한 실험을 수행하고, 임의의 계수들을 반복적으로 대입하며 실험과 수치 모의 결과를 비교하여 해석의 객체가 되는 시스템을 가장 잘 표현할 수 있는 매개변수를 도출해야한다. 이때 사용되는 다양한 매개변수에 대한 수치모의의 경향이 분석된다면 계수의 반복적 대입에 따른 수치모의의 응답을 예측해 볼 수 있겠지만, 이러한 계수에 대한 모형 응답에 관련된 연구는 이루어진 바 없다.

본 연구에서는, 2차원 모형에서 이용되는 FRTM에서의 계수에 따른 수치 모형의 응답을 알아본다. 이를 위해서, 상수관망 모의 관로를 이용하여 부정류 현상 실험결과를 수행하고, 이를 Kim and Kim (2018)에서 제안한 공동현상 표현이 가능한 2차원 모형의 수치해석 결과와 비교한다. 이를 통해서 수치해석에 이용되는 FRTM 계수들을 다양하게 적용하며 모형의 응답 특성을 분석하여, 경험적인 매개변수의 변동성이 관망체제의 마찰거동에 주는 영향을 규명한다.

## 2. 2차원 모형

### 2.1 모형의 지배방정식

본 연구에서는 Kim and Kim (2018)에서 제안된 공동 현상(vaporous cavitation)의 표현이 가능한 2차원 모형을 이용한다. 이는 기존 Vardy and Hwang (1991)의 모형을 수정하여 공동현상에 대한 묘사가 가능하게 표현한 형태이다. Eqs. (1) and (2)는 각각 Kim and Kim (2018)의 2차원 부정류 해석의 연속방정식(Continuity equation)과 운동량방정식(Momentum equation)이다.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{1}{r} \frac{\partial rV}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \ln(1 - \alpha_v)}{\partial x} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

여기서,  $t$ 는 시간,  $x$ 와  $r$ 은 각각 길이방향, 직경 방향에 대한 좌표,  $g$ 는 중력가속도,  $a$ 는 동질한(Homogeneous) 유체의 탄성(Elastic) 관내에서의 파속도,  $U$ 는 길이방향 유속(Longitudinal flow velocity),  $V$ 는 직경방향 유속(Radial flow velocity)을 나타낸다.

또한, 보조변수(Auxiliary variable)  $\varphi$ 는 증기에 의한 공동현상에 의해 감소된 압력(Piezometric head)를 나타내며 다음과 같이 표현할 수 있다(Kim and Kim, 2018).

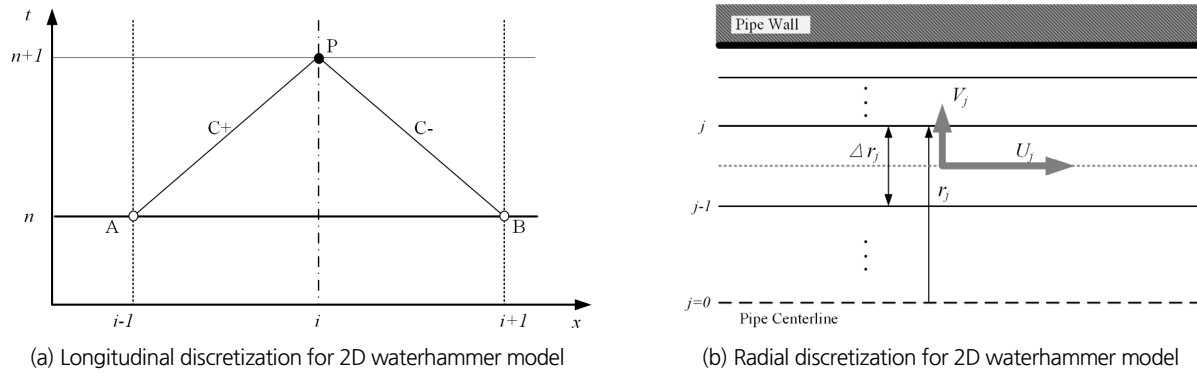


Fig. 1. Location of study basin

$$\varphi = H + (a^2/g)\ln(1 - \alpha_v) \quad (3)$$

여기서,  $H$ 는 압력(Piezometric head)를 나타내며,  $\alpha_v$ 는 액체-증기 혼합 물질에서의 증기의 부피 분율(Volume fraction)을 나타낸다.

유체의 압력인 와 증기 부피 분율은 Eqs. (4) and (5)와 같이 평가할 수 있다.

$$H = \max(\varphi, H_v) \quad (4)$$

$$\alpha_v = \max[0, 1 - \exp(\frac{\varphi - H_v}{a^2/g})] \quad (5)$$

여기서,  $H_v$ 는 내압수두 단위의 유체의 증기압을 의미한다.

Eqs. (1) and (2)를 특성 방정식(Characteristic equation)의 형태로 바꾸면 Eq. (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \pm \frac{a}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{a^2}{g} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \pm \frac{a}{g} \frac{1}{r\rho} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \pm \frac{a^3}{g} \frac{\partial \ln(1 - \alpha_v)}{\partial x} \quad (6)$$

여기서,  $q = rV$ 이고, 이는 단위 길이당 직경방향 유량(Radial flow)을 의미한다.

이를 Fig. 1과 같은 수치적 격자 단위 위에서 풀어 나가게 된다.

Fig. 1(a)는 2차원 수격모형의 관로 연장 방향의 격자를 도식화한 것이고, Fig. 1(b)는 이 모형의 반경방향의 이산화(discretization)을 표현한 그림이다.

## 2.2 난류 모형

본 연구에서는 Kim and Kim (2018)에서 활용된 것과 같이 Kita *et al.* (1980)의 FRTM을 이용한다. FRTM에서는 파이프의 단면적을 5개의 흐름이 존재하는 영역(Five flow-regime)으로 나눈다. 이는 관벽 바로 옆에 있는 점성저층(viscous layer), 완충영역I(buffer layer I), 완충영역II(buffer layer II), 로그변

Table 1. Five-region turbulence model

Region		Range of the region	Turbulence viscosity
Region 1 (Wall region)	Viscous layer	$0 < y^* < \frac{1}{\beta}$	$\frac{\nu_t}{\nu} = 1.0$
Region 2	Buffer layer I	$\frac{1}{\beta} < y^* < \frac{\beta}{C_b}$	$\frac{\nu_t}{\nu} = \beta y^*$
Region 3	Buffer layer II	$\frac{\beta}{C_b} < y^* < C_{c2}$	$\frac{\nu_t}{\nu} = C_b y^*$
Region 4	Logarithmic region	$C_{c2} < y^* < C_{c3}$	$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa y^* \left(1 - \frac{\kappa y^*}{4C_m R_e^*}\right)$
Region 5 (Core region)	Core region	$C_{c3} < y^* < R_e^*$	$\frac{\nu_t}{\nu} = C_c R_e^*$

where,  $R_e^* = UR/\nu$ ,  $U^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ ,  $y^* = U^*y/\nu$ ,  $y = R - r$ ,  $R$  is radius of pipe,  $\tau_w$  is wall shear stress.

환영역(logarithmic region) 그리고 관의 중심부 근처에 존재하는 중심층(core region)이다. 그리고 각 지역에 따른 난류 점성(Turbulence viscosity)은 Table 1과 같이 대수적으로 산정할 수 있다.

Kita *et al.* (1980)에서는 실험에 의해 변수의 값을 산정하였는데,  $\beta=0.19$ ,  $C_b=0.011$ ,  $C_m=0.077$ ,  $\kappa=0.41$ 이다.  $C_c$ 는 일반적으로 Reynolds 수의 함수로 나타내어지고 이는 0.05-0.07의 범위에서 결정된다.  $C_2$ 와  $C_3$ 의 값은 다음과 같이 결정된다.

$$C_2 = \frac{\kappa}{C_b + \left(\frac{\kappa^2}{4C_b R_e^*}\right)} \tag{7}$$

$$C_3 = \frac{2C_m R_e^*}{\kappa} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{C_c}{C_m}}\right) \tag{8}$$

일반적으로 위 변수들 중에선 다른 값들은 민감도가 높지 않기 때문에 실험에 의해 밝혀진 값을 이용하게 되지만,  $\beta$ 의 경우에는 그 값이 시스템마다 달라지고, 그 범위가 매우 넓어서 결정하기가 쉽지 않다(Naser, 2006).

### 3. 난류 모형 변수에 따른 2차원 모형의 수치 모형 결과 비교

#### 3.1 실험관망의 구성

난류 모형 변수에 따른 모형의 응답 특성을 비교해보기 위해 이탈리아의 University of Cantania에서의 실험 결과를 이용했다(Pezzinga, 1999). 관은 아연도금강판(Zinc-plated steel) 이고 관의 내경, 두께, 탄성계수, 조도는 각각 53.2 mm, 3.35 mm,  $2.06 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ , and 0.11 mm 이다. 원래의 실험 관망은 관의 상부에서 펌프를 이용하여 전체에 공급하지만, 펌프를 일정한 속도로 정상 상태(Steady state)로 운전하고, 밸브의 급폐를 수행하기 때문에 관망 내부의 유속 및 수두 유지를 Fig. 2

와 같이 두개의 저수조(Reservoir)를 이용하여 유지하는 저수조-밸브-관-저수조(Reservoir-Valve-Pipe-Reservoir)관으로 가정하여 수치 연산을 수행 하였다.

관의 총 길이는, 144.71 m 이고, 실험에 이용된 물의 온도는 21.5°C이며, 이에 따른 파속도는  $1,359 \text{ ms}^{-1}$ 이다.

#### 3.2 2차원 모형과 1차원 모형의 해석 결과 비교

Fig. 2의 실험 관망에서 급격한 밸브의 폐쇄에 의한 수격압을 수치 모의하기 위해 1차원 모형과 2차원 모형을 이용하였다. 1차원 모형 모의를 위해서 총 100개의 절점으로 나누었다. 이때의 정상상태 마찰 계수(Steady state friction factor)는 0.02로 설정했다. 2차원 모형에서는 관을 직경방향으로 총 100개의 실린더로 나누고 길이방향으로 290개의 원통으로 나눴다. 두 모형 모두에서 수치연산의 안정성을 확보하기 위해 Courant Number를 1.0으로 설정하고 이를 위해 수치 연산의 시간 간격을  $3 \cdot 61 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ 로 설정 하였다. Fig. 3 은 Fig. 2의 관망에서 실험결과, 1차원 모의 결과, 2차원 모의결과를 비교한 결과이다. 실험결과와 1차원 모형에 의한 수격압 모의의 결과는 첫 번째 압력파의 거동에서는 높은 유사도를 보였지만, 이후의 압력파의 거동에서는 실험결과와 상당한 차이가 있다. 1차원 모형의 모의 결과가 실험 결과보다 압력을 과도하게 해석하는 경향이 있는데, 이는 1차원 모형의 마찰항으로 정상상태의 마찰항이 사용되기 때문이다. 반면, 2차원 모형은 실험결과와 상당한 유사성이 있다. 이는 1차원 모형과 상이하게 마찰항의 적용에 있어서 동적 난류 점성 모형을 사용하기 때문이다.

#### 3.3 난류 모형 매개 변수에 따른 2차원 모형의 수치연산 결과의 비교

난류 모형의 매개 변수에 따른 2차원 모형의 수치연산을 비교하기 위해 난류 모형의 매개 변수는 Kita *et al.* (1980)에서 제안한 기본값들을 모두 사용하고 영향이 가장 큰  $\beta$ 에 대해서는 이에 따른 수치 모형 결과를 비교하기 위해 그 값을 0.19, 0.25, 0.30, 0.40, 0.50로 적용하였다. Fig. 4는 Pezzinga (1999)

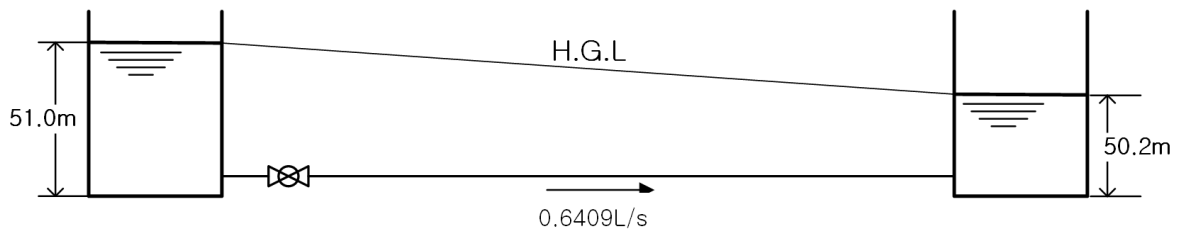


Fig. 2. Schematic of experimental setup (Pezzinga, 1999)

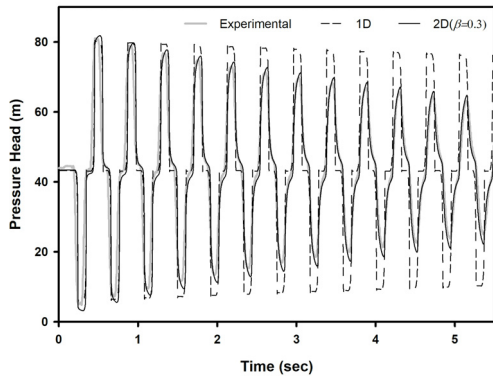


Fig. 3. Comparison between the 1D and 2D experimental results

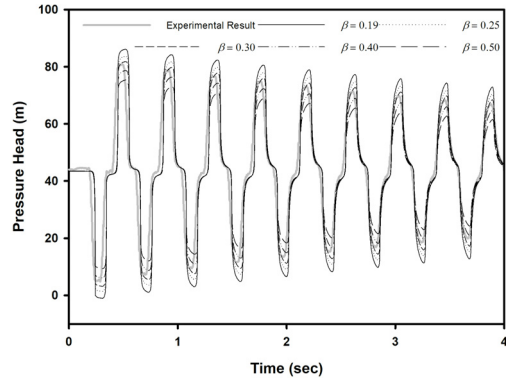
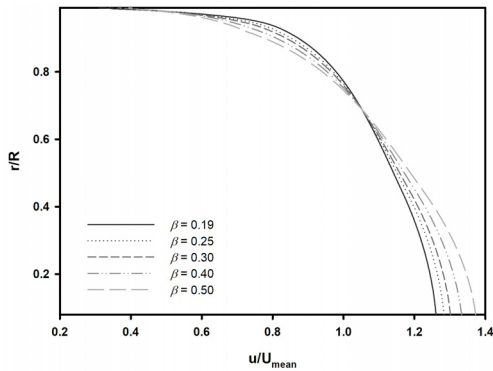


Fig. 4. Comparison between experimental result and numerical results with various parameters for FRTM

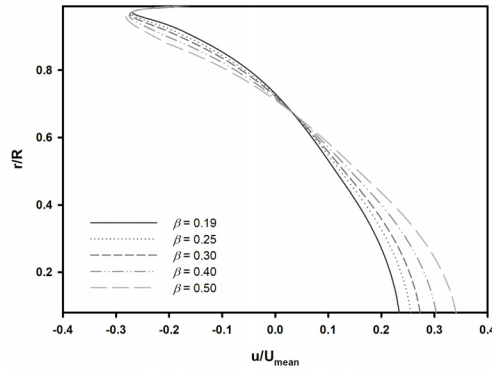
의 실험에서의 가운데 위치에서의 수격현상 관찰 결과와 다양한 관를 수치모의에 적용한 결과를 비교한 그래프이다. Pezzinga (1999)의 실험 결과 직선관망에서 중간 위치의 전형적인 수격압 패턴을 관찰할 수 있었다. 매개 변수 값이 증가함에 따라 수충격의 최고수압과 최저수압의 차이가 줄어드는 것을 관찰할 수 있다. 실험에서의 수충격 현상을 가장 잘 모의하는 매개

변수  $\beta$ 의 값은 0.30이다.

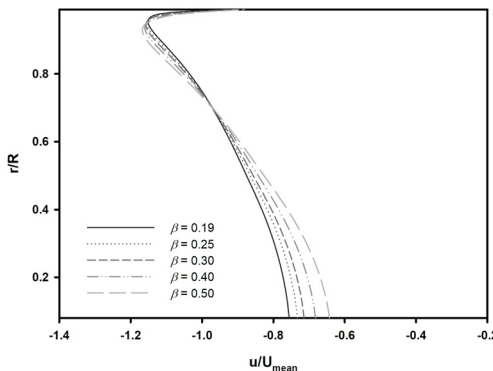
Fig. 5(a)는 다양한 매개 변수 값에 따른 정상상태에서의 길이방향 속도 분포이다. 관벽에서의 전단 응력에 의해 관벽 주변에서 속도가 작고 이것이 관의 중심부로 이동함에 따라 커지는 것을 확인할 수 있다. 값이 커짐에 따라 관벽에서 관의 가운데로의 속도 구배가 가파르게 수치모의의 결과를 확인할 수 있다.



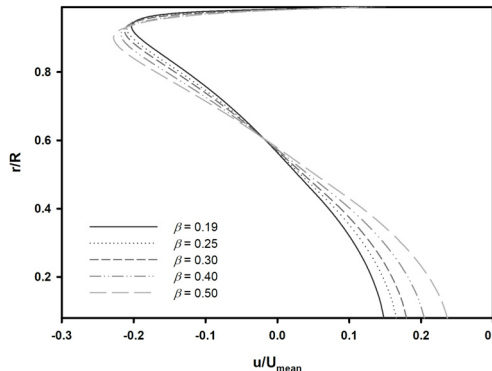
(a) Steady state



(b) 1.0 L/a



(c) 2.0 L/a



(d) 2.5 L/a

Fig. 5. Longitudinal velocity profile with various parameter for FRTM

Fig. 5(b), Fig. 5(c), Fig. 5(d)는 각각 밸브의 폐쇄가 완료된 1.0 L/a, 2.0 L/a, 2.5 L/a 이후의 속도 분포를 나타낸 그래프이다. 여기서 L/a는 시간을 나타내는 매개변수로 전체 관망의 길이 L을 파속도  $a$ 로 한차레 이동할 때 걸리는 시간을 나타낸다. 수격현상에 따라 파가 관망의 상부로부터 하부로 이동하고, 물의 흐름이 역전되는 현상을 그래프를 통해 확인할 수 있다. 이러한 역전 현상이 나타나는 가운데, 관벽에서는 큰 마찰력이 발생하고 그에 따른 관벽 주변에서의 속도 구배가 특이한 양상으로 표현됨을 볼 수 있다. 매개 변수의 증가에 따라 속도 분포에 대한 영향은 정상상태에서와 같이 관벽 주변에서의 마찰항의 크기가 커지는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이  $\beta$ 의 크기에 따른 수격현상 모의는 전체적인 관벽 주변의 마찰항의 크기를 크게 해주는 것으로 확인할 수 있는데, 이에 대한 이유는 FRTM 모형의 구조를 통해 이해할 수 있다. 점성저층에서 확인되는 것과 같이  $\beta$ 의 크기가 커짐에 따라서 점성저층의 두께는 얇아지고, 완충영역 I의 두께는 두꺼워지며, 동시에 완충영역 I에서의 난류 점성(Turbulence viscosity)의 크기를 크게 해준다. 결과적으로  $\beta$  값의 증가는 시스템의 전반적인 점성의 크기를 증가시키고 이에 따라 시스템 전체의 마찰력을 증가시킨다.

#### 4. 결론

상수관로의 수격현상의 정확한 모의를 위해서 2차원 모형의 난류 모형인 FRTM의 매개 변수에 따른 수치 모형의 응답을 연구하였다. 이를 위해서 Pezzinga (1999)의 실험 결과를 2차원 모형으로 구현하였고, 이때 FRTM의 매개변수인  $\beta$ 의 값을 다양하게 적용하였다. 본 연구를 통해서 1차원 모형에 비해 2차원 모형이 비교적 정확한 형태로 마찰항을 나타낼 수 있음을 확인했다. 또한, 매개변수  $\beta$ 의 값이 증가함에 따라 수격압에서의 마찰의 크기도 증가함을 알 수 있었다. 정상상태와 부정류에서의 속도 분포 모의 결과 매개변수  $\beta$ 의 크기의 증가가 속도 구배를 심화시킴을 발견했다. 매개변수  $\beta$ 는 수치 모의 상에서 시스템에서 마찰에 의한 전반적인 마찰의 크기를 증가시킨다. 이는 FRTM에서의 난류 점성의 값이 매개변수  $\beta$ 의 영향을 받기 때문이다.

2차원 부정류 모의가 1차원 부정류 모의와 가장 구분되는 결과는 부정류 발생 시의 마찰항의 모의 부분이다. 이를 통해

3차원 부정류 모의 보다 빠른 속도로 1차원 부정류 모의 보다 정확한 결과를 도출해낼 수 있다. 이 연구는 2차원 부정류 모의를 실제의 수격압 모의에 적용하기 위해서는 실제 시스템의 특성에 따른 FRTM의 매개변수를 규명하는 부분에서 유용하다.

#### 감사의 글

본 연구는 환경부 글로벌탑 환경기술개발사업(RE201606133)으로 지원 받은 과제입니다. 또한, 저자는 한국연구재단 이공분야학문후속세대양성 사업(NRF-2017R1A6A3A01075847)에도 감사드립니다.

#### References

- Brunone, B., Golia, U. M., and Greco, M. (1991). "Some Remarks on the Momentum Equations for Fast Transients" *Proc. Int. Meeting on Hydraulic Transients with Column Separation, 9th Round Table*, IAHR, Valencia, Spain, pp. 201-209.
- Chaudhry, M. H. (1987). *Applied Hydraulic Transients*. Van Nostrand Reinhold, New York. ISBN: 978-0-44-221514-9
- Ghidaoui, M. S., Zhao, M., McInnis, D. A., and Axworthy, D. H. (2015). "A Review of Water Hammer Theory and Practice." *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58, No. 1, pp. 49-76.
- Kim, H. J., and Kim, S. H. (2018). "Two dimensional cavitation waterhammer model for a reservoir-pipeline-valve system." *Journal of Hydraulic Research*, In press.
- Naser, G. (2006). *Water Quality Transformations in Pipelines : A Two-Dimensional Multi-Component Simulation Model*. Ph. D. dissertation, University of Toronto, Toronto, Canada.
- Vardy, A. E., Hwang, K. L., and Brown, J. M. (1993). "A Weighting Function Model of Transient Turbulent Pipe Friction." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 31, No. 4, pp. 533-548.
- Vardy, A. E., and Hwang, K. L. (1991). "A Characteristic Model of Transient Friction in Pipes." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 29, No. 5, pp. 669-685.
- Wylie, E. B., Streeter, V. L., and Suo, L. (1993). *Fluid transients in systems*, Prentice Hall, New York. ISBN: 978-0-13-934423-7
- Zhao, M., and Ghidaoui, M.S. (2003), "An Efficient Solution for Quasi-Two-Dimensional Water Hammer Problems." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 12, pp. 1007-1013.
- Zielke, W. (1968). "Frequency Dependent Friction in Transient Pipe Flow." *Journal of Basic Engineering, Trans. ASME*, Vol. 90, No. 1, pp. 109-115.