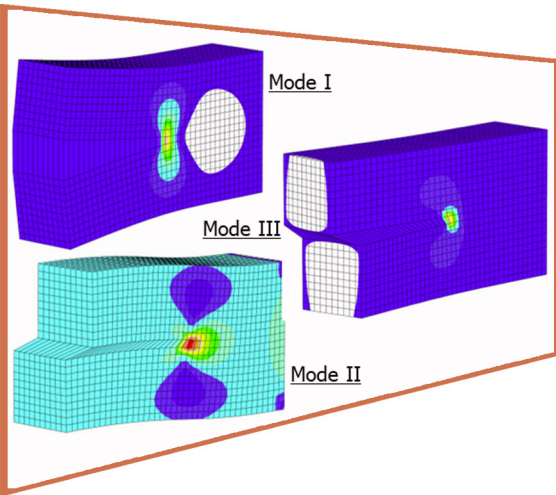


강한 불연속을 포함한 유한요소를 이용한 균열의 삼차원 해석

3D Analysis of Cracking Using Finite Elements Involving Strong Discontinuities



1. 서론

토목 구조물과 같은 거대 시스템에서 종종 관찰되는 균열은 주로 국부적인 영역에 국한하여 발생함에도 불구하고 전체 구조물의 수명을 단축시키고 예기치 않은 붕괴를 야기할 수 있다. 일반적으로 실험과(experimental) 해석적인(analytical) 방법을 통하여 균열 문제를 모델링 하는 데에는 한계가 있으며, 따라서 균열의 발생과 성장에 대한 정확하고 효율적인 수치적(numerical) 모사는 설계 과정에서 필수적인 요소 중 하나이다.

균열에 대한 수치적 해석 과정의 근본적인 어려움은 해의 다중 스케일적(multi-scale) 특성에 기인한다. 즉, 균열이 발생하는 영역의 스케일이 전체 시스템의 그것에 비하여 상대적으로 매우 작으며 이러한 서로 다른 스케일은 상호작용한다. 이 때 균열 근처에서의 해는 좁은 구역(narrow zone)에 걸쳐 거칠고(non-smooth) 비선형적인(nonlinear) 특성을 가지며, 따라서 상대적으로 작은 스케일(small scale)에 지배받고 보다 정확한 해석이 요구된다. 이와 반대로 균열에서 먼 대부분의 영역에서는 매끄러운(smooth) 해의 특성을 가지며 상대적으로 큰 스케일(large scale)에 지배받는다.

균열이 발생하는 좁은 구역은 수학적으로 변위장에서의 불연속, 또는 강한 불연속(strong discontinuity)으로 모델링할 수 있다. 또한 유한요소법(finite element method)은 오늘날 공학 분야에서 가장 널리 사용되는 수치 해석 기법 중 하나로서 이를 이용하여 강한 불연속을 모델링하고 효과적으로 균열을 해석할 수 있다. 이 중 비교적 초창기에 개발된 기법으로는 응집 영역 모델(cohesive zone model)이 대표적이다(Needleman, 1987). 이 방법의 기본 아이디어는 요소의 경계면에 소위 응집 요소(cohesive element)라 불리는 새로운 요소를 삽입하여 강한 불연속을 모델링하고 연화(softening)에 의한 에너지 소산(dissipation)을 표현하는 것이다. 그러나 이 방법에서는 강한 불연속의 경로가 요소의 경계면에 국한되기 때문에 상응하는 해는 요소망에 의존적(mesh dependent)이며, 따라서 적응적 세분화(adaptive refinement)를 추가적으로 수행하여야 하는 단점이 있다.

이러한 기존의 접근법의 단점을 개선하기 위하여 최근 강한 불연속을 요소의 내부에 직접 내장할 수 있는 방법들이 개발되었다. 이에 해당하는 대표적인 기법에는 강한 불연속 접근법(strong discontinuity approach, SDA)(Simo et al, 1993)과 일반 유한요소법(generalized finite element method, GFEM)(Babuska & Melenk, 1997)이 있으며, 이러한 기법들은 기존의 응집 영역 모델과 비교하여 불연속 면



김 종 현

한국철도기술연구원 첨단궤도토목본부 박사후연구원

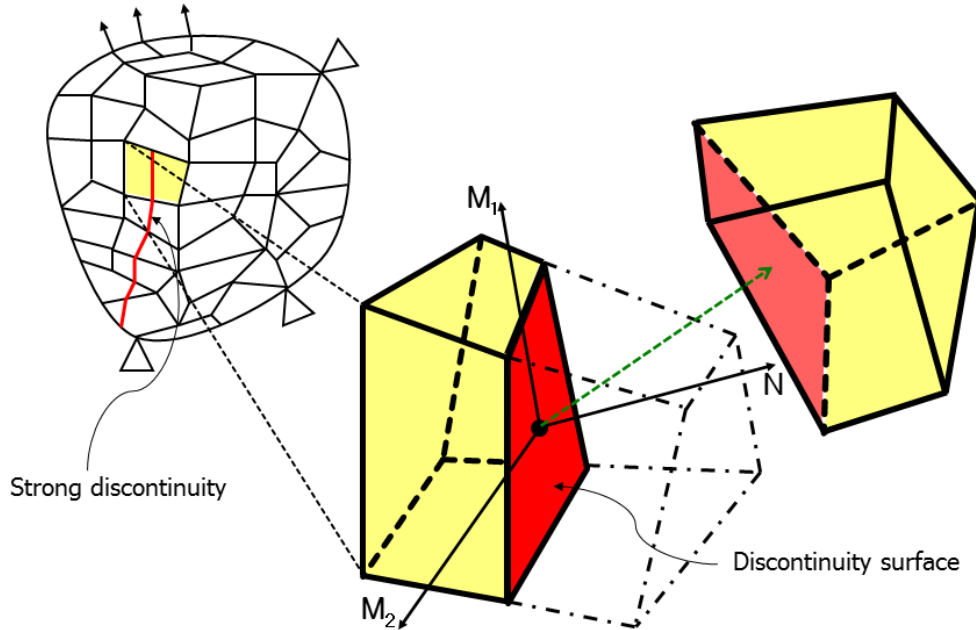


그림 1 SDA: Element design based on desired kinematics of element separation

전파의 기하학적 표현이 자유로우며 망 독립적인 해를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 이에 본 원고에서는 강한 불연속 접근법과 일반 유한요소법의 이론과 이 기법들을 이용하여 균열 전파 문제를 해석한 예제를 소개한다.

2. 강한 불연속 접근법

강한 불연속 접근법은 Simo 등(1993)이 제안하였으며, 이 후 Armero(2001)는 강한 불연속을 포함한 해를 다중 스케일적으로 정식화하기 위한 수학적 배경을 제공하였다. 이 방법은 강한 불연속을 국부적(local)으로 다루며 관련된 수학적 물리량을 각각의 요소에서 독립적으로 정의한다. 따라서 강한 불연속의 표현을 위해 추가적으로 필요한 자유도(degrees of freedom)를 각각의 요소 내부에서 소거함으로써 전체 시스템(global system)의 자유도를 보존할 수 있으며, 이러한 장점으로 인해 자유도가 큰 대규모 시스템의 해석 방법으로 적합하다.

Armero와 Kim(2012)은 강한 불연속을 포함하는 삼차원 경계값 문제를 정식화하기 위하여 주어진 문제를 매끈한 해를 가지는 큰 스케일 문제(large-scale problem)와 강한 불연속 근처에서만 정의되는 작은 스케일 문제(small-scale problem)로 분리하였으며, 상응하는 큰/작은 스케일 문제의 이산적 지배 방정식은 각각 다음과 같다.

$$F_E - \bigwedge_{E=1}^{N_E} \left[\int_{\Omega_E} B^T \sigma d\Omega \right] = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\Omega_E} H_E^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_E} D^T \tau_T d\Gamma = 0 \quad (2)$$

식 (1)은 기존의 유한 요소법에서 일반적으로 사용하는 지배 방정식과 그 전체적인 형태가 동일하며, 오직 응력 텐서 σ 가 강한 불연속을 포함하는 변위 벡터 및 상응하는 변형도 텐서의 함수라는 점만 다르다. 식 (2)는 변형도 텐서의 함수인 응력 텐서 σ 와 변위 점프(displacement jump)의 함수인 트랙션 벡터 τ_T 가 불연속 면 Γ_E 에서 평형을 이룸을 나타낸다. 따라서 식 (2)를 통하여 트랙션 벡터 τ_T 와 관련된 국부(local) 자유도를 응력 텐서 σ 와 관련된 전체(global) 자유도의 함수로 표현할 수 있으며, 특히 이 식은 각각의 요소 내부 Ω_E 에서 독립적으로 성립하기 때문에 국부 자유도를 요소 단계에서 소거할 수 있다. 결국 강한 불연속을 포함하지 않은 원래의 문제와 비교하여 전체 시스템의 자유도 수와 연결성을 보존할 수 있으며 이러한 수치적 효율성으로 인하여 자유도가 큰 삼차원 문제를 해석하기 위한 방법으로 적합하다.

식 (2)를 사용하기 위하여 연산자 H_E 와 D 를 정의하여야 한다. 또한 이들 연산자의 정의는 그림 1과 같이 요소의

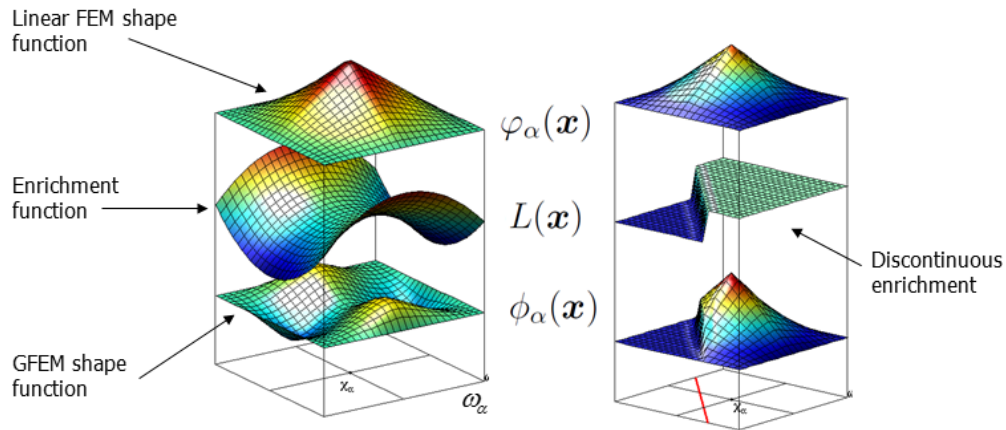


그림 2 GFEM: Construction of shape functions

분열(element separation)에 관한 운동학(kinematics)을 고려한 요소 설계를 통하여 유도하여야 한다. 만약 이를 올바르게 고려하지 않으면 요소 내에서의 가짜 응력(spurious stress)의 발생과 이에 따른 과강성(over-stiff) 반응으로 특징되는 소위 응력 잠김(stress locking) 현상이 발생하며, 이는 기존의 강한 불연속 접근법의 가장 큰 문제점 중 하나이다. 즉, 기존에는 요소의 고정 분열(constant separation) 모드 까지만 표현할 수 있었으며, 이는 강한 불연속과 관련된 운동학을 표현할 때 체계적으로 높은 차수의 함수를 사용하여 정확도를 높이는 것이 어렵다는 것을 의미한다. 이와 관련하여 Armero와 Kim(2012)과 Kim와 Armero(2017)는 변형도 및 변형 구배(deformation gradient) 기반의 요소 설계 패러다임을 새로이 제시하였다. 이러한 전략은 기존에 강한 불연속을 변위장에서 직접 표현하려 시도했던 것과 상반되며, 이를 통하여 일반적인 삼차원 조건 하에서 고차항의 분열 모드를 새로이 추가하고 응력 잠김 현상을 해소함을 보였다.

3. 일반 유한요소법

강한 불연속 접근법의 대안으로서 보다 최근에 Babuska와 Melenk(1997) 및 Duarte 등(2000)은 일반 유한요소법을 개발하였다. 이 방법은 단위 오목 분할(partition of unity) 개념에 기반하며, 각각의 노드에 대하여 소위 패치 근사 공간(patch approximation space)을 구성함으로써 기존의 유한요소법의 해공간을 확장(enrichment)하는 것이 핵심이다. 특히 기존의 유한요소법과 구별되는 가장 큰 특징은 형상 함수를 생성하는 방식에 있다.

일반 유한요소법의 형상 함수 $\phi^{\alpha i}$ 는 그림 2와 같이 단위 오목 분할 함수 N^{α} 에 소위 확장 함수(enrichment function) $L^{\alpha i}$ 를 곱하여 다음과 같이 생성된다.

$$\phi^{\alpha i} = N^{\alpha} L^{\alpha i} \quad (\text{no summation on } \alpha) \quad (3)$$

여기서 i 와 α 는 각각 절점과 확장 함수에 대한 색인이다. 즉, 이 방법에서는 각각의 절점에서 다양한 확장 함수를 사용함으로써 해의 특성을 반영한 적절한 해공간을 생성할 수 있다. 이를 위하여 일반적으로 해석적인 방법을 통하여 알려진 해에 대한 정보를 이용하여 확장 함수를 정의하며, 균열에서 먼 영역에서는 고차 다항식, 균열면과 균열 선단에서는 각각 불연속 및 특이 함수를 주로 사용한다(Kim et al., 2017).

식 (3)으로 정의되는 형상 함수를 이용하면 확장 함수의 선택이 자유롭고 이에 따른 소위 확장 절차(enrichment procedure)를 쉽게 수행할 수 있어 강한 불연속을 포함하는 운동학을 표현할 때 체계적으로 정확도를 높일 수 있다는 장점이 있으며, 이는 강한 불연속 접근법과 상반되는 점이다. 그러나 이러한 확장 절차는 노드 단위에서 이뤄지기 때문에 강한 불연속을 표현하기 위하여 추가한 자유도를 요소 단계에서 소거할 수 없으며, 따라서 최종적인 전체 시스템의 자유도를 증가시키는 단점이 있다.

4. 다중 스케일 일반 유한요소법과 비선형 점성 균열 문제에서의 적용

3장에서 기술한 바와 같이 일반 유한요소법의 단점 중

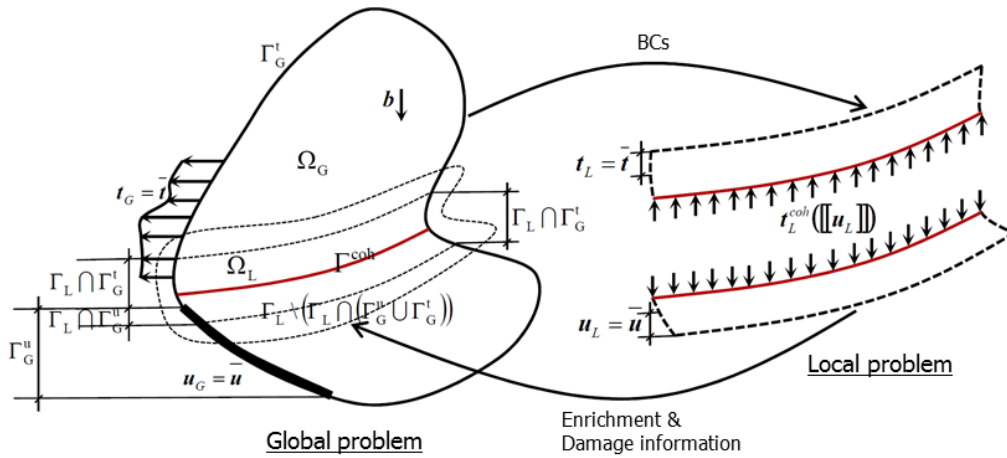


그림 3 Multi-scale GFEM for the nonlinear analysis of cohesive crack propagations

하나는 강한 불연속을 포함하는 문제를 모델링하기 위하여 추가적인 자유도가 필요하고 수치적 비용이 증가하는 것이다. 이를 보완하고 일반 유한요소법을 서로 다른 스케일이 상호작용하는 다중 스케일 문제에 보다 효과적으로 적용하기 위하여 Duarte와 Kim(2008)은 전체-국부 확장 함수를 가진 일반 유한요소법(generalized finite element method with global-local enrichment functions, GFEM^{gl})을 제안하였다. 이 방법의 기본 아이디어는 기존의 해석적 함수 대신 수치적 해를 이용하여 확장 함수를 생성하는 것이며 세부 절차는 다음과 같다.

- 1) 주어진 문제를 전체 문제(global problem)로 정의하고 이 전체 문제를 성긴 요소망(coarse mesh)과 저차의 형상 함수를 사용하여 해석한다.
- 2) 균열 근처와 같이 해가 상대적으로 작은 스케일에 지배받고 보다 상세한 해석이 요구되는 영역을 추출하여 국부 문제(local problem)로 정의한 후 이를 미세 요소망(fine mesh)과 고차의 형상 함수를 사용하여 해석한다. 이 때 1)에서 구한 해를 국부 문제의 경계 조건으로 사용한다.
- 3) 1)에서 사용한 성긴 요소망과 2)에서 구한 국부 문제의 수치적 해를 이용하여 생성한 확장 함수를 사용하여 전체 문제를 다시 해석한다. 이 때 삼차원 해석의 경우라 하더라도 각 절점 당 단 3개의 추가적인 자유도만이 필요하며, 이를 통하여 국부 문제와 중복되는 영역에 대해서도 성긴 요소망과 저차의 형상 함수만으로 해석의 정확도를 높일 수 있다.

전체-국부 확장 함수를 가진 일반 유한요소법은 선형 탄

성 균열 전파(linear elastic crack propagation)(Pan & Rajagopal, 2014), 국부 소성(localized plasticity)(Kim et al., 2012), 열전달(heat transfer)(O'Hara et al., 2013) 등 다양한 유형의 공학 문제에서의 적용을 통하여 방법의 강건성(robustness)을 확보하여 왔다. 특히 최근 Kim와 Duarte(2015)는 연화(softening)를 포함한 비선형 균열 문제에 이 방법을 적용하기 위하여 점성 균열 전파(cohesive crack propagation)의 효과적인 모델링을 위한 다중 스케일 일반 유한요소법을 새로이 제안하였다.

기존의 전체-국부 확장 함수를 가진 일반 유한요소법을 연화를 포함한 비선형 문제에 적용할 때 발생하는 근본적인 어려움은 다음과 같다. 즉, 하중이 증가함에 따라 국부 문제의 해가 지속적으로 변하기 때문에 이러한 국부 문제의 해를 반영하여 생성되는 전체 문제의 형상 함수 또는 해공간도 함께 변한다. 따라서 전체 문제에서 비선형 문제

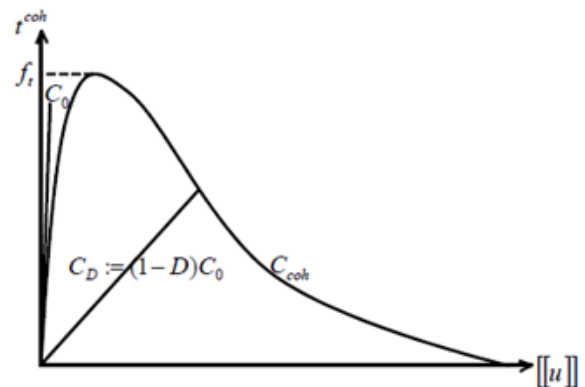


그림 4 Replacement of tangent stiffness with secant branch for the transfer of damage information

를 풀기 위하여 뉴턴-랩슨법과 같은 반복법을 사용할 때 이전 단계의 해를 현재 단계의 초기값으로 직접 사용할 수 없다. 이를 해결하기 위하여 기존에는 서로 다른 해공간

사이에 해를 사상(mapping)하는 과정이 필요하였다. 그러나 이러한 접근법은 복잡한 알고리즘을 요하고 수치적 비용을 증가시키는 단점이 있다.

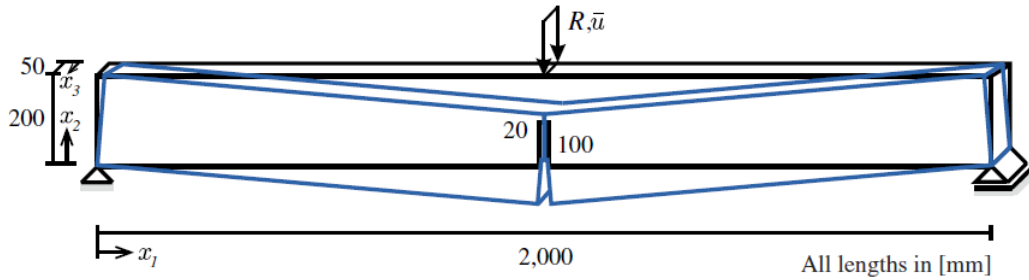


그림 5 3PB test: Problem description

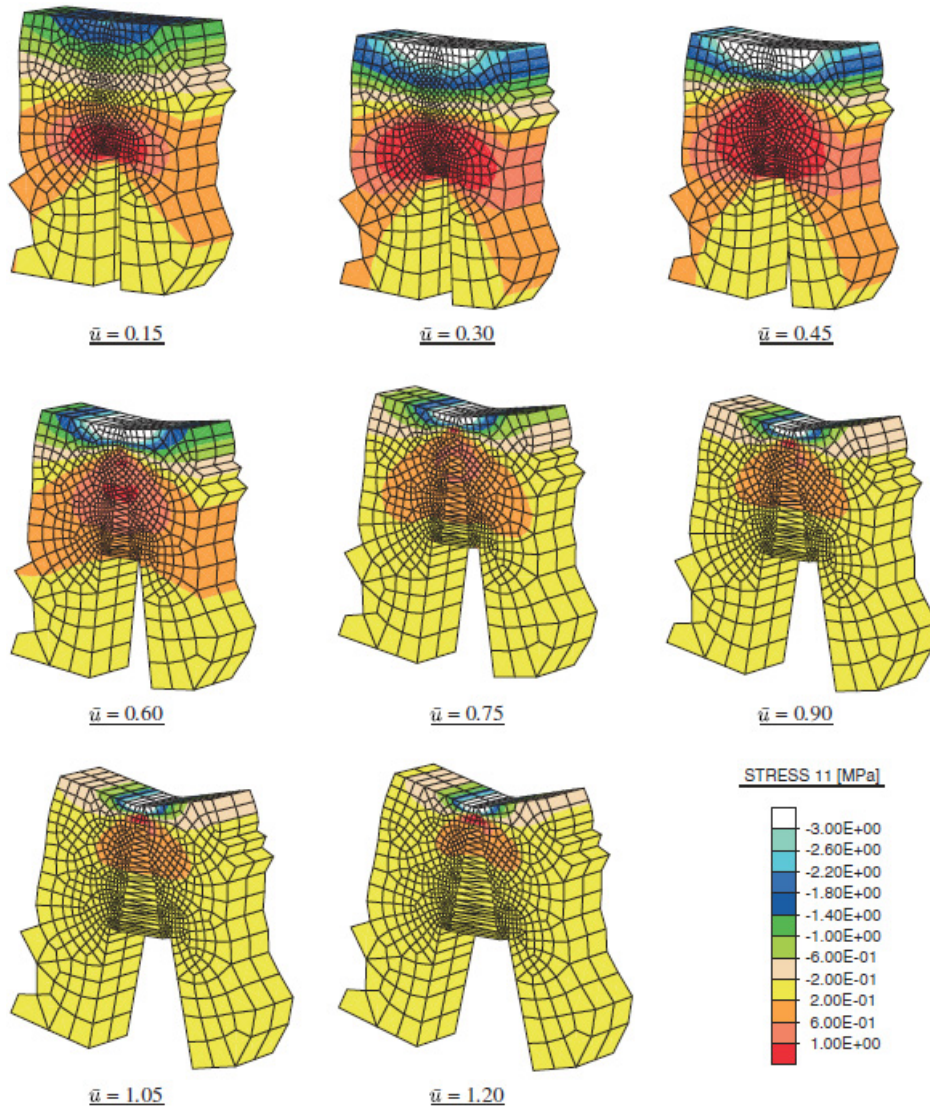


그림 6 3PB test: Stress distributions and embedded strong discontinuities over load steps obtained using SDA

그림 3은 이러한 단점을 보완하기 위해 제안된 방법의 개략적인 개념을 나타내고 있다. 기존의 방법과의 차이점은 국부 문제의 수치적 해를 전체 문제의 확장 함수뿐만 아니라 각 하중 단계에서의 손상 정보를 확인하기 위한 목적으로도 사용하는데 있다. 이 때 손상 정보의 전달은 그림 4와 같이 응집 법칙(cohesive law)에서 접선(tangent) C_{coh} 을 할선 강성(secant stiffness) C_D 로 대체함으로써 이루어진다. 이를 통하여 해공간이 지속적으로 변할 때 반복법과 관련한 초기화 이슈를 해결할 수 있을 뿐만 아니라, 비선형 문제를 다루고 있음에도 전체 문제에서 단 한번의 선형 해석만을 수행하여 최종적인 해를 구하는 것이 가능하게 되어 보다 경제적인 해석을 할 수 있다.

5. 수치 예제

본 장에서는 2-4장에서 소개한 기법들을 이용한 균열 전파 문제의 삼차원 해석 예제를 소개한다. 고전적인 평가 기준(benchmark) 문제 중 하나인 삼점 굽힘 시험(three-point bending test)을 선택하였다. Petersson(1981)이 수행한 실험에서 사용한 것과 동일한 크기의 시편에 대하여 모델링하였으며 그림 5에 시편의 형상과 경계 조건을 나타내었다. 콘크리트 시편의 재료 성질은 선형 탄성과 이선형(bilinear)

응집 법칙(Park et al., 2008)으로 가정하였으며 세부적인 물성치는 생략한다. 모델링에 사용한 요소의 종류는 강한 불연속 접근법의 경우 8절점 육면체 요소, 일반 유한요소법의 경우 4절점 사면체 요소이다.

이 시험의 특징은 Mode I 형태의 균열이 지배적이라는 것이며 균열의 경로를 미리 알고 있는 경우에 해당한다. 따라서 일반 유한요소법의 경우 예상 경로를 따라 불연속면을 미리 삽입하고 노치에 대해서만 트래クション이 발생하지 않는다고 가정하여 모델링하였다. 이와 달리 강한 불연속 접근법의 경우 균열 경로에 대한 이러한 선형적 정보를 사용하지 않고 오직 현재 하중 단계에서의 해의 분포를 분석함으로써 다음 하중 단계에서의 균열의 전파를 예측하였다. 이를 위하여 균열의 생성(initiation)과 방향(direction)에 대한 판단 기준(failure criterion)이 필요하며, 본 예제에서는 최대 주응력(maximum principal stress)이 재료의 인장 강도에 도달할 때 균열이 생성되고 이 때 균열의 방향은 최대 주응력 방향과 직각을 이룬다고 가정하였다.

그림 6은 2장에서 설명한 강한 불연속 접근법(Kim & Armero, 2017)을 이용하여 얻은 결과로서 하중의 증가에 따른 응력 분포와 균열의 전파를 나타내고 있다. 균열의 전파는 상대적으로 짙어지는 요소들을 통하여 확인할 수 있으며, 이는 이 요소들이 강한 불연속을 내장하고 관련된

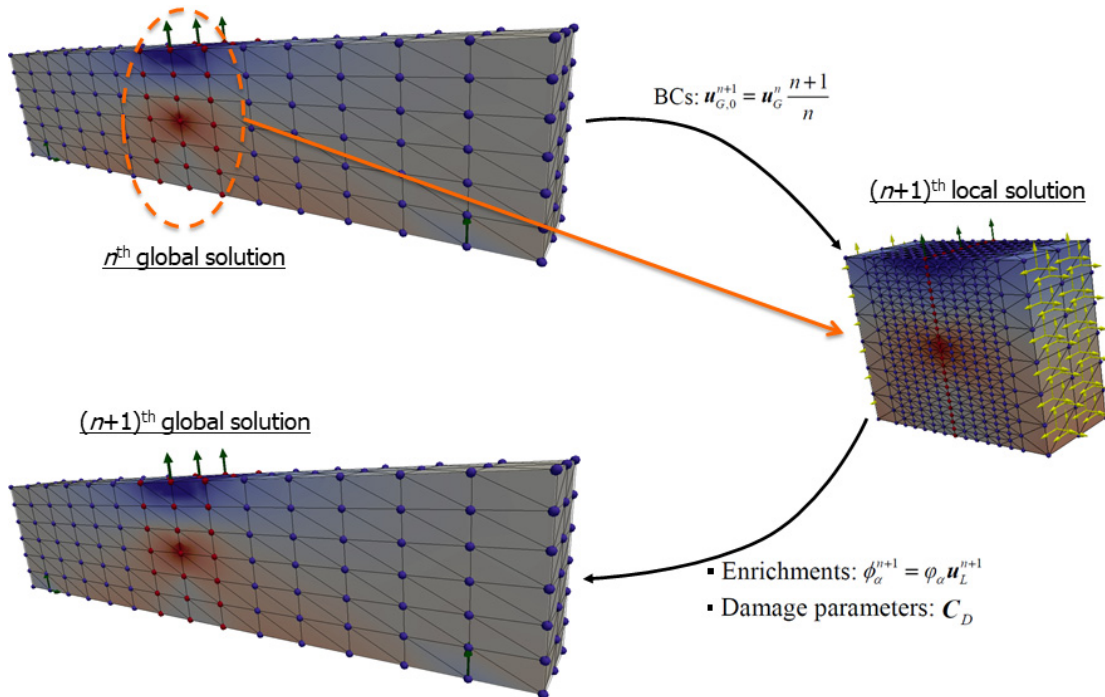


그림 7 3PB test: Stress fields at load steps n and $n+1$ in a GFEM^{gl} simulation

운동학을 올바르게 묘사함으로써 가능하다. 이 때 응집 법칙의 적용으로 인하여 이 요소들 내의 응력 수준은 균열 선단 근처에서 발생하는 응력 집중(stress concentration)을 시작으로 불연속 면에서의 트랙션 값이 최종적으로 0이 될 때 까지 지속적으로 감소한다. 이러한 결과는 고차항의 분열 모드까지 표현할 수 있는 새로운 요소를 사용할 때 얻을 수 있으며, 만약 고정 분열 모드만을 표현할 수 있는 기존의 요소를 사용하면 연화 과정에서 가짜 응력이 발생하여 결국 전체 시스템의 과강성 반응에 이르게 된다.

그림 7은 4장에서 설명한 다중 스케일 일반 유한요소법(Kim & Duarte, 2015)을 이용하여 얻은 결과로서 n 및 $n+1$ 번째 하중 단계에서의 응력 분포를 나타내고 있으며, 이 때 해석 절차는 다음과 같다. 먼저 n 번째 하중 단계에서 구한 전체 문제의 해를 $n+1$ 번째 하중 단계에서 국부 문제의 경계 조건으로 사용한다. 이어서 이 국부 문제에 대하여 보통의 일반 유한요소법(*hp*-GFEM)을 이용하여 비선형 해석을 수행하고 국부 문제의 해를 전체 문제의 확장 함수와 손상 정보로 사용한다. 마지막으로 $n+1$ 번째 하중 단계에서의 전체 문제에 대하여 선형 해석을 수행하여 최종적인 해를 구한다.

그림 8은 전체 시스템의 종합적인 응답으로서 하중-변위 곡선을 나타내고 있다. 2-4장에서 소개한 기법들을 이용하여 얻은 수치 해석 결과를 실험 결과와 비교 검증하였으며, 특히 서로 다른 기법들을 사용하여 얻은 수치 해석 결과들 사이에 차이가 미미한 것을 알 수 있다. 그러나 이러한 결과는 차례대로 7,254, 17,928, 2,133개의 서로 상이한 자유도를 사용하여 얻은 결과이다. 이 때 3장에서 소개한 일반 유한요소법에 비하여 2장에서 소개한 강한 불연속 접근법의 자

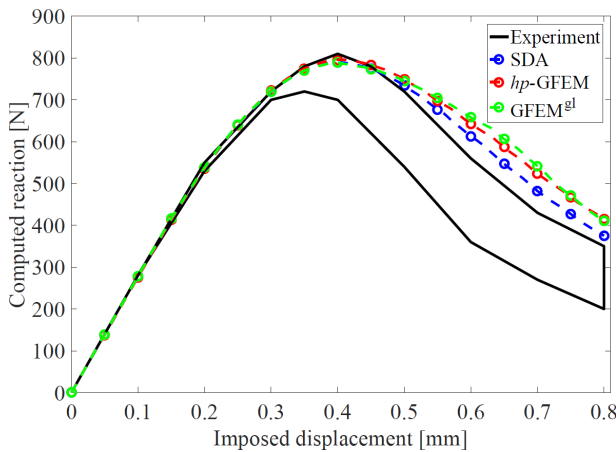


그림 8 3PB test: Comparison of load-displacement curves


유도 수가 적은 것은 전자가 절점 단위에서, 후자가 요소 단위에서 강한 불연속을 표현하기 때문에 후자의 경우에만 강한 불연속의 표현을 위해 추가한 자유도를 요소 단위에서 소거할 수 있기 때문이다. 또한 4장에서 소개한 다중 스케일 일반 유한요소법을 적용하여 3장에서 소개한 기존의 일반 유한요소법의 경제성을 높일 수 있으며, 특히 이 기법은 전체 시스템의 자유도 수를 줄일 수 있을 뿐만 아니라 비선형 문제를 선형 해석으로 대체함으로써 수치적 비용을 대폭 절감할 수 있다는 장점이 있다.

6. 결론

본 원고에서는 균열의 삼차원 해석을 위한 유한요소 기법으로서 강한 불연속 접근법, 일반 유한요소법, 다중 스케일 일반 유한요소법을 소개하였다. 또한 점성 균열 전파 문제의 수치 해석 예제를 통하여 이들의 유효성과 서로간의 장단점을 예측하였다. 이 기법들은 모두 강한 불연속을 요소의 내부에 직접 내장함으로써 불연속 면의 전파가 자유로워 망 독립적인 해를 얻을 수 있다는 장점이 있으며, 이들을 보완 및 개선하여 보다 정확하고 효율적인 수치 해석 기법을 개발하고자 관련 연구가 현재 활발히 진행 중이다.

참고문헌

- Needleman, A. (1987) A continuum model for void nucleation by inclusion debonding, *Journal of Applied Mechanics*, 54, pp.525-531
- Kim, J., Simone, A., Duarte, C. A. (2017) Mesh refinement strategies without mapping of nonlinear solutions for the generalized and standard FEM analysis of 3-D cohesive fractures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109, pp.235-258
- Simo, J. C., Oliver, J., Armero, F. (1993) An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate independent inelastic solids, *Computational Mechanics*, 12, pp.277-296.
- Armero, F. (2001) On the characterization of localized solutions in inelastic solids: an analysis of wave propagation in a softening bar, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.181-213.

- Armero, F., Kim, J. (2012) Three-dimensional finite elements with embedded strong discontinuities to model material failure in the infinitesimal range, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91, pp.1291-1330.
- Kim, J., Armero, F. (2017) Three-dimensional finite elements with embedded strong discontinuities for the analysis of solids at failure in the finite deformation range, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317, pp.890-926.
- Babuska, I., Melenk, J. M. (1997) The partition of unity finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp.727-758.
- Duarte, C. A., Babuska, I., Oden, J. T. (2000) Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems, *Computers and Structures*, 77, pp. 215-232.
- Duarte, C. A., Kim, D. J. (2008) Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, pp.487-504.
- Kim, J., Duarte, C. A. (2015) A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104, pp.1139-1172.
- Pal, M., Rajagopal, A. (2014) Sensitivity analysis of linear elastic cracked structures using generalized finite element method, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 15, pp.422-437.
- Kim, D. J., Duarte, C. A., Proenca S. (2012) A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems, *Computational Mechanics*, 50, pp.563-578.
- O'Hara, P., Duarte, C. A., Eason, T., Garzon, J. (2013) Efficient analysis of transient heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients, *Computational Mechanics*, 51, pp.743-764.
- Kim, J., Duarte, C. A. (2015) A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104, pp.1139-1172.
- Park, K., Paulino, G. H., Roesler, J. R. (2008) Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete, *Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 3806-3818.
- Petersson, P. E. (1981) Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Report No TVBM-1006, Division of Building Materials, University of Lund, Sweden. 

[섭외: 이성철 편집위원]