韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.4.375
2018. 10. 제 21권, 제 4호, 375-395

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
October. 2018, Vol. 21, No. 4, 375-395

초등학생의 디지털 테크놀로지를 이용한 유리수 조밀성 탐구 사례 분석: 포괄적 유물론에서의 접근

김 도 연 (서울대학교 대학원 학생)
권 오 남 (서울대학교 교수)

본 연구는 수학적 활동에서 디지털 테크놀로지와의 신체적 상호작용이 수학적 의미 형성 과정에 주는 영향을 탐구하는 것을 연구 목표로 삼는다. 최근의 수학교육 연구는 역동적 환경과 멀티터치 입력의 결합에 주목하기 시작했는데, 이에 따라 신체적 움직임이 연구에서 적극적으로 고려해야 할 대상이 되었다. 이에 따라 이 연구는 유리수 조밀성의 수학적 의미가 형성되는 과정을 역동적 멀티터치 테크놀로지와 상호작용하는 신체의 움직임과 관련하여 살펴보고자 한다. 이를 위해 소규모 집단의 초등학생에 대한 교수실험 사례를 분석하며 미시 문화기술적 방법을 사용한다. 연구 결과, 주어진 활동을 통해 조밀성에 대한 더 높은 수준의 수학적 의미가 형성된 것을 확인할 수 있었는데, 이러한 의미 형성 과정 전반에 걸쳐 학습자가 터치패드를 이용하여 화면을 확대하고 축소하는 손가락 움직임이 결정적인 역할을 하는 것으로 드러났다.

I. 서론

현대사회는 초연결사회(hyper-connected society)로서 디지털 테크놀로지가 생활에 편재하고, 이 사회에 속한 인간 생활의 많은 부분은 기계를 이용한 혹은 기계에 대한 의사소통 행위로 이루어져 있다(차두원 · 진영현, 2015). 우리는 대개 디지털 테크놀로지를 삶의 불편을 줄여주거나 삶을 더 풍요롭게 해주는 도구로 인식해왔다. 그러나 일부의 구성원이 선택적으로, 또 보조적으로 테크놀로지를 이용하던 과거의 모습과는 달리 초연결사회의 구성원들의 삶에서는 디지털 테크놀로지가 단순한 도구 이상의 역할을 한다(김민형 · 김현주, 2015). 초연결사회에서 디지털 테크놀로지는 우리 사회와 삶을 빚어내는 주체적인 요소이며, 나아가 우리의 주관성(subjectivity)과 사고는 디지털 테크놀로지를 통해 다른 인간 및 사물의 네트워크 안에 펴져있기 때문에(Borba, Askar, Engelbrecht, Gadanidis, Llinares, & Aguilar, 2016; Rotman, 2008), 디지털 테크놀로지는 현대인의 삶과 불가분한 존재다.

이러한 사회의 변화와 함께 수학 학습에서의 디지털 테크놀로지 이용에 대한 논의의 필요성은 교실 안팎에서 지속적으로 증가하고 있다. 현대 사회에서 디지털 테크놀로지는 교육체계에 전방위적인 영향을 미치며(Hoyles & Lagrange, 2010), 수학 교수학습에 디지털 테크놀로지를 적용하려는 다양한 논의 및 시도가 지난 20년 넘게 꾸준히 이어져 왔다(Kaput, 1992; Roschelle, Noss, Blikstein & Jackiw, 2017; Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007 참고). 또한 국가 제도적인 차원에서도 디지털 테크놀로지를 수학교실에 적용하려는 여러 논의가 이루어지고 있으며(Sinclair, Arzarello & Lozano, 2010 참고), 수학교실에 테크놀로지를 들여오기 위한 실제 비용은 지속적으로 감소하고 있다(Hegedus & Tall, 2016).

현대 디지털 테크놀로지의 여러 가지 측면 중 꾸준히 주목받아온 한 가지는 소프트웨어 환경의 역동성이다. 역동적 환경은 정적인 환경과 대조적으로 수학적 표상 혹은 표상들 간의 동적인 관계를 시각적으로 표현해 줄 수 있다. 이에 따라 학습자가 그 관계를 배우고 스스로 모델을 세우기가 더 수월해지며, 이를 포함한 다양한 이유로 역동적 환경은 20년 넘게 꾸준히 수학교육연구의 관심사 중 하나였다(Roschelle, Noss, Blikstein & Jackiw, 2017).

* 접수일(2018년 8월 21일), 심사(수정)일(2018년 9월 1일), 게재확정일(2018년 9월 4일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 유리수 조밀성, 디지털 테크놀로지, 터치패드, 신체, 포괄적 유물론
* 이 논문은 2016년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원(NRF-2016S1A3A2925401)을 받아 수행된 연구임.

이에 더해, 초등학생 및 미취학 아동을 대상으로 한 최근의 수학교육연구는 촉각적 입력장치와 결합한 역동적 디지털 테크놀로지가 보여주는 수학학습의 새로운 측면에 주목하기 시작했다 (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Güçler, Hegedus, Robidoux & Jackiw, 2013; Walter, 2018 등 참고). 과거 대다수 디지털 테크놀로지의 입력장치는 키보드나 마우스, 키패드 등의 상대적으로 간접적인 매체였다. 그러나 최근에는 터치스크린이나 터치패드 등을 이용한 동시 다중 입력이 가능한 촉각적 입력장치(이하 멀티터치 입력장치)를 채택함으로써 보다 직접적인 신체적 움직임을 통해 테크놀로지를 조작할 수 있게 되었으며, 이에 따라 신체의 움직임이 연구의 초점에 포함되기 시작했다.

수학학습에서의 신체의 움직임과 관련하여 de Freitas와 Sinclair(2014)의 포괄적 유물론(inclusive materialism)은 역동적 멀티터치 테크놀로지를 이용한 수학 학습 연구에 적합한 이론적 접근이 될 것으로 기대된다. 역동적 멀티터치 테크놀로지를 이용한 수학적 활동에서 학습자의 신체는 전과는 질적으로 다른 방식으로 환경과 상호작용 하면서 새로운 지위를 획득하게 되었는데, 이에 따라 수학적 의미 형성 과정에 대한 연구에 있어서 이전과는 근본적으로 다른 접근이 필요해졌다(Ferrara, Faggiano, Montone, 2017). 디지털 테크놀로지 이용에 대한 기존의 주요 관점인 도구적 접근(instrumental approach)은 수학적 활동에서 디지털 도구를 다루는 방식과 해당 수학적 내용의 스키마가 함께 얽혀 학습이 이루어지는 과정을 포착해 왔다 (Trouche, 2014). 하지만 도구적 접근에서는 학습자 신체의 작용까지는 담지 못하는데 반해, 포괄적 유물론은 도구와 스키마를 넘어 수학적 활동의 물질적인 측면을 포괄하는 접근을 취함으로써(Drijvers & Ferrara, 2018) 디지털 테크놀로지에 대한 신체의 움직임과 수학적 의미 형성과의 관계를 더 온전한 모습으로 포착할 수 있을 것으로 기대된다.

이 연구의 목표는 수학적 활동에서 디지털 테크놀로지와의 신체적 상호작용이 수학적 의미 형성 과정에 주는 영향을 탐색하는 것이다. 이를 위해 이 연구는 한 소규모 집단의 초등학생들을 대상으로 한 교수실험의 사례를 택하여, 포괄적 유물론의 관점을 통해 분석하고자 한다. 구체적으로 이 연구는 다음의 연구 질문을 탐구한다.

역동적 멀티터치 디지털 테크놀로지 환경 하에서 유리수 조밀성의 수학적 의미는 테크놀로지를 조작하는 신체의 움직임과 관련하여 어떻게 형성되는가?

II. 이론적 배경

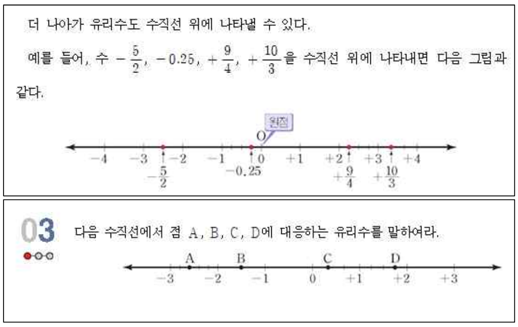
1. 유리수의 조밀성

가. 유리수 조밀성과 수학교육

위상 수학의 관점에서 볼 때, 어떤 위상 공간 X의 한 부분 집합 A에 대해, 만일 A의 폐포(closure)가 X와 동일하면, 즉 X의 모든 원소 x가 A에 속하거나 A의 집적점이면, 집합 A는 X 내에서 조밀하다고 정의한다. 그러므로, 유리수 집합은 실수 집합 내에서 조밀하다고 할 수 있다. 따라서 이는 임의의 유리수 근방에는 적어도 다른 하나의 유리수가 존재함을 함의한다. 이 연구에서 유리수의 조밀성이라는 단어를 사용할 때는 유리수 집합에 대해 이 명제가 참임을 일컫는다. 이 때, 순서성이 있다는 사실을 이용하면 유리수의 조밀성은 '임의의 두 유리수 $a,b(a<b)$ 에 대해 적어도 하나의 유리수 c가 존재하여 $a<c<b$를 만족한다'의 명제가 참이라는 것으로 표현할 수 있다. 실수와 무리수 집합에 대해서도 위 명제는 참이므로 실수와 무리수는 조밀하나, 자연수 집합에 대해서는 이것이 성립하지 않기 때문에, 자연수는 조밀하지 않다고 할 수 있다.

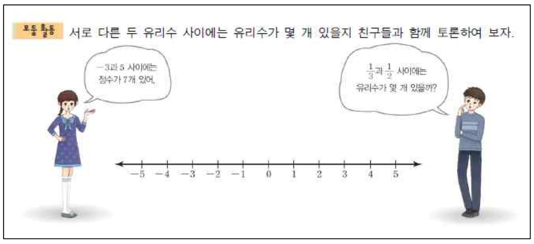
유리수의 조밀성은 현행 교육과정에서 가르쳐야 하는 내용으로서 적시되지 않았음에도 불구하고 수학 교수학습에 있어서 가치를 지닌 개념이다. 조밀성은 2009 개정 교육과정 상의 성취 기준, 학습 요소 혹은 교수·학습 방법 및 유의 사항에 명시적으로 포함되지는 않는다(교육과학기술부, 2011). 그러나 학습자들이 중학교 교과서 속 수와 연산 영역의 내용들을 이해하고 등장하는 과제들을 원활히 수행할 수 있기 위해서는, 조밀성에 대한 이해를 발달시키는 것이 필요하다.

예를 들어, 중학교 1학년 교과서에서는 유리수의 개념을 학습하는 과정에서 주어진 유리수를 수직선 위에 표시하거나, 역으로 주어진 위치에 존재할 것으로 예상되는 유리수를 추측하도록 하고 있다([그림 1]). 그런데 이를 위해서는 수직선 위의 주어진 두 수 사이를



[그림 1] 유리수를 수직선 상에 표시하기(류희찬 외, 2013, p.46; p.52)
[Fig. 1] Marking rational numbers on the number line (Lew at al., 2013, p.46; p.52)

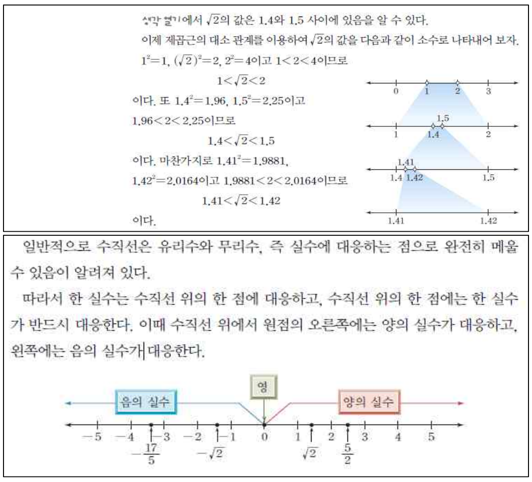
더 작은 단위로 분할했을 때 새로운 유리수와 그에 대응되는 위치가 존재함을 이해해야 하며, 이는 조밀성의 이해 발달에 꼭 필요한 인지적 요소이다.[1] 일부 교과서에서는 위와 같은 과제를 제시함과 동시에 유리수의 조밀성에 대해 동료 학생들과 토론해볼 것을 명시적으로 요구하기도 한다([그림 2]). 나아가 중학교 3학



[그림 2] 유리수의 조밀성에 대해 토론해보기(우정호 외, 2013, p.36)
[Fig. 2] Discussing the density of rational numbers with colleagues(Woo et al., 2013, p.36)

년 교과서에서는 유리수와 실수의 조밀성을 무리수 값의 근사를 위해 이용하거나 실수의 완비성에 대한 서술에 내포시키고 있는데([그림 3]), 이를 통해 현행 교과서가 중학교 3학년 과정의 학습자들에게는 조밀성에 대한 성숙한 이해를 요구하고 있음을 확인할 수 있다.

그러나 선행 연구는 조밀성의 이해가 모든 학습자에게서 자연스럽게 발달하는 것은 아님을 지적한다.



[그림 3] $\sqrt{2}$ 값의 근사 및 실수의 완비성에 대한 서술 (고호경 외, 2013, p.20; p.23)
[Fig. 3] Approximating $\sqrt{2}$ and the description of the completeness of real number(Koh et al. 2013, p.20; p.23)

유리수의 조밀성에 대한 선행연구의 수는 상대적으로 적지만, 앞선 연구들의 사례에서는 학생들이 유리수 조밀성을 이해하기 위한 개념 요소들을 사전에 모두 학습했고, 심지어 교사가 수업 중에 임의의 구간 안에 무수히 많은 수가 있음을 구두로 여러 차례 언급했음에도 학생들은 유리수 조밀성에 관련된 질문에서 다양한 오류를 보이는 현상이 반복적으로 확인되었다(Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010; Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, 2011). 이러한 어려움은 유리수의 조밀성이 학습자에게 인지적으로 어려운 복수의 요소들을 복합적으로 포함하고 있기 때문에 발생한다. 유리수 조밀성 개념을 위해서 학습자는 먼저 하나의 유리수에 대한 다양한 분수 혹은 소수 표현, 또 유리수 간의 크기 비교 등을 먼저 이해해야 한다. 더욱이 조밀성은 일정 구간 안에 무수히 많은 수가 있음을 내포하기 때문에 많은 학습자들이 이해하기 어려워하는 실무한의 개념과 밀접하게 연결되어 있다(Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

나. 유리수 조밀성의 이해 수준

학습자에게 유리수의 조밀성에 대한 이해는 단순히 완전하거나 아예 없는 것 둘 중의 하나로 나타나는 것

1) 이에 대한 자세한 논의는 이어지는 '나. 유리수 조밀성의 이해' 절에서 다루도록 한다.

이 아니라 여러 수준에 걸쳐 나타난다. Vomvakoussi와 Vosniadou(2007)은 그리스의 만 14세에서 16세에 해당하는 9학년과 11학년 학생들을 대상으로 유리수 조밀성에 대한 이해를 묻는 연구를 수행했다. 그들은 주어진 두 수 사이에 어떠한 수가, 얼마나 있는지를 물어보는 일련의 질문들로부터 얻은 답변을 토대로 학생들이 보이는 유리수 조밀성의 이해 수준을 다섯 가지로 세분화하여 아래와 같이 제시했다.

(1) 제1수준: 이산성(discreteness)[2).]

이산성에 해당하는 수준의 이해를 보이는 학생은 두 수가 어떤 수로 주어지든지 액면 그대로 나타나 있는 단위를 분할 가능한 최소의 단위로서 받아들인다. 예를 들어, $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$이 주어질 경우, $\frac{1}{3}$을 최소단위로서 받아 받아들이기 때문에 두 수 사이에는 어떠한 수도 없으며, $\frac{1}{3}$ 바로 다음에 이어지는 수가 $\frac{2}{3}$라고 믿는다. 같은 이유로, $\frac{2}{5}$와 $\frac{4}{5}$사이에는 $\frac{3}{5}$만이 있다고 믿는다. 0.005와 0.006의 경우도, 0.006이 0.005의 바로 다음에 이어지는 수라고 믿는다. 이는 학습자들이 아직 자연수의 이산적인 구조가 부여하는 가정에서 벗어나지 못했기 때문에 발생한다.

(2) 제2수준: 개선된 이산성(refined discreteness)

이 수준의 학생들은 주어진 두 수가 반드시 연속하는 수라고 생각하지는 않으며, 특정 경우에는 두 수의 사이에 더 작은 단위로 이루어진 다른 수들이 존재할 것이라고 믿는다. 예를 들어, 0.005와 0.006 사이에는 $0.0051, 0.0052, \ldots, 0.0059$가 존재한다고 생각한다. 또한 이 분류의 학생은 두 수가 분수로 주어진 경우 더 작은 단위를 찾기 위해 분수와 소수표현을 혼합하여 사용하기도 하는데 이러한 사고 방식은 $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$사이에는 $\frac{1.1}{3}, \frac{1.2}{3}, \frac{1.3}{3}, \ldots, \frac{1.9}{3}$가 존재한다는 답변에서 엿볼 수 있다. 그러나 학생들은 오직 유한한 개수의 수들만이 주어진 두 수 사이에 존재한다고 보며, 여전히 자연수의 구조가 가지고 있는 이산성의 전제에서 아직 완전히 벗어나지 못하는 모습을 보인다.

(3) 제3수준: 혼합된 이해(mixed category)

이 수준에 속하는 한 학생은 0.005와 0.006 사이에는 무수히 많은 소수가 존재한다고 답하는 한편, $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$사이에는 유한한 개수의 분수가 존재한다고 답했다. 이는 구간 끝 수의 표현방식에 따라 다른 이해 양상을 보이는 것으로, 유리수의 구조가 조밀하다는 이해와 이산하다는 이해가 혼합되어 있는 것으로 볼 수 있다.

(4) 제4수준: 경직된 조밀성(constrained density)

경직된 조밀성의 이해를 보이는 학생은 주어진 두 수 사이에 언제나 무수히 많은 수가 존재한다고 믿는 양상을 보인다. 그러나 여전히 수의 표현방식에 영향을 받으며, 두 분수 사이에는 무수히 많은 분수가, 두 소수 사이에는 무수히 많은 소수가 존재한다고 믿는다. 이 수준에 속하는 학생은 이산성이 전제되어 있는 사고 방식으로부터는 벗어난 상태다. 그러나 여전히 다른 수 표현이 서로 다른 구조의 수를 나타낸다고 믿으며, 분수들 사이에 소수가 혹은 소수들 사이에 분수가 존재한다는 사실을 받아들이는데 어려움을 겪는 경향이 있다.

(5) 제5수준: 조밀성(density)

학생 중 임의의 두 수 사이에는 언제나 무수히 많은 수가 존재한다고 믿으며, 이러한 믿음을 수의 표현방식과 관계없이 일관성 있게 나타내는 학생은 이 수준에 속하게 된다. Vomvakoussi와 Vosniadou(2007)의 연구에서는 이 수준에 해당하는 학생을 발견하지는 못했다.

위와 같은 분류로부터 정교하게 형성된 유리수 조밀성의 수학적 의미는 세가지 측면을 가지고 있음을 알 수 있다([표 1]).

---

2) Vomvakoussi와 Vosniadou(2007)에서의 이산성 (discreteness)은 일반 영어 회화의 맥락에서 'dense'(조밀하다)의 반대말로 사용되는 'discrete'에 주목한 것이다. 예를 들어, 조밀하다는 것을 표현하기 위해 'discrete'앞에 부정의 의미를 나타내는 전치사를 붙여 'indescrete'라는 단어를 사용하기도 하듯이, 여기서의 임의의 두 수 사이가 서로 명백히 분리되어 떨어져 있음을 가리키기 위해 사용된다. 즉, 어떤 학습자가 유리수 집합이 이산하다(discrete)고 생각하는 것은 '적어도 어떤 두 유리수에 대해서는 그 사이에 어떤 유리수도 존재하지 않는다'고 믿는다는 것을 뜻한다.

첫 번째 측면은 주어진 구간의 일차적인 분할 가능성이다. 학습자는 먼저 눈앞에 주어진 두 유리수의 단위보다 더 작은 단위를 가진 수가 사이에 적어도 하나 존재함을 깨달아야 한다. 예를 들어, 0.005와 0.006이 주어졌다면 학습자는 두 수 사이에 두 수의 최소 공통 단위인 0.001보다 작은 단위인 0.0001을 단위로 가지는 수들이 존재함을 깨달아야만 두 수 사이의 0.0051과 같은 수의 존재에 대해 논의를 시작할 수 있다. 이러한 깨달음은 제1수준과 제2수준을 구별하는 기준이 된다.

두 번째 측면은 주어진 구간의 반복적인 분할 가능성이다. 0.005와 0.006 사이에 0.0051, 0.0052, ..., 0.0059가 존재한다는 것을 발견했다고 하더라도 0.005와 0.006 사이가 조밀하다는 것을 이해하기 위해서는, 보다 더 작은 단위의 수들로 주어진 수 사이를 반복적으로 또 지속적으로 분할할 수 있음을 깨달아야 한다. 두 번째 요건을 충족하는지의 여부는 제2수준과 제3수준을 가르는 기준이 된다.

세 번째는 분수-소수 표현 간의 통합이다. 학습자는 분수표현과 소수표현이 서로 다른 구조를 가진 수 체계를 나타내지 않는다는 것을 깨달아야만 조밀성에 대한 정교한 이해해 도달할 수 있다. 제3수준의 경우 표현방식에 따라 주어진 두 수 사이 구간의 이산함과 조밀함에 대한 판단이 나뉘므로 아직 분수-소수 표현이 통합되지 않은 단계라고 할 수 있다. 제4수준의 경우, 주어진 두 수의 표현 방식에 관계없이 학습자는 모두 사이가 조밀하다는 답변을 했으나, 완전히 분수-소수 간의 통합이 이루어졌다고 보기는 어려우며, 제5수준만이 분수-소수 사이의 성공적인 구조적 통합이 이루어진 단계라고 할 수 있다.

[표 1] 유리수 조밀성의 수학적 의미를 이루는 세 가지 측면

[Table 1] Three aspects of the mathematical meaning of the density of rational numbers

	구간 일차 분할	구간 지속 분할	표현 간 통합
1수준			
2수준	○		
3수준	○	○	
4수준	○	○	△
5수준	○	○	○

이를 종합할 때, 조밀함의 수학적 의미가 처음 형성되기 위해서는 첫 번째 요소와 두 번째 요소를 갖추는 것이 중요한 필요조건이라는 것을 알 수 있다.

2. 포괄적 유물론

de Freitas와 Sinclair (2014)는 수학 학습에서 신체의 역할을 핵심적인 것으로 간주하는 체화 이론 연구를 배경으로, 신체와 수학학습을 새롭게 이론화하고자 했다. 이를 위해, 그들은 신유물론적 존재론[3]을 기반으로 하여 수학에 대한 존재론이자 인식론인 포괄적 유물론을 수학교육에 도입했다.

포괄적 유물론은 교실 내에서 학습자나 교사의 발화를 제외한 다양한 물질적 요소들이 수학학습에서 차지하는 역할을 상대적으로 더 높게 평가한다는 점에서 기존의 수학학습에 대한 접근과 차이점을 보인다. 즉, 물질적 측면이 가지고 있는 힘을 강조한다. 이에 따라 포괄적 유물론은 학습의 물질적 측면을 더 깊고 포괄적으로 다루는 이론으로서 수학교육연구 및 과학교육연구에서 최근 가치를 인정받고 있으며(Ferrara & Ferrari, 2017; Haus, 2018; Roth, 2016 등 참고), 또한 역동적 멀티터치 디지털 테크놀로지가 수학 학습에서 가지고 있는 힘을 보여주기 위한 이론적 틀로서 사용되고 있다(Sinclair & de Freitas, 2014; Sinclair & Pimm, 2015 참고). 본 절에서는 포괄적 유물론을 검토하면서, 수학적 의미 형성 과정에서 신체를 어떻게 재개념화 하는지, 그것이 학습자가 형성하는 의미와 어떻게 관계를 맺으며 이에 따라 수학 학습은 어떻게 발

3) 신유물론은 인간과 물질에 대한 존재론적 관점의 측면에서 기존의 유물론과 다음과 같이 대비시켜 볼 수 있다. 기존의 유물론은 데카르트적 신체-마음 이분법에 뿌리를 두고 물질을 길이와 너비와 두께가 있는 존재로 간주했다. 이에 따라 인간의 신체는 돌멩이나 나무와 같은 기계적인 물질과 본질적으로 다를 바 없지만, 모든 인간은 신체 안에 자유의지를 가진 마음이 있기 때문에 움직이고 생각할 수 있는 존재로 간주되었고, 그런 점에서 다른 물질적 개체들과 구별되었다. 그러나 신유물론은 이러한 이분법적 접근의 문제점을 지적하면서 인간과 물질이 어떻게 상호작용하는지, 그럼으로써 그 둘이 구별되기 보다는 어떻게 존재론적으로 얽혀있을 수 밖에 없는 지를 설명한다 (Coole & Frost, 2010)

생하게 되는지를 살펴본다.

가. 수학학습에서의 물질적 상호작용과 의미

de Freitas와 Sinclair(2014)는 기존의 체화 이론에 관한 수학교육 연구들을 검토하면서, 선행 연구들이 수학학습 현상을 온전하게 설명하지 못한다고 비판한다. 신체의 감각-운동적 요소에만 초점을 맞춘 연구는 수학적 활동을 외부로부터 오는 자극의 수준에서 격하시켜 다룸으로써, 학습 현상에 내포된 인간과 환경의 상호작용의 측면을 경시하게 된다. 반대로, 수학적 활동을 통한 의미 형성과정에서 신체가 환경과 사회적으로 상호작용하는 모습에 초점을 맞춘 연구들은 인간의 의지와 능동성을 강조하면서 학습 활동이 학습자의 능동성에 의해서만 이루어지는 것으로 묘사하는 경향이 있다. 이러한 인간 중심적인 경향은, 신체가 상호작용하는 외부 세계의 물질적 환경이 가지고 있는 영향력을 등한시하는 것이다. 목적지를 향해 가는 길 한복판에 있는 큰 바위가 놓여있으면 피해가거나 경로를 수정하듯이, 외부세계와의 상호작용은 인간의 주체적인 행위만으로 모든 것이 결정되지는 않는다. 이러한 현상의 예는 수학교실에서도 찾아볼 수 있는데, 문성재와 이경화(2017)는 칠판에 그려진 기호가 학생들의 수학적 판단 및 정당화에 주는 영향을 보이면서 학습자의 주의가 갖는 수동적인 측면을 조명했다. 이와 같이, 포괄적 유물론은 기존의 체화 이론 연구가 수학학습을 '학습자가 스스로 정해진 종착지를 향해 고정된 경로를 따라가는 일'로 상정함으로써 학습과정에서 신체가 외부세계와 물질적으로 상호작용하면서 발생하는 창의적이고 비결정적인 모습을 온전하게 포착하지 못한다고 비판한다.

이러한 문제 의식에 기반하여, 포괄적 유물론에서는 먼저 포스트 휴머니즘에서의 논의를 따라 수학학습을 행위 주체성(agency)이 나누어져 있는 현상으로 간주한다. 위에서 언급했듯이 신체와 환경의 물질적 상호작용은 순수하게 학습자의 자발적인 의지에 의해서만 이루어지는 것이 아니지만, 그렇다고 해서 학습자가 아닌 어느 한 요소의 작용으로 환원시켜 설명할 수 있는 것도 아니다. 행위에 대한 주체성은 정도의 차이만 있을 뿐, 학습자만이 아니라 함께 관계를 맺는 다른 사회적, 물질적 요소들이 나누어 갖는 것이라고 할 수 있다.

따라서 포괄적 유물론에 따른 연구는 수학학습을 더 '포괄적인' 초점에서 다루어야 한다. 학습자의 신체를 포함하여 발화, 수학적 활동의 구체적 조작물, 수학적 대상을 나타내는 표상이나 기호 등 상호작용에 참여하는 모든 물질적 요소들 사이의 관계, 그 배치[4]에 주의를 기울여야한다. de Freitas & Sinclair는 이를 복잡하게 엉킨 실뭉치에 비유하여 어느 지점을 골라도 다른 모든 부분과 연결되어 있으며, 시작도 끝도 특정할 수 없는 것이라고 말한다. 또한 이 배치는 고정되어 있는 것이 아니며 수학적 활동이 진행됨에 따라서 시시각각 유동적으로 변하는 것으로 간주된다.

그렇다면 위와 같은 물질들의 배치는 수학적 의미와 어떻게 연결되는 것일까? 전통적으로 의미란 추상적이고 선험적이며 물질과는 동떨어진 것으로 여겨졌다. 그러나 포괄적 유물론은 Barad(2007)의 논의에 기반하여, 물질과 수학적 개념의 의미 사이의 관계를 재고하고, 수학적 개념의 의미가 물질과의 상호작용을 통해서 발현됨을 강조한다. 이러한 의미와 물질의 얽힘은 컴퍼스를 이용하여 원을 그리는 수학적 활동에서도 찾아볼 수 있다.

> 예를 들어, 기존에 사람들이 생각하던 원과 컴퍼스의 관계를 생각해보자. 이 경우에, '원'이 가리키는 의미에 있어서, 컴퍼스는 있어도 좋고 없어도 좋은 것인가? 아니면 적어도, 적절한 시간이 흐른 뒤에는 버릴 수 있는 것인가? 원의 개념이 컴퍼스에 의해 매개된다는 생각은 그들이 서로를 필요로 함을 온전하게 파악하지 못하며, '원'과 '컴퍼스'가 하나의 현상 내에서 일시적으로 함께 얽혀 관계를 맺는 과정을 적절하게 이해하지 못한다(de Freitas & Sinclair, 2014, p. 46).

이 예시에서의 컴퍼스는 원래부터 고정적이고 절대

---

4) 배치(assemblage)는 '모으다, 조립하다'라는 뜻을 가진 assemble에서 파생되어, Deleuze & Guattari (1988)이 도입한 용어로써, "주어진 사회-물질적 형태나 일종의 상호작용을 지탱하는 인간 및 비인간 요소의 구조적 배치를 포착하기 위한 용어"다(Ferrera & Ferrari, 2017, p.23). de Freitas & Sinclair(2014)는 이러한 Deleuze & Guattari의 의미를 직접 가져오기보다는 신체-배치를 정당화하고 설명하기 위한 맥락에서 여러 포스트 휴머니즘 학자들의 해석을 차용함으로써, 상호동등한 지위에서 서로 영향을 주고 받는 신체를 포함한 행위자들의 모임과 그들 사이의 물리적이고 사회적인 역학관계를 지칭하기 위해 이 용어를 사용한다. 번역은 김재춘과 배지현(2016)을 참고했다.

적으로 존재하던 원의 의미를 단순히 매개하는 부수적인 수단이 아니다. 이 활동을 통해 발현된 원의 의미는 컴퍼스와, 그것을 이용하는 학습자의 신체와, 종이와, 그 위에 그려진 원의 그림 등이 일시적으로 특수한 배치를 이루는 그 현상을 통해서 새롭게 형성된 것이다. 그 뿐 아니라, 이 때 형성된 의미는 해당 활동이 가지는 모든 특수성을 반영한다. 즉, 원의 의미는 컴퍼스와 그것을 이용한 활동의 물질성과 얽혀있는 것이다. 포괄적 유물론에서는 위의 예시와 같이 학습자의 물질적인 활동을 통해서 일시적으로 형성되는 배치와 그들을 통해 새롭게 발현(emerge)하는 의미에 주목한다.

나. 움직임과 새로운 의미의 발현

포괄적 유물론의 관점에서 수학적 의미란 수학적 활동의 물질적 배치를 반영하는 것으로서, 학습자가 새로운 의미를 형성하기 위해서는 기존과는 다른 새로운 물질적 배치가 만들어져야 한다. 그렇다면 새로운 물질적 배치를 만들어 내는 주요한 원천은 무엇일까? 또 그것과 새롭게 나타나는 수학적 의미는 어떤 관련이 있을까?

Châtelet(2000)는 수학의 역사에서 새로운 아이디어가 발생하는 과정을 조사하면서, 이전에 존재하지 않던 새로운 의미가 떠오르는 순간에는 수학적 대상에 대한 동적인 관점이 주요하게 작용했다는 것을 지적했다. 대표적인 예는 복소해석학에서 특이점이 있는 경우의 경로적분에 이용하는 수학자 Cauchy의 방법에서 찾아볼 수 있다. Cauchy는 복소평면 위에서 곡선을 따라 해석적인 복소함수를 적분을 함에 있어서 특이점이 경로의 위나 내부에 있을 경우, 경로의 연속적인 변형을 통해 그 점을 피해가는 대안 경로를 구성하는 방법을 고안했다. 여기서 Cauchy에게 특이점은 결코 실체가 없는 관념적 대상이라 할 수 없으며, 그는 특이점을 오히려 실제 밀도가 있는 대상처럼 다룬 것이다. 이처럼 Châtelet는 새로운 수학적 의미가 만들어지는 과정에서는 점, 직선, 원 같은 수학적 대상을 움직이고 변화할 수 있는 잠재력을 가진 물리적 존재로 보는 것이 필요함을 역설했다. 즉, 이동가능성(mobility)을 새로운 의미를 창조하는 힘의 원천으로 간주한 것이다.

포괄적 유물론은 Châtelet의 관점을 발전시켜 수학적 활동에서 이동가능성에 주목해야한다고 강조한다. de Freitas와 Sinclair는 수학적 활동에는 두 가지 측면이 존재한다고 보는데, 첫째는 이미 논리적으로 정해져 있던 가능성을 귀납적 혹은 연역적 추론 규칙 및 기존의 인식 습관에 따라 실현하는 일이며, 둘째는 수학적 활동 이전에는 존재하지 않던 새로운 의미를 이끌어내는 일이다. 두 가지 측면 모두 수학적 결과물을 산출한다는 점에서 공통점이 있지만, 명백한 차이가 존재한다.

예를 들어, 원을 ‘한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점들의 집합’으로서 정의하거나 만들어내도록 요구하는 수학적 활동을 가정해보자. 이 경우 위의 방식대로 원을 만드는 과정은, 논리적인 규칙에 따라 이미 가능하도록 결정되어 있는 것으로서의 원을 실현하는 일이며, 점을 개별적이고 고정된 형태로 간주하던 기존의 인식 습관을 그대로 따르는 것이다. 여기서의 점들과 원은 모두 고정된 위치에 대한 표상일 뿐이며, ‘뼈처럼 굳어버린 수학적 대상‘(de Freitas & Sinclair, 2014, p.218)이기 때문에 이러한 측면의 수학적 활동에서는 원이 가지는 독특한 역동적 의미가 형성될 수 없다.

이와는 다르게, 마치 돌멩이를 묶은 실을 손으로 잡고 돌릴 때처럼, 어떤 한 점이 앞으로 이동하는 동시에 고정된 다른 한 점으로 끌어당겨지면서 발생하는 점의 자취로서의 원을 다루는 수학적 활동을 떠올려보자. 여기서 학습자는 점을 실제로 움직이거나 움직이는 것으로 상상함으로써 학습자와 점 사이에 이전에는 교실에 존재하지 않았던 새로운 역동적 관계를 형성한다. 그리고 그로 인해 학습자가 고정된 각각의 점 혹은 고정된 점들의 집합에서는 결코 인식할 수 없었던 역동적인 원의 의미가 형성되었다. 이와 같은 과정을 통해 형성된 의미는 수학적 활동에 참여하는 요소들이 가지고 있던 성질이나 의미들의 단순 합으로는 설명하기 어렵기 때문에 이전에는 없던 새로운 것[5]이라고 할 수 있다(de Freitas & Sinclair, 2013)

이에 따라 포괄적 유물론에서는 수학적 대상 혹은 개념이 잠재적으로 가지고 있는 이동가능성을 현실화하는 움직임이 새로운 의미 형성의 원천임을 강조한다. 여기서 움직임의 범위는 수학적 대상의 움직임과 학습자의 움직임을 모두 아우른다. 수학적 활동에서 수학적 대상 혹은 학습자의 움직임을 통해 생겨난 새로운

5) Châtelet(2000)는 Deleuze(1994)에서 영감을 얻어 존재론적으로 새로운 의미를 이끌어 내는 과정을 ’잠재성을 현실화하는 것(Actualizing the virtual)‘이라고 표현했다.

물질적 배치는 학습자의 인식 습관의 변화를 가져오고, 이것이 새로운 의미 형성으로 이어질 수 있기 때문이다.

III. 연구 방법

이 연구는 초등학생들이 디지털 테크놀로지를 이용하는 수학 학습에서 테크놀로지와의 신체적 상호작용과 수학적 의미 형성과의 관계를 미시적으로 분석하기 위하여 사례 연구의 방법을 사용했다.

1. 연구 대상

연구자는 선행 연구과 교육과정 문서에 대한 검토를 통해 5학년 과정을 마친 초등학생들을 잠재적 연구 참여대상으로 설정했다.

Vamvakoussi와 Vosniaduou(2010)는 그리스 학생들을 대상으로한 유리수 조밀성의 이해에 대한 연구에서 그리스의 7학년이 가지는 독특한 연구 가치를 조명했다. 7학년 학생들은 유리수와 그 성질에 대해서 형식적으로 아직 배우지 않은 집단이다. 그러나, 그들은 유리수의 조밀성과 관련된 과제를 수행하기 위해 필요한 수의 크기 비교, 분수와 소수 사이의 전환, 분수의 통약분 등 모든 절차적 지식을 교육과정을 통해서 접한 집단이다. 또한 그들은 상위 학년에 비해서는 조밀성에 대한 이해 수준이 낮았지만, 제5수준에 해당하는 답변을 비교적 일관성있게 제공할 수 있는 학생의 비율이 20%를 넘을 정도로 수준이 다분화되어 있는 집단이었다. 우리나라의 경우, 수와 연산 및 그 성질에 관한 교육과정에서 그리스의 7학년에 해당하는 집단은 초등학교 5-6학년군[6]으로, 현행 초등학교 5-6학년군 과정에는 유리수 조밀성의 이해를 위해서 필요한 요소들이 직간접적으로 포함되어있다(교육과학기술부, 2011). 다만 연구 참여학생들은 대상으로 한 수업이 2월 중에 이루어졌기 때문에 6학년 학생을 선발할 경우 중학교 수준의 선행학습을 했거나 조밀성에 대한 이해 수준이 상대적으로 높아 의미있는 변화를 관찰하기 어려울 가능성이 있다고 판단하여 5학년 학생들로 제한하여 선발했다.

또한 Vamvakoussi와 Vosniaduou(2010)는 7학년 학생들의 조밀성에 대한 이해 수준이 그들의 선행 연구와 마찬가지로 분화되어 있음을 확인했다. 연구에서 사용한 문항의 특성상 그들은 이해수준을 세 단계로 나누었으나, 이는 Vamvakoussi와 Vosniadou(2007)에서 제시된 5단계 수준과 일관성 있게 대응된다. 이는 그들의 5단계 수준의 인지적 틀이 타당함을 확인해 줌과 동시에 이것이 우리나라의 초등학교 5-6학년군에도 적용될 수 있음을 나타내 주는 것이다.

본 연구의 사례 속 교수실험에는 서울의 한 초등학교 5학년 학생 4명이 참여했다. 학생의 신원 보호 및 연구 결과 서술의 편의를 위해 학생들의 이름은 A, B, C, D로 명명한다. 이들은 같은 학급에 소속된 남학생 2명, 여학생 2명이다. 담임교사는 연구자와의 협의를 통해 수학을 좋아하면서도 수학에서의 성취도가 중상 이상인 학생들 중 연구참여 희망자를 사전에 모집했다. 담임교사는 반구조화된 면담을 통해 연구참여 희망자 중 중학교 수준의 선행학습을 한 적이 없으며 동시에 조밀성에 대한 제1수준 혹은 제2수준의 이해를 보이는 학생들을 연구참여자로 선발했다. 사전 면담 결과 A와 D는 제1수준, B와 C는 제2수준에 해당하는 것으로 나타났다.

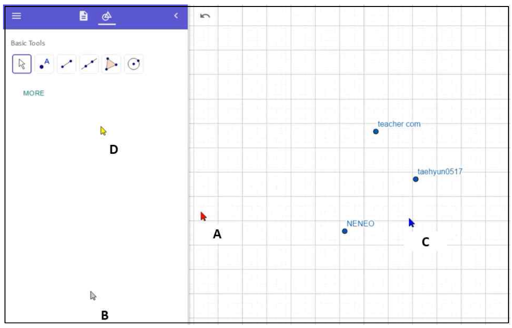
2. 연구 절차 및 활동 설계

연구참여 학생 4명은 책상을 둘러싸고 마주보고 앉아서 책상 바로 옆에 높인 화면을 공유했다. 연구자는 멀티터치 입력장치를 제공하기 위해 [그림 4]와 같이 터치패드 키보드를 각 학생에게 제공했는데, 이 키보

[그림 4] 학생들에게 지급된 터치패드 키보드
[Fig. 4] The touchpad keyboards given to the participants

6) 그리스의 7학년은 만으로 약 12세에 해당하며, 우리나라의 초등학교 5-6학년군은 만으로 약 10-12세에 해당한다.

드는 한 대의 컴퓨터와 모니터에 동시에 연결되었다. 역동적 환경을 갖추기 위해서는 동적 기하 프로그램으로 널리 알려진 GeoGebra를 사용하였다. 포괄적 유물론에서는 공간 역시 움직일 수 있는 잠재성을 가진 수학적 대상이므로 공간의 움직임을 쉽게 볼 수 있게 하기 위해 GeoGebra 화면에서는 주격자선과 보조격자선을 띄워 두었다. 이 격자선은 역동적 환경의 일부로서 화면을 확대하면 격자선 사이에 더 작은 단위의 격자선이 등장하고, 화면을 축소하면 큰 단위 격자선이 등장하고 가장 작은 단위의 격자선들은 화면에서 사라지게 된다. 이 때, 집단 협동 활동임을 고려해 별도의 소프트웨어를 설치하여 교사를 비롯한 4명의 학생들이 한 화면 안에서 [그림 5]와 같이 각자의 마우스 포인터를 가지고 동시에 조작을 할 수 있는 환경을 조성했다.



[그림 5] 집단적 GeoGebra 환경
[Fig. 5] The collective GeoGebra environment

교수실험의 수업은 주 1회, 30분, 총 3차시에 걸쳐 이루어졌으며 연구자가 직접 교사의 역할을 맡았다. 학생들은 GeoGebra를 들어보거나 사용해본 적이 없었으므로, 1차시에 학생들은 위와 같은 환경에서 GeoGebra의 사용법을 숙지한 뒤, 2차시와 3차시에 걸쳐 본격적으로 활동을 수행했다. 3차시에서 활동이 끝난 뒤 현장에서 교사는 학생들을 대상으로 활동의 결과에 대한 반구조화된 집단 사후 면담을 실시했다.

활동의 이름은 '점 찍고 이름 붙이기'로, 학생들이 역동적 멀티터치 테크놀로지 환경 내에서 수직선을 이용하여 유리수의 조밀성에 대한 이해를 어떻게 발전시켜 나가는지를 살펴보기 위한 목적으로 연구자에 의해 설계되었다. 활동은 게임의 형태로서 학생들이 2명씩 짝지어 한 팀을 이룬 상태에서 이루어진다. 학생들은 번갈아가며 주어진 직선 위의 빈 곳에 점을 찍고, 그 점의 위치에 어울릴 것으로 생각하는 수를 이름으로 붙이게 된다. 학생들에게는 이것이 분수, 소수, 혹은 수직선을 이용한 학습과 관련이 있다는 그 어떤 사전 정보도 제공되지 않았다. 활동을 준비하는 구체적인 절차와 주요 규칙은 다음과 같다.

- 교사는 격자선만 띄워져 있는 화면에 직선을 그린다. 학생들은 이를 관찰한다.
- 교사는 두 개의 X표를 이용해 왼쪽 끝과 오른쪽 끝을 표시한다. 학생들은 두 X 사이의 구간에서만 게임을 수행해야 한다.
- 이어서 교사는 직선 위에 한 점을 찍고 이를 '0'이라고 이름 붙인다. 이어서 그 점의 오른쪽에 점을 하나 더 찍고 '1'이라고 이름 붙인 뒤, 두 점의 중점에 점을 찍고 '0.5'라고 이름 붙인다.[7][그림 6]
- 각 팀은 순서를 정하고 먼저 시작하기로 한 팀부터 직선 위에 점을 찍고 수로 이름을 붙인다. 학생들은 X 사이 구간 내에서 이미 점이 찍혀있지 않은 곳을 골라 자유롭게 점을 찍을 수 있다. 단, 새 점의 이름은 직선 위에 먼저 찍혀 있는 점들의 위치 및 이름을 참고하여 어울리도록 이름 붙여야 한다.
- 학생들은 자신의 팀원과 어디에 점을 찍고 어떻게 이름을 붙일 것인지에 대해서 논의하여 게임을 진행할 수 있으며, 다른 팀의 학생들은 그 점 찍기와 이름 붙이기가 타당하지 않다면 이의를 제기하고 상대팀에게 질문을 하여 정당화를 요구할 수 있다.
- 게임의 승패는 바둑이나 장기와 같이 결정된다. 어떤 한 팀이 더 이상 점을 찍을 곳을 찾지 못하거나 찍은 점에 붙여줄 적절한 수 이름을 찾지 못하면 해당 팀은 패배하게 되며, 끝까지 성공적으로 점을 찍고 적절한 수로 이름을 붙인 팀은 승리하게 된다.
- 교사는 활동 과정에서의 규칙 및 기계 이용의 기술적 측면에 대한 질문에는 답변을 제공하지만, 점을 찍는 위치와 이름이 옳고 그른지에 대한 정보 혹은 조밀성 개념에 대한 직접적인 언급은 하지 않는다.

3. 자료 분석 및 수집

7) 이 때, 격자선에 대한 직선의 위치와 세 점의 위치는 사전에 교사가 정교하게 계산하여 의도한 것으로 추후 활동 과정에서 학생들이 어려움을 겪도록 설계되었다. 이에 관해서는 결과를 제시하면서 자세하게 설명하도록 한다.

포괄적 유물론의 관점에서 의미 형성 과정을 살펴보기 위해서는 학습자의 신체의 움직임과 미시적인 주의를 살펴보는 것이 필요한데(de Freitas & Palmer, 2016), 이를 위해 본 연구에서는 사례를 세밀하게 분석하기 위해 미시 문화기술적 연구방법 (microethnography) (Streeck & Mehus, 2005)을 채택했다. 앞선 수학교육연구들은 수학적 활동에서 발화, 제스처, 표정, 자세, 도구의 사용, 시선 등이 맺는 관계를 분석함에 있어서 미시 문화기술적 방법이 효과적인 연구 방법임을 보여주었다(Nemirovsky, Kelton & Rhodehamel, 2013; Radford, 2009 등 참고). 특히 이 연구에서는 테크놀로지와 상호작용하면서 발생하는 움직임과 인식의 변화를 살펴볼 필요가 있다. 이를 위해 연구자는 연구 결과를 분석함에 있어서 다음의 요소들을 집중적인 분석 단위로 삼았다.

- 학생들의 터치패드 위의 손 움직임
- 마우스 포인터의 화면상의 움직임
- 화면의 움직임(확대, 축소, 이동 등)
- 학생들의 발화
- 학생들이 발화와 함께 사용하는 제스처

터치패드 위의 손은 학생이 주어진 디지털 테크놀로지를 조작할 수 있는 주요 방법이므로 연구의 목적을 달성하기 위해 가장 먼저 주목해야할 지점이다. 포인터의 움직임과 화면의 움직임은 학생의 주의의 초점이 어디를 향하고 있는지, 또 어떻게 변화하는지를 보여준다. 학생의 발화는 활동과 사후 면담과정에서 의미가 형성되는 과정을 언어적으로 드러내줄 것으로 기대된다. 제스처는 수학학습에서 학생의 발화 및 화면 속 표상들과 기호의 다발을 이룬다(Arzarello, Paola, Robutti & Sabena, 2009). 게다가 멀티터치 테크놀로지를 이용한 수학적 활동에서, 제스처는 학생의 손이 테크놀로지를 조작하면서 형성된 의미를 보존하여 의사소통에 사용하므로(Sinclair & de Freitas, 2014), 신체의 역할을 조사하기 위해 터치패드 위 손 움직임과 관련하여 특별히 주목할 만한 가치가 있다.

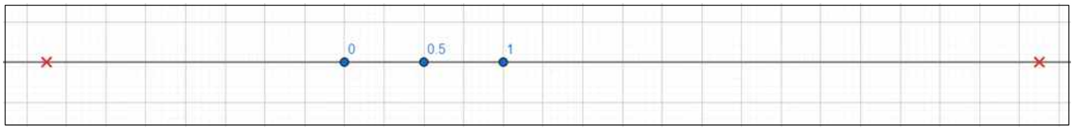
자료의 수집을 위해 1, 2, 3차시의 전 과정을 녹음 및 녹화했다. A와 B가 한 팀(이하 AB팀)을 이루었으며 C와 D가 다른 한 팀(이하 CD팀)을 이루었는데, 각 팀당 터치패드 조작을 촬영하는 카메라 1대와 상반신 전체를 촬영하는 카메라 1대씩이 배치되었다. 녹음기는 책상 위에 비치되었으며, 이 모든 장면을 담을 수 있는 롱테이크 카메라가 교실 후편에 위치했다. 학생들에게는 필요할 경우 풀이를 적거나 메모를 할 수 있는 빈 활동지를 제공하였으나, 종이에 무엇인가를 적은 학생은 없었다.

이 연구의 사례는 서울의 서로 다른 지역에 있는 3개의 초등학교의 사례 중 하나를 선별한 것이다. 각 초등학교에서는 동일한 방법으로 유사한 수준과 배경의 연구참여자를 모집하였으며 동일한 구조의 교수 실험을 진행하였다. 사례의 선별에는 두 가지의 기준이 고려되었는데, 첫째는 유리수 조밀성의 이해의 발달이 명시적으로 드러났는지의 여부, 둘째는 테크놀로지를 조작하는 손가락 움직임과 관련된 관찰가능한 자료가 풍부한지의 여부다. 이를 통해 조밀성 이해의 발달이 가장 극명하게 드러나면서도 학생들의 신체 움직임이 가장 풍부하게 포착된 사례를 선별하였다.

IV. 연구 결과 및 논의

연구 결과, 학생들은 활동이 진행되는 과정에서 게임 수행에 관한 그들만의 규칙을 암묵적으로 형성하여 이에 따라 게임을 일관된 방식으로 수행하는 것으로 나타났다. 이어지는 결과에서는 이를 학생들의 관례라고 부를 것이다.

조밀성의 의미 형성에 관련된 주목할 만한 결과는 관례가 암묵적으로 처음 수립된 뒤 변화하는 사건과 활동이 종료된 후 학생들이 게임의 지속 가능성을 깨



[그림 6] 학생들이 게임을 시작하기 직전 교사가 준비한 화면
[Fig. 6] The initial configuration of the activity setup by the teacher

닫는 사건에서 찾아볼 수 있었다.

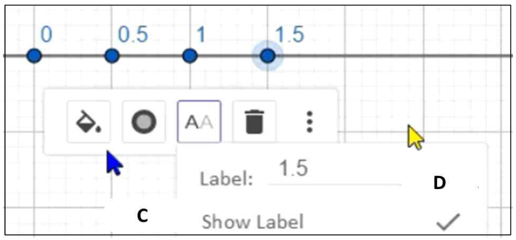
이에 따라 본 장에서는 연구 결과를 두 사건으로 나누어 제시한다. 각각의 사건을 문화기술적 방법의 전통에 따라 분석 단위와 관련하여 상세히 묘사하며, 디지털 테크놀로지에 대한 신체의 움직임이 포괄적 유물론의 관점에 따라 어떻게 조밀성의 의미 형성 과정에 영향을 주는지를 함께 서술하는 방식을 택한다.

1. 게임 수행 방식의 변화[8]

가. 게임 수행의 초기 관례 수립 및 순응

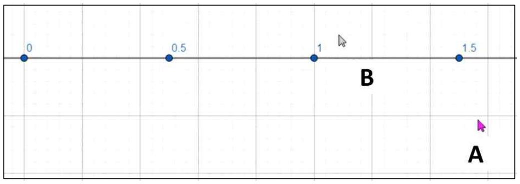
게임은 먼저 CD팀이 점을 찍음으로써 시작되었다. 게임 수행의 초기 단계에서는 의미있는 발화는 관찰되지 않았다.

C는 먼저 화면을 쳐다보면서 마우스 포인터를 움직여 1[9] 에 놓인 굵은 격자선과 오른쪽에 바로 이웃한 굵은 격자선 사이의 직선 위 구간에 점을 찍었지만, D는 “규칙에 따라서 해야”한다며 C를 제지했다. 그런 뒤, CD팀은 찍혀있던 세 점들 사이의 간격을 포인터를 움직여 측정하더니 1의 오른쪽에 0.5와 1 사이의 간격만큼 떨어져 있는 굵은 격자선이 놓인 위치에 원래 자신들이 찍었던 점을 옮겨두고 이를 1.5라고 이름 붙였다([그림 7]).



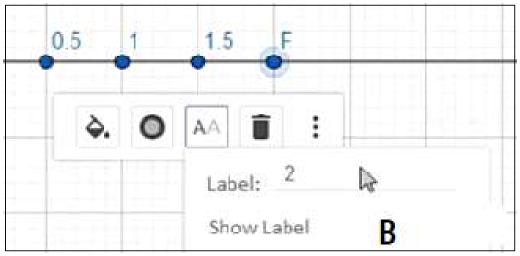
[그림 7] 1.5를 표시하는 CD팀
[Fig. 7] Team CD marking 1.5

AB팀의 차례가 오자 A는 터치패드 위에서 엄지와 검지를 벌리고 좁히면서 화면을 확대했다. 그런 뒤 새로이 찍힌 점과 기존에 주어진 세 점 사이의 간격을 재기 위해, 확대의 결과로 새로이 생긴 굵은 격자선의 개수를 마우스 포인터로 셌다([그림 8]).



[그림 8] 주어진 화면을 확대한 AB팀
[Fig. 8] Team AB zooming in

이어서 A는 화면을 얼마나 확대해야 좋을지 B와 짧게 논의하더니 화면을 축소하고, 오른쪽으로 CD팀과 동일한 간격만큼 이동하여 점을 찍고 2라고 이름을 붙였다([그림 9]).



[그림 9] 2를 표시하는 AB팀
[Fig. 9] Team AB marking 2

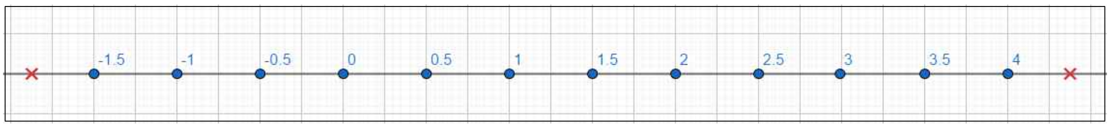
계속된 게임에서 학생들은 어디에 점을 찍을지에 대해 이견을 종종 보이며 화면을 확대하거나 축소하며 점을 찍을 구간을 탐색했지만, 결국 마지막에 점이 찍힌 곳으로부터 오른쪽으로 0.5만큼 떨어진 굵은 격자선 위에 2.5를, 다시 그보다 오른쪽으로 0.5만큼 더 떨어진 굵은 격자선 위에 3을 찍었으며, 이와 같은 방식으로 3.5와 4까지 표시했다([그림 10][10]).

위와 같은 활동의 초기 과정에서 학생들은 주어진 구조를 파악하고 이에 맞추어 관례를 만들어가는 모습을 보인다. 교사가 설정한 활동 규칙에 의하면 이 활동에서 점의 위치에 대한 제약은 두 X 사이에 찍어야 한다는 것 외에는 없었으며, 오직 점의 이름을 앞선 점들과 어울리도록 찍어야 할 뿐이었다. 학생들은 주어진 구간 내에 어디든지 점을 찍고 그것을 정당화할 수도 있었다. 그러나 학생들의 주의는 주어진 세 점의

8) 연구 결과는 프로그램 화면 상의 움직임 혹은 신체의 움직임을 많이 포함하므로 삽화된 그림을 자주 참고하며 읽을 것을 권한다.

9) 본 활동의 맥락에서는 각 점을 묘사함에 있어 ‘0에 해당하는 점’ 혹은 ‘0이라고 이름붙여진 점’등 이라고 해야 정당하나, 서술의 편의상 ‘0’ 혹은 ‘1’ 등과 같이 표현한다.

10) 활동의 과정 중 일부 학생은 같은 방식(즉, 왼쪽으로 0.5만큼 떨어진 굵은 격자선에 점을 찍는 방식)으로 0의 왼쪽에 음수를 표현했는데, 이는 본 연구의 주제와 직접적인 관련성이 떨어지므로 다루지 않기로 한다.



[그림 10] 0.5에 해당하는 굵은 격자선에 모두 점이 찍힌 상태의 화면
[Fig. 10] The number line where all thick grid lines with 0.5-unit are marked

이름이 0.5씩 차이 난다는 것과 세 점이 모두 굵은 격자선과 직선의 교차점 위에 있다는 것에만 고정되었다. 그로 인해 학생들은 게임 수행에 대해 다음과 같은 암묵적인 관례 1을 형성했다.

관례 1-가. 새로운 점은 기존에 찍힌 점과 0.5만큼 차이 나는 위치에 찍고, 그에 따라 0.5를 더하여 이름 붙여야 한다.
관례 1-나. 새로운 점은 오직 굵은 격자선 위에만 찍는다.

이러한 관례는 학생들이 임의로 만든 것이 아니며, 주어진 초기 테크놀로지 환경에서 지각적으로 두드러지는 요소인 0과 0.5와 1의 존재, 그들 사이의 간격, 그리고 굵은 격자선들이 함께 만들어낸 구조에 따른 것이다. 관례를 따르는 일은 단순히 구조에 순응하는 것을 넘어 이를 점점 더 강화하는 결과를 낳는다.

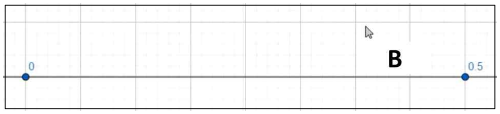
기존의 주어진 환경의 구조가 관례를 형성하게 할 만큼 학생들에게 강력하게 작용하는 상황은 복수의 장면에서 확인할 수 있었다. 먼저 첫 차례를 부여받은 CD팀은 가장 자유도가 높은 초기 상황임에도 불구하고 굵은 선을 벗어나서 점 찍는 것 혹은 0.5만큼 차이 나는 곳이 아닌 곳에 점 찍는 것을 스스로 용납하지 못해 점을 움직여 1의 오른쪽 굵은 격자선 위에 1.5를 찍게 되었다. 이어지는 상황에서도 AB팀은 [그림 8]과 같이 화면을 확대하여 기존의 규칙을 벗어난 점을 찍을 수 있는 기회를 얻었다. 그러나 화면에 나타난 굵은 격자선들이 0.5의 간격과 일치하지 않아 간격을 측정하기 어렵게 되자, 그들은 이내 다시 화면을 [그림 9]와 같이 축소하여 굵은 격자에 0.5를 맞춘 뒤 기존의 규칙에 맞게 1.5의 오른쪽에 2를 찍게 되었다.

관례 1을 통해 학생들이 0.5를 더 이상 나눌 수 없는 최소 단위로 주어진 그대로 받아들이고 있다는 것을 확인할 수 있다. 사전 면담에서 제2수준에 해당하는 조밀성의 이해를 보였던 B와 C도 실제 게임에서는 구조를 벗어나지 못하고 A, D와 함께 관례를 형성해 0.5보다 작은 단위의 수에 대응하는 점을 찍지 못하면서 제1수준에 해당하는 게임 수행 양상을 보였다.

나. 기존 관례의 탈피 및 새 관례의 수립

학생들은 관례에 따라서 일관적이고 안정적으로 게임을 수행했으나 아래의 일화에서 그들은 더 이상 그렇게 수행할 수 없는 상황을 맞이하고 변화를 모색하기 시작한다.

CD팀이 4에 점을 찍은 이후 차례를 맞이한 AB팀은 화면을 확대하여 점을 찍을 구간을 탐색한다. 4쪽으로 화면을 이동한 A는 3.5와 4, X가 있는 부분을 강조하듯이 동그라미 모양으로 포인터를 수차례 움직이면서 “여기 못 가”라고 말한다. B는 화면을 이동하면서 수직선의 다른 부분을 천천히 살펴본 뒤 터치패드 위에서 엄지와 검지를 벌려 0과 0.5 사이의 구간으로 화면을 확대한다([그림11]).



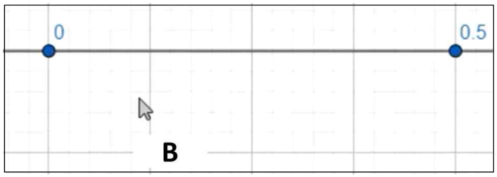
[그림 11] (0, 0.5) 구간으로 확대한 B
[Fig. 11] B zooming into (0, 0.5)

B: [포인터를 이용하여 0에서 0.5로 움직이면서 굵은 격자를 센다][11] 엥? 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, 여섯, 일곱, 여덟. (웃으며) 왜 애매하게 여덟 개야!
A: (모니터에 있는 0 부근의 가는 격자선을 손가

11)본문에서 제시될 대화 발췌문에서 T는 교사의 발화를 나타낸다. 또 각 발화의 시작이나 중간에 있는 작은 괄호 ( ) 안의 내용은 터치패드 위 손가락의 움직임이나 화면에 대한 신체에의 움직임으로 테크놀로지와 상호작용하는 신체의 움직임 등을 주로 묘사하며 때로 일반적인 비언어적 의사소통 방식을 포함한다, 발화 시작이나 중간의 대괄호 [ ] 안의 내용은 GeoGebra 내의 조작에 관한 것으로 포인터나 화면의 움직임 등을 묘사한다. 발화의 끝에 있는 대괄호는 설명을 돕기 위한 삽화에 대한 안내이다.

락으로 가리키며) 야, 그게 아니라. 이거, (엄지와 중지로 가는 격자선을 짚으며) 이걸로 하면 되잖아.

B: 야, 그건 너무 많잖아. (검지와 중지를 오므린다)[화면을 축소한다] 줄여, 줄여([그림 12]).



[그림 12] (0, 0.5) 구간을 축소한 B
[Fig. 12] B zooming out of (0, 0.5)

B: [다시 0과 0.5 사이의 굵은 격자선을 세면서] 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, ... 으잉? 맞나?

(중략)

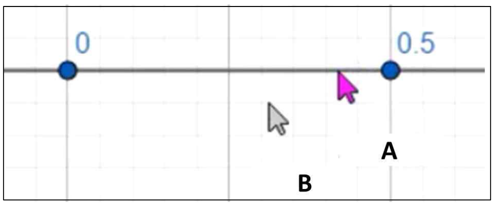
B: 난 0.1을 하고 싶단 말이야.

학생들은 여기서 첫 번째 장애물을 만나게 된다. [그림 10]에서 나타난 바와 같이 주어진 구간 내의 0.5 단위에 해당하는 모든 굵은 격자선을 다 사용해버린 것이다. 관례 1에 따르면 이 상황에서는 더 이상 게임을 지속하기 어렵다. 따라서 학생들은 어쩔 수 없이 기존의 관례를 어기거나 아니면 게임에서의 패배를 인정할 수 밖에 없게 되었다. 이에 따라 B는 관례 1-가를 어기고 화면을 확대하여 0과 0.5사이 0.1에 해당하는 점을 찍고 이름을 붙이고자 했다. 여기에서 B는 더 이상 0.5 단위의 수에 집착하지 않으며 B의 주의는 0과 0.5 사이의 구간에 일정 시간 이상 안정적으로 머무르는 모습을 보인다.

그럼에도 불구하고 B가 여전히 0.1을 찍지 못하고 어려움을 겪는 이유는 두 번째 난관에 봉착했기 때문이다. [그림 8]의 상황처럼 B는 관례 1-나에 의하여 굵은 격자선 중에서 자신이 원하는 점의 위치를 찾으려 한다. 그러나 이 게임 환경은 0과 0.5 사이의 굵은 격자선의 개수가 10의 배수 혹은 5의 배수로 나타나기 어렵도록 교사에 의해서 정교하게 설계되었기 때문에, B는 0.1에 해당하는 굵은 격자선을 찾는데 어려움을 겪게 되었다. 그런데 이 때, A는 굵은 격자선 사이에 있는 가는 격자선을 주목하기 시작하였으며, B에게 관례 1-나를 어기고 가는 격자선에 기반하여 0과 0.5 사이 구간을 볼 것을 제안한다. B는 이를 거절하지만, 이내 화면을 축소해보아도 여전히 0.1에 해당하는 굵은 격자선이 나타나지 않음을 깨닫고 이내 실망한다.

그런데 다음 순간, B는 불현듯 가는 격자선을 이용하는 방법에 동의를 하게 된다. D는 게임 상황에서는 다른 팀이지만 AB팀의 게임 수행에 대한 논의에 함께 참여하였다.

B: (검지와 중지를 오므린다)[화면을 축소하며] 아, 야, 잠시만, 생각이 났어. 두 칸씩 하면 되잖아 10개니깐. 아닌가?. 2, 5는 10이지? ([그림 13])



[그림 13] 화면을 축소하여 (0, 0.5) 구간의 가는 격자선을 인식하는 학생 B
[Fig. 13] B zooming out and recognizing the thin grid lines in (0, 0.5)

(중략)

A: [0.1에 해당하는 가는 격자선을 가리키며] 여기다가 해야 하잖아.

D: 그래, 두 칸씩 하면 돼. 그러면 0.1이니까

(중략)

B: [키보드 조작 상의 문제로 계속 정확한 격자선 위에 점을 찍는 것을 어려워한다]

D: 더 키워서 보자. 더 키워서 보면 되는 거였어.

B: (검지와 중지를 벌리며)[0과 0.5쪽으로 화면을 확대한다]

(중략)

D: 몇 칸씩 해야돼?

B: [선을 따라 점을 움직이면서 격자선의 개수를 센다] 몇 칸씩...하나, 둘, 셋, 넷 ....에잉?

A: (모니터에 손을 대고 칸을 직접 손가락으로 세며)

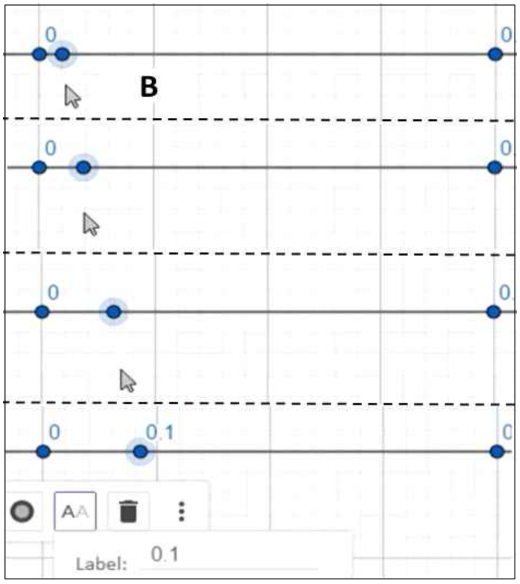
D: 20, 20, 20...그러니까,

A: 네 칸.

D: 네 칸씩. 네 칸씩.

B: [0에서부터 오른쪽으로 직선 위에서 점을 움직이면서 작은 격자를 하나씩 센다][그림 14]

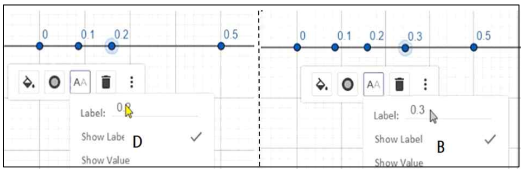
B는 곧 0으로부터 오른쪽으로 네 번째에 있는 가는



[그림 14] 화면을 확대하여 0.1을 찍기 위해 가는 격자선을 세는 B

[Fig. 14] B counting 20 thin grid lines between 0 and 0.5 with the slightly zoomed in screen

격자선 위에 점을 찍고 0.1이라고 이름 붙였다. 이어진 활동에서 학생들은 B가 했던 것과 동일한 방식으로 게임을 수행했다. 마지막에 점 찍힌 위치로부터 가는 격자선을 오른쪽으로 4칸 세고, 그 위에 0.2, 이어서 0.3을 차례로 점찍기 시작했다 ([그림15]). 수업 시간이 다 된 관계로 게임은 여기서 종료되었다.



[그림 15] 게임의 새로운 관례의 형성

[Fig. 15] The emergence of a new practice

위의 장면에서 학생들이 기존의 관례 1를 벗어나는 모습이 드러났다. B는 A의 제안을 받아들여 관례 1-나를 버리고 0과 0.5 사이의 가는 격자선을 세어 0.1을 표시하기로 결정했다. 화면을 확대함에 따라 가는 격자선의 개수가 달라지자, 학생들은 0과 0.5 사이의 가는 선의 개수를 세어 20개임을 알아차리고 가는 격자선 네 칸이 0.1의 단위에 해당하는 것임을 파악한다. 이에 따라 B는 성공적으로 가는 격자선 위에 0.1을 표시할 수 있게 되었다.

이어지는 장면에서는 학생들이 AB팀의 수행방식을 지속적으로 따르는 것을 통해 관례 1을 수정하여 새로운 관례 2를 만든 것을 확인할 수 있다.

관례 2-가. 새로운 점은 기존에 찍힌 점과 0.1만큼 차이 나는 위치에 찍고, 0.1을 더해 이름 붙여야 한다.
관례 2-나. 새로운 점은 굵은 격자선 혹은 가는 격자선 위에 찍는다.

CD팀은 무수히 많은 다른 공간적, 방법적 선택지가 있었음에도, AB팀이 했던 방식을 이용해서 0.2를 표시했으며, 이는 CD팀의 0.3의 표시에서도 그대로 이어졌다. 시간 관계상 0.3 이후의 게임 수행에 대한 자료는 없지만 학생들의 게임중에 보였던 발화와 행동을 토대로 연구자들은 학생들이 동일한 방식으로 0.4, 0.6 ...등을 표시했을 것이라 추정했으며, 이에 따라 이를 새로운 관례로 규정했다.

이러한 변화는 화면을 확대하고 축소하는 움직임에 의해 촉발된 결과다. X와 마주했을 때, 관례 1을 따라서는 더 나아갈 곳이 없다는 것을 인지한 학생들은, 게임을 지속할 수 있는 적절한 곳을 찾기 위해 손가락을 움직임으로써 수직선과 공간을 확대 및 축소했다. 그러자 수직선과 격자선들은 학생들과 새로운 배치에 놓이게 되었고, 이에 따라 굵은 격자선만을 인식하던 학생들의 습관이 깨지며 작은 격자선들을 게임 수행의 의미 있는 기준으로서 인식하게 되는 변화가 발생했다. 이는 곧 관례 1의 수정 및 관례 2의 등장으로 이어졌다.

이와 더불어, 관례 2를 통해 우리는 학생들이 주어진 두 유리수 사이의 구간을 0.1 단위로 일차적으로 분할이 가능함을 인식하고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 결과적으로 위 과정을 통해 제2수준에 속하는 유리수 조밀성의 의미가 형성되었다.

여기서 겉보기에는 동일한 확대·축소 행위가 구조에의 순응으로 이어지는지 창의적인 변화를 불러일으키는 지의 여부는 그 움직임이 발생하는 환경, 즉 다른 요소들과의 물질적 배치에 따라 달라진다고 할 수 있다. 이 일화에서는 X를 학생들이 인지하는 지의 여부가 중요하게 작용한다. 새로운 인식 습관을 만들어

낸 확대ㆍ축소 움직임은 학생들이 공간을 제약하는 X라는 물리적 장애물에 대항하여 발생한 움직임이다. X의 존재는 학생들의 주의를 기존에 존재하는 유리수 사이의 구간에 향하게 함으로써 인식의 변화와 그에 따른 새 의미의 형성에 영향을 주었다.

2. 게임의 지속가능성

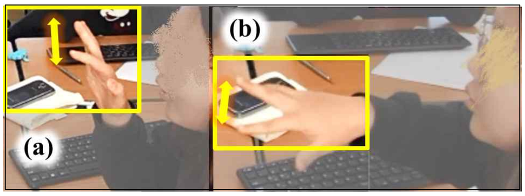
활동이 종료된 후, 교사는 이 게임에서 누가 승리하였는지를 물었다.

다같이: 동점이에요
T: 동점이에요? 왜 동점이에요?
C: 안 끝났어요.
(중략)
T: 그럼 이 게임은 누가 이길거 같아요?
B: 계속 해봐야되지 않을까요?
(중략)
D: 아니지. 그 홀수, 짝수에 따라서...
B: (D에 동의하면서) 그니까 홀수, 짝수...그러면
D: 하나하나 세보면
B: 될 것 같아.
T: 그게 무슨 말이에요? 홀수, 짝수라는 것이 무슨 말이에요?
B: 어, 그러니까 얘네가 먼저 시작했으니까, 저희가 맨 마지막에 끝날 수 있으니까, 저 팀이 질 수 있는 거 아닌가요?
T: 음 그러면 만약 시간 제한이 없으면?
B: 시간 제한이 없으면 계속 하나하나 다 해봐야죠.
(중략)
B: [화면을 확대했다가 축소하여 직선의 전체 활동 구간이 들어오도록 하며] 이걸 한 칸, 한 칸 세볼까? 짝수인지 홀수인지?

사후 면담의 초기 단계에서 주목할 만한 부분은 바로 게임의 승패가 시작순서에 의해서 결정된다는 믿음인데, 이 믿음의 기저에는 수직선 위의 수가 유한하다는 전제가 깔려있다. 수직선 위의 수가 유한하다고 믿기 때문에 이들의 개수가 홀수인지, 짝수인지의 여부가 게임의 시작순서에 따른 승패를 결정하는 요인이 되는 것이다. 여기서는 학생들이 아직 제2수준에 머무르며 유리수가 이산적 구조를 가진다는 것을 전제하고 있었다는 것을 확인할 수 있다.

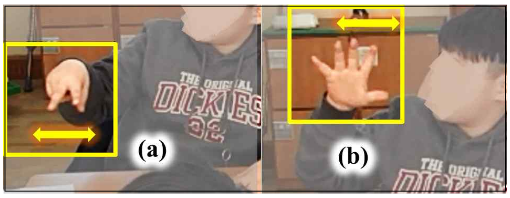
아래의 대화는 위의 마지막 B의 발언에 바로 이어지는 부분이다.

B: [화면을 축소한다]
D: (B가 조작하는 화면을 바라보다가 새로운 사실을 깨달았다는 듯한 표정으로) 아니지, 야, 0.0001을 할 수도 있잖아.
B: 0.0001! 어, 그러니까.
D: (두 손을 바깥에서 안으로 모으며 V모양을 만들면서) 그러니까 더 좁아질 수도 있지.
(중략)
T: 그런데 그러면 우리가 이만큼 직선 위에 점을 막 엄청나게 찍었다고 하면, 어떤 진짜 똑똑하고 생각이 많은 사람이 있으면, 거기에 점을 또 찍을 수 있어요?
A, B: 네.
C: 아주 미세하게.
B: (오른손 엄지와 검지를 앞을 향해 벌리며) 더, 더 늘려가지고. [그림 16 (a)]



[그림 16] B가 (a)“더, 더 늘려가지고”, (b)“계속 늘려서”를 말하면서 각각 사용한 제스처
[Fig. 16] B’s hand gestures: (a)“by stretching more and more”, (b)“by keeping stretching”

T: 그럼 언제까지 찍을 수 있어요?
A: 영원히.
B: 계속.
T: 계속?
A: 죽을 때까지.
B: 영점 영, 영, 영, 영, 영, 영, 일 하면 ...
A: 영점 영, 영, 영, 영, 영, 영, 영, 영, 일.
(중략)
C: (오른손 검지와 중지를 아래를 향해 벌리며) 이게 늘리면 늘릴수록 (손바닥을 앞으로 펴 손가락 사이를 벌리며) 모눈종이가 더 벌어지니까 칸이 더 많이 나올 것 같고 [그림 17 (a)와 (b)]
T: 음 그러면 끝이 안난다?
다같이: 네.
T: 그럼 이렇게 늘리고 늘려서, 내가 거기있는 곳에 다 찍어서 더 이상 찍을 곳이 안 보



[그림 17] C가 (a)“늘리면 늘릴수록”, (b)“칸이 더 많이 나올 것 같고”
[Fig. 17] C's hand gesture: (a)“the further you stretch”, (b)“the more cells you will have”

일 때까지 찍어요, 그래도 또 찍을 수 있어요?
A, B: 네.
B: (오른손 검지와 중지를 아래를 향해 벌리며) 계속 늘려서. [그림 16 (b)]

위 대화에서 학생들의 유리수 조밀성에 대한 이해에 큰 변화가 발생한다. 앞선 상황에서 B와 D는 수직선 위 구간에 수가 유한하게 존재할 것을 암시하는 발언을 했다. 그런데 이번에도 B가 수직선을 더 자세히 들여다보기 위해 화면을 확대했다가 축소하는 순간 B와 D는 자신들이 활동에서 사용했던 0.1보다 훨씬 더 작은 단위인 0.0001이 존재한다는 것을 인지하기 시작했다. 또한 B가 매우 작은 단위의 수를 찍을 수 있다는 의미로 소숫점 아래 일곱째 자리의 소수(0.0000001)를 말하자, A는 곧바로 그보다 더 작은 단위를 가진 소수를 덧붙였다(0.000000001). 이는 초기에 주어진 0.5보다도, 또 활동 중에 발견한 0.1보다도 작은 단위들로 원하는 구간을 지속적으로 나눌 수 있다는 것을 학생들이 인지한 것이다. 이와 더불어 모든 학생들은 교사의 질문에 답하는 과정에서 아무리 눈에 보이는 점들이 촘촘하게 존재한다고 해도, 공간을 늘림으로써 수들 사이에서 언제나 새로운 수를 찾을 수 있을 것이며, 그렇기 때문에 게임이 영원히 지속될 수 있다고 답했다. 이것으로 적어도 제3수준 이상에 해당하는 조밀성 의미가 주어진 수학적 활동을 통해서 새롭게 형성되었음을 살펴볼 수 있다.

지금까지 제시된 조밀성의 의미 형성 과정에서 확대·축소 행위가 결정적인 역할을 했다는 것은 학생들이 발화와 함께 사용했던 제스처에서 다시 한 번 확인할 수 있다. 학생들은 게임이 끝없이 지속 가능한 이유를 교사에게 설명하는 과정에서 마치 허공에서 가상의 터치패드를 조작하여 화면을 확대·축소하는 것과 같은 손동작을 취했는데([그림 16], [그림 17]), 이 제스처와 학생들의 발화의 결합은, 활동을 통해 형성된 조밀성의 의미가 화면을 확대·축소하는 신체적 조작 행위와 떨어뜨릴 수 없는 관계에 놓여있음을 보여주는 것이다.

또한, 여기까지 형성된 조밀성의 의미는 주어진 수학적 활동이 가지고 있던 특수한 물질적 환경을 통해 학생들이 새롭게 이끌어낸 것이다. 활동을 시작하기 전에는 그 어떤 학생도 제2수준을 넘는 조밀성의 이해를 보이지 않았다. 또한 주어진 구조에 기반한 습관(관례 1)을 지키는 것만으로는 조밀성의 의미를 실현시킬 수 없었다. 그러나 활동을 통해서 발생한 움직임은 학생들의 신체와 수직선(유리수, 점, 직선) 및 공간과 같은 수학적 대상들의 움직임을 촉발시키고 그로 인해 새로운 배치를 만들어내며 그 속에 잠재되어 있던 조밀성의 의미를 드러나게 했다.

V. 결론 및 제언

이 연구는 역동적 멀티터치 디지털 테크놀로지 환경에 대한 신체적 상호작용과 유리수 조밀성의 의미형성 과정의 관계를 포괄적 유물론의 관점에서 살펴보고자 했다. 이를 위해 GeoGebra와 터치패드 키보드를 이용하였으며, 유리수 조밀성의 의미를 탐구해 볼 수 있는 활동을 설계했다. 연구 결과에서는 4명의 초등학생이 참여한 활동의 사례를 분석했으며, 미시 문화기술적 방법을 사용하여 신체적 움직임과 기존의 미시적인 인식적 습관의 변화에 초점을 맞추었다. 이에 따라 활동 과정에서 학생들의 손가락의 움직임, 마우스 포인터와 화면의 움직임을 비롯해 발화와 제스처를 살펴보았다.

연구 결과는 학생들이 더 높은 수준의 조밀성의 의미를 형성하는 과정 전반에 걸쳐 테크놀로지를 조작하는 신체의 움직임이 촉매와 같은 핵심적인 역할을 했음을 보여주었다.

학생들은 그들만의 규칙을 암묵적으로 수립하여 활동을 수행했는데, 활동의 초기 단계에서는 0.5 단위의 수를 굵은 격자선 위에만 표시할 것을 고집했다. 이는

주어진 환경의 특징으로 인해 강요된 습관이었다. 그런데 0.5에 해당하는 굵은 격자선이 모두 포화됨으로써 주어진 물적 조건들이 새로운 국면에 놓이게 되자, 학생들의 손가락의 움직임은 화면을 확대하고 축소함으로써 수직선과 공간을 움직였고, 이로써 학생들의 인식 습관에 변화를 불러일으켰다. 학생들은 더 이상 0.5 단위의 수를 고집하지 않고 0.1을 위한 구간을 찾아 나섰으며, 그 과정에서 이전에는 주목하지 못했던 가는 격자선에 주목하기 시작했다. 이는 결국 가는 격자선에 의거해 0.1 단위의 수를 찍는, 활동의 새로운 규칙의 창조로 이어졌고, 학생들이 주어진 0.5 단위를 보다 작은 0.1 단위로 분할할 수 있음을 인지하면서 제2수준에 해당하는 조밀성의 의미가 형성되었다.

또한 활동 후 이루어진 사후 면담에서, 손가락을 이용한 화면의 확대·축소, 또 그로 인한 수학적 대상들의 움직임은 학생들로 하여금 0.1 단위의 구간을 더 작은 단위인 0.0001등으로 분할할 수 있음을 인지하게 했다. 이는 곧 이산적 사고방식의 탈피로 이어져 제3수준 이상에 해당하는 조밀성 의미의 형성으로 이어졌다. 이어서 학생들은 수 사이에 있는 더 작은 단위의 수들을 찾음으로써 활동을 끝없이 지속할 수 있다는 것을 제스처를 사용하면서 교사에게 설명했는데, 이 발화와 제스처로부터 제3수준 이상의 조밀성의 의미가 형성되었으며 그 의미는 학생들이 터치패드를 조작했던 손가락의 움직임과 얽혀있는 것을 재확인할 수 있었다.

물론 연구 참여 학생들이 소수만을 이용하여 과제를 수행했으며, 사후 면담에서도 소수표현에 국한하여 조밀성의 의미를 논했기에 학생들이 제4수준이나 제5수준에 확실하게 도달했는지의 여부는 확인할 수 없었다. 그러나, 위와 같은 결과로 미루어볼 때, 과제 상황에서 분수 표현을 사용하도록 적극 장려했다면 제4수준이나 제5수준에 해당하는 조밀성 의미의 형성을 관찰할 수 있었을 것으로 연구자들은 예상한다

이 연구의 위와 같은 결과는 다음의 두 가지 시사점을 갖는다. 첫 번째, 역동적 멀티터치 디지털 테크놀로지는 신체를 활용하는 수학학습의 새로운 방식을 촉진할 수 있다. 위의 제시된 결과에서 새로운 수학적 의미는 종이 위 문제 풀이나 언어적 담화가 아닌 테크놀로지를 조작하는 신체의 움직임을 위주로 형성되었으며, 결코 신체와 분리시켜 논할 수 없었다. 이는 전통적인 종이책은 물론, 키보드와 마우스를 이용한 디지털 테크놀로지에서는 관찰하기 어려웠던 학습방식으로, 새로운 학습매체의 사용이 새로운 학습 방식을 불러일으킬 수 있음을 암시한다.

두 번째, 새로운 의미를 형성하기 위한 수학적 활동은 학생들의 기존 습관을 깨는 방향으로 설계되어야 한다. 이 연구의 결과에서 기존의 구조에 순응하고 기존의 인식 습관을 유지하는 것은 더 높은 수준의 수학적 의미 형성에 도움이 되지 않는 것을 볼 수 있었다. 이러한 행위는 결과물을 만들어내기는 하지만, 원래 가능했던 것만을 계속해서 반복할 뿐이며 학습자의 변화 또는 새로운 수학적 의미의 형성으로 이어지기 어렵다. 따라서 본 연구의 과제와 같이 수학적 활동에서 학생들이 기존의 습관을 따르려고 시도하면 장애물을 만나 어려움을 겪도록 설계하는 것은, 학생들이 새로운 수학적 의미를 형성하도록 하는 데에 도움이 될 것으로 예상한다.

이에 따라 연구자들은 후속 연구의 방향을 다음과 같이 제안하고자 한다. 첫째, 후속 연구는 본 연구에서 사용한 활동을 변형하여 수와 연산 영역의 일부 개념 학습에서 역동적 수직선 이용의 효과를 조사할 수 있을 것이다. 연구자들이 설계한 수학적 활동은 학습자로 하여금 디지털 테크놀로지를 통해 수직선과 배경 공간을 움직임으로써 더 작은 단위에 주목하게 하고 여러 가지 수를 수직선 위에 표현 할 수 있게 한다. 연구자들은 이와 같은 특징이 분수의 통약분, 무한소수 및 무리수의 개념 등과 같이 더 작은 단위에 대한 주목이 필요한 교육과정 상 내용을 학습할 때 역동적 수직선의 사용이 만들어내는 변화를 관찰할 수 있게 해줄 것으로 기대한다.

둘째, 후속 연구는 다른 특징을 지닌 디지털 테크놀로지를 이용하여 수학적 의미가 어떻게 다르게 형성되는지를 조사해볼 수 있을 것이다. 예를 들어, 수직선을 이용하여 조밀성을 탐구하는 본 연구의 활동을 키보드와 마우스를 이용하여 수행하거나, 증강현실 소프트웨어를 이용하여 3차원 공간에서 수행할 수 있게 했을 때 조밀성의 의미가 본 연구와 비교하여 어떻게 다르게 발현되는지를 조사해보는 것이 흥미로운 연구 주제 중 하나가 될 것이다.

셋째, 포괄적 유물론 관점에 기반한 평가 도구를 개발하는 것 역시 가능할 것이다. 본 연구는 수학적 활동에 진행됨에 따라 수학적 의미가 드러나는 과정에

대한 연구다. 따라서 연구에 참여한 학생들이 조밀성의 개념을 형식적인 수준에서 견고하게 학습했다고 주장하기보다는, 유리수의 조밀성에 대한 암묵적인 직관을 습득했다고 말하는 것이 더 타당할 것이다. Sinclair와 de Freitas, Ferrara(2013) 역시 이러한 종류의 앎을 가리켜 '흐릿하고(murky)', '은밀한(furtive)'한 것이라고 했다. 이와 관련하여 이 연구는 평가에 관한 한계를 갖는다. 현재 우리가 사용하고 있는 결과와 개념 위주의 평가 방식은 이러한 종류의 '흐릿하고 은밀한' 학생의 앎 혹은 변화를 확인하기에는 적절치 않다. 혹자는 이를 가리켜 학습이 일어나지 않은 것은 아니냐고 반문할 수 있겠으나, 우리의 학습이 결국은 작고 미세한 변화들이 모여 이루어지는 것임을 떠올려 볼 때, 포괄적 유물론이 포착하는 종류의 변화는 충분히 교육적 가치가 있는 것이다. 따라서 연구자들은 후속 연구들이 이를 의미있게 포착하고 평가에 반영할 수 있는 도구를 개발하기를 희망한다.

참 고 문 헌

고호경, 김응환, 양순열, 권세화, 권순학, 정낙영, 장인선, 임유원, 최수영, 이성재, 노솔, 백현윤, 홍창섭(2013). 중학교 수학 3. 서울: 교학사.

Ko, H., Kim, E., Yang, S., Kwon, S., Kwon, S. Jung, N., Jang, I., Lim, Y., Choi, S., Lee, S., Roh, S., Baek, H., & Hong, C. (2013). *Middle school mathematics 3.* Seoul: Kyohaksa.

교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정 (교육부 고시 제2011-361호 [별책8])

Ministry of Education, Science and Technology (2011). Mathematics curriculum. *Ministry of Education, Science and Technology Notice 2011-361 [Supplement 8].*

김민형, 김현주(2015). 사물인터넷과 초연결사회: 개념적 토대 및 기술인문학의 가능성. 영상문화, 27, 215-238.

Kim, M. H. & Kim, H. J. (2015). Internet of things and hyper-connected society: conceptual foundation and possibilities of the technique humanities. *Visual Culture, 27,* 215-238.

김재춘, 배지현(2016). 들뢰즈와 교육: 차이생성의 배움론. 서울: 학이시습.

Gim, C.-C. & Bae, J.-H. (2016). *Duleuze and education: Pedagogy of difference-making.* Seoul: Hageeshisub.

류희찬, 류성림, 이경화, 신보미, 강순모, 윤옥교, 김명수, 조성오, 천태선, 김철호(2013). 중학교 수학 1. 서울: 천재교육.

Lew. H., Lew, S., Lee, K.-H., Kim, C., Kang, S., Yoon, O., Kim, M., Cho, S., Chun, T., & Kim, C. (2013). *Middle school mathematics 1.* Seoul: Chunjae.

문성재, 이경화(2017). 수학 교수-학습에서 기호와 주의의 역할. 학교수학, 19(1), 189-208.

Moon, S. J. & Lee, K.-H. (2017). The function of signs and attention in teaching-learning of mathematics. *School Mathematics, 19*(1), 189-208.

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 남진영, 권석일, 김진환, 강현영, 조차미, 허선희, 전지영, 고현주, 이정연, 최은자, 김준식(2013). 중학교 수학 1. 서울: 두산동아.

Woo, J., Park, K., Lee, J., Park, K., KIm, N., Lim, J., Nam, J., Kwon, S., Kim, J., Kang, H., Cho, C., Huh, S., Jeon, J., Koh, H., Lee, J., Choi, E., & Kim, J.. (2013). *Middle school mathematics 1.* Seoul: Doosan Donga.

차두원, 진영현(2015). 초연결시대, 공유경제와 사물인터넷의 미래: 거의 모든것이 공유되고 연결되는 거대한 경제혁명 IoT. 서울: 한스미디어.

Cha, D. & Jin, Y. (2015). *The future of hyperconnected society, shared economy and internet of things.* Seoul: Hans Media.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97-109.

Baccaglini-Frank, A., & Maracci, M. (2015). Multi-touch technology and preschoolers' development of number-sense. *Digital Experiences in Mathematics Education, 1*(1), 7-27.

Barad, K. (2007). *Meeting the universe halfway: Quantum physics and the entanglement of matter and meaning.* Durham: Duke University Press.

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM, 48*(5), 589-610. doi:10.1007/s11858-016-0798-4

Châtelet, G. (2000). *Figuring space: Philosophy, mathematics, and physics* (S. Robert & Z. Muriel, Trans.). Dordrecht: Springer.

Coole, D. H., & Frost, S. (2010). Introducing the new materialisms. In D. H. Coole & S. Frost (Eds.), *New materialisms: Ontology, agency, and politics* (pp. 1-43). Durham, NC: Duke University Press.

de Freitas, E., & Palmer, A. (2016). How scientific concepts come to matter in early childhood curriculum: rethinking the concept of force. *Cultural Studies of Science Education, 11*(4), 1201-1222. doi:10.1007/s11422-014-9652-6

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 453-470.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. NY: Cambridge University Press.

Deleuze, G. (1994). *Difference and repetition* (P. Patton, Trans.). London: Athlone.

Deleuze, G., & Guattari, F. l. (1987). *A thousand plateaus: Capitalism and schizophrenia*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Drijvers, P., & Ferrara, F. (2018). Instruments and the body. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 193-194). Umeå, Sweden: PME.

Ferrara, F., Faggiano, E., & Montone, A. (2017). Introduction: Innovative spaces for mathematics education with technology. In E. Faggiano, F. Ferrara, & A. Montone (Eds.), *Innovation and technology enhancing mathematics education: Perspectives in the digital era* (pp. 1-5). Cham: Springer.

Ferrara, F., & Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation. *Educational Studies in Mathematics, 94*, 21-36. doi:10.1007/s10649-016-9708-5

Güçler, B., Hegedus, S., Robidoux, R., & Jackiw, N. (2013). Investigating the mathematical discourse of young learners involved in multi-modal mathematical investigations: The case of haptic technologies. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadog (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 97-118). Dordrecht: Springer.

Haus, J. M. (2018). Performative intra-action of a paper plane and a child: Exploring scientific concepts as agentic playmates. *Research in Science Education*. doi:10.1007/s11165-018-9733-8

Hegedus, S. J., & Tall, D. O. (2016). Foundations for the future: The potential of multimodal technologies for learning mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 556-575). New York, NY: Routledge.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (2010). Introduction. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and techonlogy: Rethinking the terrain* (pp. 1-11). New York: Springer.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126.

Roschelle, J., Noss, R., Blikstein, P., & Jackiw, N. (2017). Technology for learning mathematics. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in* *mathematics education* (pp. 853-872). Reston, VA: NCTM.

Roth, W.-M. (2016). Growing-making mathematics: A dynamic perspective on people, materials, and movement in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 87-103.

Rotman, B. (2008). *Becoming beside ourselves : the alphabet, ghosts, and distributed human being*. Durham: Duke University Press.

Sinclair, N., Arzarello, F., Gaisman, M. T., & Lozano, M. D. (2010). Implementing digital technologies at a national scale. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 61-78). New York: Springer.

Sinclair, N., & de Freitas, E. (2014). The haptic nature of gesture: Rethinking gesture with new multitouch digital technologies. *Gesture, 14*(3), 351-374.

Sinclair, N., de Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM, 45*(2), 239-252.

Sinclair, N., & Pimm, D. (2015). Mathematics using multiple senses: Developing finger gnosis with three-and four-year-olds in an era of multi-touch technologies. *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education, 9*(3), 99-109.

Streeck, J., & Mehus, S. (2005). Microethnography: The study of practices. In K. L. Fitch & R. E. Sanders (Eds.), *Handbook of language and social interaction* (pp. 381-404). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Trouche, L. (2014). Instrumentation in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encycolopedia of Mathematics Education* (pp. 307-313). Dordrecht: Springer.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21*(5), 676-685.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Amsterdam: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181-209.

Walter, D. (2018). How children using counting strategies represent quantities on the virtual and physical 'twenty frame'. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale(Eds.), Uses of technology in primary and secondary mathematics edcuation: Tools, topics and trends (pp.119-143). Cham: Springer.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

How Dense Are Rational Numbers?: An Inclusive Materialist Case Study to Digital Technology

Kim, Doyen
Graduate School of Seoul National University
1 Gwanak-ro, Gwanak-gu, Seoul 08826, South Korea
E-mail : dk0209mathed@snu.ac.kr

Kwon, Oh Nam
Seoul National University
1 Gwanak-ro, Gwanak-gu, Seoul 08826, South Korea
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

This study examines the influence of the bodily interaction with digital technology on meaning-making process in a mathematical activity. Increasing interest in the use of multi-touch dynamic digital technology has brought the movement of the body to the center of research focus in recent mathematics education literature. Thereby, we investigate the process in which the meaning of the density of rational numbers emerges around the bodily interaction on the multi-touch dynamic digital technology. We analyze a case of a small group of primary school students with microethnography. In the result, the students formed the higher level of meaning of the density, where the finger movement of zooming in-and-out played a crucial role throughout the meaning-maknig process.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Density, Digital Technology, Touchpad, Body, Inclusive materialism
* This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Korea and the National Research Foundation of Korea (NRF-2016S1A3A2925401)