

초등예비교사의 수학 문장제 해결 도구로서 다이어그램에 대한 초기 관념과 수행

임재훈¹⁾

다이어그램은 수학 문장제의 구조를 표현하고 추론을 하여 문제를 해결하는 데 유용하다. 다이어그램에 관한 교사의 관념과 실행은 학생들에게 큰 영향을 미친다. 그러므로 예비교사교육 프로그램에서 예비교사들이 다이어그램 관련 역량을 기를 기회를 제공해야 한다. 관련하여, 예비교사들이 다이어그램에 대한 어떤 사전 경험과 관념을 가지고 교사교육 프로그램에 입문하는지, 프로그램을 거치면서 어떤 변화가 일어나는지, 프로그램에 어떤 개선이 필요한지 연구할 필요가 있다. 이 논문에서는 그 출발점 작업으로, 교육대학교의 수학교육 프로그램에 입문하는 초등예비교사들의 다이어그램에 대한 관념과 수행을 조사하였다. 조사 결과, 초등예비교사들은 다이어그램 유용성 인식과 다이어그램 교육 의지 영역에서 긍정적인 응답을 보였으나, 수학 문장제 해결에 다이어그램을 자발적으로 사용하고 있지 않았고 학교에서의 다이어그램 학습 경험에서도 부정적인 응답을 보였다. 또, 초등예비교사들이 그린 다이어그램을 분석한 결과, 해를 구하는 추론(풀이) 과정을 나타내는 다이어그램을 그린 초등예비교사는 소수였다. 이러한 결과는 다이어그램에 관한 경험과 지식이 부족한 상태로 수학교육 프로그램에 입문하는 초등예비교사가 많음을 시사한다.

주제어: 다이어그램, 시각적 표현, 예비교사, 교사교육, 문제 해결

I. 서 론

시각적 표현은 학생들이 수학적 개념과 아이디어를 더 잘 보도록 도와주며, 언어적 표현과 기호적 표현을 연결하는 다리를 형성할 수 있게 한다(Arcavi, 2003; Presmeg, 2006). 또한 산술적인 접근과 대수적인 접근의 연결 고리를 형성하기도 하고, 문제 상황과 기호로 표현된 수학적 지식을 매개하는 역할을 수행하기도 한다. 예를 들어, 시각적 표현은 등비수열의 합의 공식이나 산술기하평균에 직관적인 의미를 부여하고(이대현, 박배훈, 2002), 곱셈의 교환법칙에 내재된 아이디어를 드러내어 이해를 촉진하고(임재훈, 2014), 비례식이나 비례 배분 문제를 해결할 때 비례 추론 능력의 신장에 기여하기도 한다(임재훈, 이형숙, 2015).

시각적 표현이라는 용어 자체는 그 포괄 범위가 넓어서, 문제에 언급된 대상이나 정경을 사실적으로 묘사한 그림도 포함되고, 문제에 내재된 수량 관계를 수직선, 선분도, 면적

1) 경인교육대학교, 교수

도, 수형도, 그래프 등으로 나타낸 것도 포함된다. 이 연구의 초점은 이 두 종류 중 뒤의 것에 있으며, 이를 다이어그램이라고 부르기로 한다. 대상이나 정경을 사실적으로 묘사한 그림에 비하여, 다이어그램은 학생이 문제의 정보를 선택, 조직하는 것을 지원하고, 문제 이해 및 필요한 정보 처리를 촉진하고, 문제 해결에 필요한 추론을 진행하는 데 도움이 된다.

이와 같은 다이어그램의 기능에 주목하여 학생들이 그린 다이어그램을 분석하는 등 학생들을 대상으로 한 연구는 많이 이루어졌지만, 교사 또는 예비교사를 대상으로 한 연구는 소수에 불과하다. 교사가 다이어그램의 가치를 낮게 인식하거나, 다이어그램을 그리는 데 필요한 지식이나 기능이 부족하거나, 학습 지도에 다이어그램을 적절히 활용하는 역량이 부족하면, 그의 수학 수업에서 다이어그램이 지닌 잠재력이 실현될 가능성은 낮다. 이 점을 고려할 때, 교사를 양성하는 교원양성기관의 수학교육 프로그램은 예비교사들이 다이어그램에 대한 바람직한 신념, 유용한 다이어그램을 그리는 능력, 학습 지도에 다이어그램을 잘 사용할 수 있는 역량을 기르는 기회를 제공해야 한다.

이로부터 교원양성기관의 수학교육 프로그램이 이 일을 어느 정도 성공적으로 수행하고 있으며 어떤 점에서 보완될 필요가 있는지 연구할 필요성이 제기된다. 여기에는 예비교사들이 다이어그램에 대한 어떤 관념과 능력을 지니고 수학교육 프로그램에 들어오는지, 프로그램을 거치면서 어떤 변화가 나타나는지, 다이어그램과 관련하여 프로그램의 어떤 부분에 변화가 필요한지를 고찰하는 것이 포함된다. 이 논문은 그 출발점 연구로, 선행 연구 분석을 통해 예비교사교육과 관련된 다이어그램 연구의 필요성을 제기하고, 교육대학교의 수학교육 프로그램에 입문하는 시기의 초등예비교사들이 다이어그램에 대한 어떤 관념과 경험을 가지고 있는지 조사하고, 그들이 수학 문장제를 해결하면서 그린 다이어그램을 분석한다.

II. 선행 연구 분석

이 장에서는 수학교육에서 다이어그램 관련 선행 연구를 살펴보면서, 예비교사 교육프로그램과 관련된 다이어그램 연구의 필요성을 확인한다.

1. 다이어그램과 관련된 학생들의 어려움과 학습 지도

다이어그램은 문제에 내재된 수량 사이의 관계를 나타낸 기하적 표현으로 정의될 수 있다(이소정, 2014; Diezmann & English, 2001). Rellensmann, Schukajlow와 Leopold(2017)는 상황적 그림(situational drawing)과 수학적 그림(mathematical drawing)을 구분하였는데, 다이어그램은 추상화 정도가 상황적 그림보다 높은 수학적 그림에 속한다. 이와 유사하게, Hegarty와 Kozhevnikov(1999)는 문제 표면의 대상들을 인코딩한 화보적 표현(pictorial representation)과 문제에 기술된 관계를 인코딩한 도식적 표현(schematic representation)을 구분하였다. [그림 1]은 “어머니는 38살이고 딸은 8살이다. 몇 년 후에 어머니의 나



[그림 1] 상황적 그림의 예
(윤자영, 2017, 47쪽)

이가 딸의 나이의 3배가 될지 구하시오.”라는 문제의 일부 정보를 나타낸 상황적 그림 또는 화보적 표현이다. 이와 비교하여, III장에 제시된 [그림 2]는 수학적 그림 또는 도식적 표현이다.

다이어그램의 정의에서 관계라는 용어에 주목할 필요가 있다. Bakker와 Hoffmann(2005)은 퍼스의 기호학을 바탕으로 다이어그램적 추론의 특징을 서술하면서, 다이어그램은 관계의 아이콘이며, 다른 무엇보다도 관계를 나타낸다고 하였다. 다이어그램이 관계를 나타낸다는 것은, 다이어그램이 문제의 구조적 표현이며 다이어그램에서 표면의 세부 사항들은 그다지 중요하지 않음을 뜻한다.

Hegarty와 Kozhevnikov(1999)의 연구에서, 도식적 표현 사용은 수학 문제 해결의 성공과 양의 상관관계가 있었고, 화보적 표현 사용은 문제 해결의 성공과 음의 상관관계가 있었다. 황현미와 방정숙(2009)도 문제를 성공적으로 해결한 아동들은 대체로 도식적 표현을 사용함을 보고하였다. 김유정과 백석운(2005)의 연구에서도, 성공적으로 문제를 해결한 아동은 계산식에 의존하기보다는 여러 가지 정보를 구조적으로 표현하고, 문제 해결 과정을 직관적으로 파악할 수 있는 명료하고 조직화된 그림을 그렸다. 다이어그램은 문제 구조의 개념화를 쉽게 해주어 문제 해결을 향한 발걸음을 내딛게 하고, 그 자체로 추론 가능한 표현 체계이므로, 다이어그램을 분석하고 추론하여 새로운 사실을 발견하고 문제를 해결할 수 있다(김재홍, 2010; 이소정, 2014; Diezmann, 2000; 2002).

이와 같은 다이어그램의 기능이 학생들의 실제 문제 해결에서 작동하려면, 학생들이 다이어그램의 가치를 인식하고, 자발적으로 다이어그램을 그리고 사용하려고 해야 한다. 또, 실제로 유용한 다이어그램을 그릴 수 있는 능력이 있어야 한다. 그러나 학생들은 적절한 다이어그램을 선택하기 어려워하고, 다이어그램을 사용하여 추론을 하지 못하고, 다이어그램을 자발적으로 사용하지 않는다(Uesaka & Manalo, 2006; Uesaka, Manalo, & Ichikawa, 2007). 학생들은 다이어그램을 사용하는 것이 상당한 인지적인 비용을 치르는 부담을 수반한다고 생각하여, 즉 시간과 노력이 투입되는 것에 비해 원하는 결과를 얻을 수 있을지는 불확실하다고 생각하여, 다이어그램을 사용하는 것을 꺼려하기도 한다.

연구자들은 다이어그램과 관련된 학생들의 어려움의 한 원인으로, 학습 지도 방식을 거론해 왔다. Manalo, Uesaka, Pérez-Kriz, Kato와 Fukaya(2013)는 다이어그램 사용과 관련하여 학생들이 경험하는 어려움이 언어적 응답이나 설명을 강조하는 교육 문화와 관련 있을 가능성을 제기하였다. Pantziara, Gagatsis와 Elia(2009)도 아동들이 다이어그램을 통해서 문제의 구조를 보지 못하는 현상의 원인으로 다이어그램 사용에 관한 불충분한 학습 지도를 언급하였다. Diezmann(2005)은 3학년 아동과 5학년 아동의 다이어그램에 대한 지식을 비교하였는데, 둘 사이에 의미 있는 차이가 나타나지 않았다. 그는 이러한 결과를 바탕으로, 다이어그램 사용에 관하여 명시적인 학습 지도가 필요하다고 주장하였다. 윤자영(2017)은 일반 학생과 초등 수학 영재 학생들의 시각적 표현의 특징을 비교하였는데, 두 집단 간에 의미 있는 차이가 발견되지 않았다. 이것은 수학적으로 우수한 아동들이라고 해서 다이어그램을 사용하는 능력이 우수한 것은 아니므로 이들에게도 의식적인 학습 지도가 필요함을 시사한다.

다이어그램 학습 지도의 목표는 크게 세 가지로 볼 수 있다. 첫째, 학생들이 다이어그램의 유용성을 인식하게 하는 것으로, 이 목표가 달성되면 학생들은 다이어그램이 사용할 만한 가치가 있다고 생각하게 된다. 둘째, 다이어그램을 그리는 기능을 길러 주는 것으로, 이 목표가 달성되면 학생들은 지나친 어려움 없이 문제 해결에 필요한 다이어그램을 그릴 수 있게 된다. 셋째로, 다이어그램 사용의 자발성을 길러주는 것으로, 이 목표가 달성되면

학생들은 외부로부터의 지시나 권고 없이도 다이어그램을 기꺼이 사용하려는 마음을 갖게 된다. 연구자들은 이와 같은 목표들을 달성하기 위한 학습 지도 방안을 다양하게 탐색하여 왔다. Van Garderen(2007)은 문제 읽기, 시각화하기, 계획하기, 계산하기, 검산하기의 시각적 표현을 강조한 5단계 문제 해결과정을 제시하였다. 최경아(2013)는 이를 바탕으로 전개 단계에서 문제를 읽은 후 시각화하기, 정리 단계에서 수업에 활용한 시각적 표현을 의식하고 반성하기, 발전 단계에서 유사한 문제에 시각적 표현을 적용하기와 같이, 시각적 문제 해결을 강조하는 수업 모형을 고안하였다. 문제 읽기에 뒤이은 시각화하기와 같이 시각적 표현을 강조하는 수업은 학생들의 수학 학습 태도에 긍정적인 변화를 가져올 수 있다(강창욱, 2013). 김소희, 이광호, 구미영(2013)도 문제 읽기와 식 세우기 사이에 시각적 표현하기 활동을 추가한 교수 실험을 하여, 학생들의 성급하게 식을 세우려는 경향과 식 세우기에 대한 의존을 줄일 수 있음을 보고하였다.

다이어그램을 문제 해결의 어느 단계에서 어떻게 도입, 강조할 것인가에 대하여는 연구자들 사이에 다양한 의견이 있다. 이소정(2014)은 학생들이 사용하는 주된 전략이 식 세우기라는 점을 고려하여 처음에 식을 세워 문제를 해결하도록 둔 후에, 식을 세우는 데 어려움을 겪는 학생들이 문제 해결을 위한 다른 해결 전략을 탐색하는 중간 단계에서 다이어그램을 활용하도록 교사가 명시적으로 안내하는 문제 해결 모형을 제안하였다. Pantziara, Gagatsis와 Elia(2009)도 다이어그램이 제시되지 않은 문제를 먼저 풀게 하고, 학생들이 자신들의 해결 방법으로 문제를 해결하지 못하여 어려움을 겪을 때 다이어그램이 제시된 문제를 제공하는 방안을 제안하였다. 이소정의 모형과 Pantziara, Gagatsis와 Elia가 제안한 방안은 학생들의 초기 문제 해결 시도가 어려움에 직면한 후에 다이어그램 관련 활동을 명시적으로 도입한다는 공통점이 있다. 한편, Uesaka와 Manalo(2006)는 문제 해결에 뒤따른 리뷰 활동과 다이어그램을 능동적으로 비교하는 활동을 하게 하였을 때, 학생들이 수학 문장제 해결에 적절한 다이어그램을 선택하거나 그리는 능력이 신장되었다고 보고하였다. 이것은, 초기의 문제 이해 및 계획 수립 단계뿐 아니라, 나중의 반성 단계에서의 다이어그램 관련 활동도 다이어그램의 사용 능력 향상에 도움이 됨을 시사한다.

2. 교사의 다이어그램에 대한 관념과 실행

학생들의 다이어그램 사용은 교사의 다이어그램에 대한 관념 및 수업에서의 실행과 밀접한 관련이 있다. Uesaka, Manalo와 Ichikawa(2007)가 일본과 뉴질랜드의 13-15세 학생들을 비교 조사한 바에 의하면, 일본 학생들은 뉴질랜드 학생들보다 다이어그램 사용을 어려운 것으로 인식하고 있었고 자신감도 적었다. 또한 다이어그램을 자기 자신의 전략으로 여기기보다 교사의 전략으로 보는 경향이 있었다. 이것은 일본 교사들의 다이어그램 사용이 시범에 그치는 경우가 많고, 학생들이 스스로 다이어그램을 사용할 경험을 할 기회를 그다지 제공하지 않았음을 시사한다. 한편, Cai와 Lester(2005)는 미국과 중국의 6학년 학생들이 문제 해결에서 선호하는 표현의 유형에 차이가 있음을 발견하였다. 중국 학생들은 기호적 표현을 선호한 데 비하여, 미국 학생들은 상대적으로 시각적, 언어적 표현을 선호하였다. Cai와 Lester는 교사들이 사용하는 표현이 학생들의 학습에 영향을 미쳤을 가능성을 염두에 두고 미국과 중국의 6학년 교사들이 수업에서 사용하는 표현을 조사하여, 중국의 교사들은 기호적 표현을 주로 사용하고 미국의 교사들은 언어적 표현이나 시각적 표현에 많이 의존함을 확인하였다. 이러한 연구 결과는 교사의 표현에 대한 관념이나 수업 실행이 학생들에게 영향을 미친다는 것을 보여준다. 다이어그램에 관하여 진술한다면, 교사

가 다이어그램에 대해 어떤 관념을 가지고 수업에서 어떻게 하는지가 학생들의 다이어그램 사용에 큰 영향을 미친다고 할 수 있다.

Stylianou(2010)는 미국의 중학교 교사들의 표현에 대한 관념을 인터뷰를 통해 조사하였다. 그 결과 미국의 중학교 교사들은 기호적 표현을 여러 표현의 하나가 아니라 수학적 개념 그 자체와 동일시하였고, 시각적 표현을 비롯한 다른 표현들은 부차적인 것으로 여겼다. 또한 시각적 표현을 수업에서 강조하는 것은 그럴 듯해 보이지만 비현실적이고, 우수한 학생들에게는 몰라도 그 외의 학생들에게는 어렵고 부담만 가중시킬 것이라는 관념을 가지고 있었다. 이와 같은 관념에서 예상할 수 있듯이, 이 교사들은 수업에서 시각적 표현을 수학을 이해하는 유용한 도구로 사용하지 않았다. Stylianou는 이같은 결과가 교원양성대학의 교수진에게 도전을 안겨 주는 것이라고 하면서, 교원양성대학의 교육프로그램에서 표현에 대한 교사들의 신념을 넓히고 표현을 수업에서 잘 사용할 수 있도록 준비시켜 줄 필요가 있다고 주장하였다.

교사들이 수학 수업에서 다이어그램을 어떻게 사용하는지는 그다지 연구되어 있지 않다. Rasmussen과 Marrongelle(2006)는 대학의 수학 강좌에서 교수자의 교수내용도구(Pedagogical content tools) 사용의 특징을 분석하였다. 교수내용도구는 교사가 학생의 사고와 연결하기 위해 의도적으로 사용하는 그래프, 방정식, 언어적 진술과 같은 고안물을 뜻한다. 이들의 연구가 다이어그램에 직접 초점을 맞추고 있지는 않지만, 교수자의 다이어그램 사용의 특징과도 관련되어 있다. 이들은 교수자가 교수내용도구를 사용하는 두 가지 방식을 추출하였다. 첫째는 변형되는 기록(Transformational records) 도구로 사용하는 것이다. 예를 들어, 교수자는 그래프를 학생들의 사고를 기록하는 도구로 도입한다. 이렇게 도입된 그래프는 이후 학생들이 과제를 수행하면서 더 복잡하거나 다른 수학적인 아이디어를 추론해 나갈 때 그것을 기록하는 수단으로 사용되며, 이 과정에서 기록 수단이 정교화, 변형되어 간다. 둘째는 생성하는 대안물(Generative alternatives)로 사용하는 것이다. 예를 들어 학생들이 문제 상황과 관련된 몇 가지 그래프를 제안하였을 때, 교수자가 대안적인 그래프를 추가로 제안하여, 학생들이 다양한 가능성들에 대해 생각하게 하고 특정한 그래프가 타당하다고 생각한다면 왜 그것이 타당한지 사회적으로 인정될 수 있는 정당화를 생성하게 하는 것이다. 이와 같은 두 가지 사용 방식은 대학의 미분방정식 강좌에서 대학 교수의 강의를 관찰 분석하여 얻은 것이지만, 초등학교의 수학 수업에서도 발견될 가능성이 있다. 초등학교의 수학 수업에서 교사가 다이어그램을 어떻게 사용하는지에 대한 연구가 이루어질 필요가 있고, 이를 통해 이와 같은 두 가지 방식이 초등학교의 수학 수업에서도 작동하고 있는지, 나아가 초등 수학 수업에서 나타나는 고유한 다른 방식은 없는지 밝혀질 수 있을 것이다.

예비교사들을 대상으로 한 다이어그램 관련 연구도 소수에 불과하다. Lo와 Luo(2012)는 타이완의 초등예비교사들이 방법론 코스에 입문하는 시점에서 분수 나눗셈에 대한 지식을 조사하였다. 연구 결과, 초등예비교사들은 분수 나눗셈 계산 문제를 잘 해결하였지만, 적절한 문장제나 다이어그램을 잘 생성하지는 못하였다. Lo와 Luo는 이 결과를, Ball, Thames와 Phelps(2008)의 교수내용지식에 관한 틀을 원용하여, 타이완의 초등예비교사들이 일반내용지식에서는 강하지만, 전문내용지식(Specialized Content Knowledge)에서는 그렇지 않다고 해석하였다. 문제 해결에 적절한 다이어그램을 그리는 데 필요한 지식이 교사의 전문내용지식에 속하는 것이라면, 교원양성대학의 프로그램은 예비교사들에게 이러한 지식을 갖추고 장차 수학 학습 지도시 다이어그램을 적절히 사용할 수 있는 기본적인 역량을 갖추기 기회를 제공해야 할 것이다. 현재 교원양성 프로그램이 이것에 어느 정도 성공적

이며 어떤 면에서 개선할 여지가 있는지 확인할 필요가 있으며, 그 기초 작업으로, 예비교사들이 다이어그램에 대한 어떤 관념과 경험을 지니고 예비교사 교육프로그램에 들어오는 지 그 실태를 파악할 필요가 있다.

Ⅲ. 수학교육 프로그램 입문기 초등예비교사들의 다이어그램에 대한 관념

1. 자료 수집

초등예비교사들이 다이어그램에 대한 어떤 관념과 경험을 가지고 교육대학교의 수학교육 프로그램에 입문하는지 알아보고자, Uesaka, Manalo와 Ichikawa(2007)의 연구를 참고로, 선행 연구에서 이슈가 되고 있는 사안들을 반영하여 설문지를 개발하였다. Uesaka, Manalo와 Ichikawa는 일본과 뉴질랜드 학생들을 대상으로, 일상의 학습 행동, 다이어그램의 유용성에 대한 견해, 다이어그램 사용의 어려움에 대한 인식, 교사의 행동에 대한 인식을 설문 조사하고 그 결과를 문항별로 비교하였다. 이 연구에서는 조사 대상이 일반 학생이 아닌 예비교사임을 고려하여, 다이어그램 사용 현황, 다이어그램의 유용성에 대한 인식, 학교에서의 다이어그램 학습 경험, 다이어그램 교육 의지의 네 개 영역으로 나누어, 수학교육전문가 3명과 협의하여 문항을 개발하였다. 각 문항은 리커트 5점 척도로 응답하게 구성하였다.

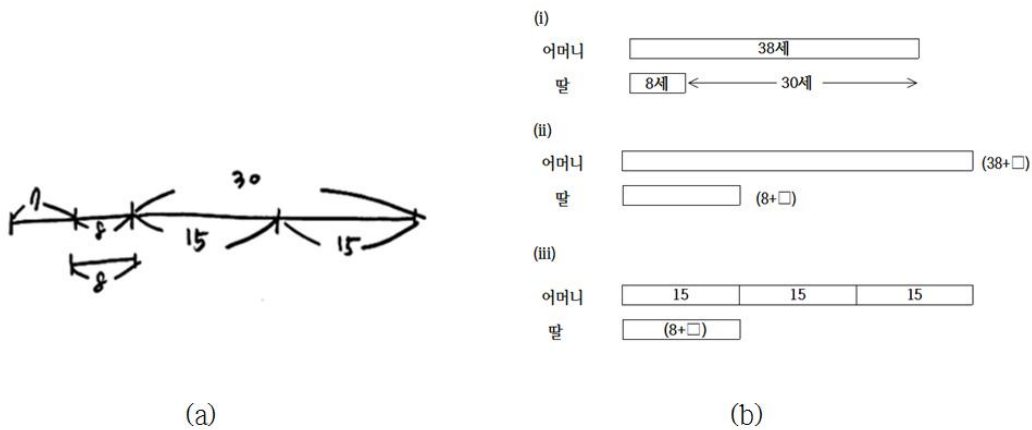
다이어그램 사용 현황 영역에는 문장제 해결 도구로서 다이어그램 사용, 의사소통(설명) 도구로서 다이어그램 사용, 다이어그램을 그리는 자신의 능력에 대한 인식을 묻는 3문항이 있다. 다이어그램의 유용성 인식 영역은 문장제 구조 이해, 풀이 방법 발견, 의사소통 도구로서의 유용성에 대한 3문항과 투입되는 자원 대비 유용성, 식 세우기와 비교한 유용성에 대한 2문항으로 이루어졌다. 학교에서의 다이어그램 학습 경험 영역은 교사들의 다이어그램 사용, 다이어그램 사용 방법 학습 경험, 문장제 해결시 다이어그램 사용을 격려 받은 경험, 의사소통시 다이어그램 사용을 격려받은 경험에 대한 4문항으로 이루어졌다. 다이어그램 교육 의지 영역은 미래의 교사로서 문장제 풀이 방법 설명시 다이어그램 사용, 문장제 해결 도구로서 다이어그램 학습 지도, 의사소통 도구로서 다이어그램 학습 지도 의지에 대한 3문항과 다이어그램 학습 지도의 어려움 인식에 대한 1문항으로 이루어졌다. 조사에 사용된 영역별 문항은 <표1>과 같다.

<표 1> 초등예비교사의 다이어그램에 대한 관념 및 경험 설문 조사 영역 및 문항

영역	문항
다이어그램 사용 현황	나는 수학 문장제를 풀 때 대개 다이어그램을 그린다.
(3문항)	나는 수학 문장제 풀이를 다른 사람에게 설명할 때 대개 다이어그램을 사용한다.
	나는 수학 문장제를 푸는 데 유용한 다이어그램을 그릴 수 있다.

	다이어그램은 수학 문장제의 구조를 이해하는 데 유용하다.
다이어그램의 유용성 인식 (5문항)	다이어그램은 수학 문장제 풀이 방법을 찾아내는 데 유용하다.
	다이어그램은 수학 문장제 풀이를 다른 사람에게 설명하는 데 유용하다.
학교에서의 다이어그램 학습 경험 (4문항)	다이어그램을 그려서 수학 문장제를 푸는 것은, 들어가는 시간과 노력에 비해 얻는 것이 적다.
	식 세우기가 다이어그램 그리기보다 수학 문장제를 푸는 수준 높은 방법이다.
	나의 선생님들은 수학 문장제 풀이 방법을 설명할 때 다이어그램을 사용하였다.
다이어그램 교육 의지 (4문항)	나의 선생님들은 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 효과적으로 사용하는 방법을 가르쳐 주셨다.
	나의 선생님들은 내가 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 그리도록 격려했다.
	나의 선생님들은 내가 수학 문장제 푼 것을 다른 사람에게 설명할 때 다이어그램을 사용하도록 격려했다.
	나는 교사가 되면, 수학 문장제 푸는 방법을 가르칠 때 다이어그램을 사용할 것이다.
다이어그램 교육 의지 (4문항)	나는 교사가 되면, 아동들이 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 그리도록 지도할 것이다.
	나는 교사가 되면, 아동들이 자신들의 수학 문장제 풀이를 설명할 때 다이어그램을 사용하도록 지도할 것이다.
	수학 문장제를 다이어그램을 그려서 풀도록 아동들을 지도하는 것은 어려운 일이다.

개발한 설문지를 사용하여 ○○교육대학교의 수학과교육론1 강좌 수강생 173명을 대상으로 강좌 초기(3~4주차)에 조사를 실시하였다. 이것은 조사의 목적이 수학교육 프로그램 입문기의 초등예비교사들의 다이어그램에 대한 관념과 경험을 알아보는 데 있기 때문이다²⁾.



[그림 2] 문장제 해결에 사용된 다이어그램의 예 ((a) 윤자영, 2017, 54쪽; (b) 정동권, 김수미, 김지원, 2010, 214쪽)

2) ○○교육대학교에서 초등예비교사들은 2학년에서 수학과교육론1을 수강하고, 3학년에서 수학과교육론2를 수강한다.

문장제와 다이어그램의 뜻을 모르는 초등예비교사들이 있을 수 있음을 고려하여 조사에 앞서 “어머니는 38살이고 딸은 8살이다. 몇 년 후에 어머니의 나이가 딸의 나이의 3배가 될지 구하십시오.”라는 문제와 [그림 2]의 예시를 사용하여 문장제와 다이어그램의 뜻을 간단히 제시하고, 실물 묘사 그림과 같은 정경도는 수학적 다이어그램이 아님을 언급하였다.

2. 결과

수학교육 프로그램 입문기의 초등예비교사의 다이어그램에 대한 관념과 경험을 조사한 결과는 <표 2>에서 <표 5>와 같다. 먼저 다이어그램 사용 현황 영역을 보면, “나는 수학 문장제를 풀 때 대개 다이어그램을 그린다”의 평균이 2.49로 부정적으로 나타났다. 아닌 편 또는 아니다로 답한 초등예비교사가 52%로 전체의 절반을 넘었고, 그런 편 또는 그렇다고 답한 비율은 합하여 전체의 $\frac{1}{5}$ 밖에 되지 않았다. 이것은 다수의 초등예비교사가 다이어그램을 자신의 문제 해결 수단으로 자발적으로 사용하고 있지 않음을 시사한다.

<표 2> 초등예비교사의 다이어그램 사용 현황

문항	척도					평균
	아니다 1	아닌편 2	중간 3	그런편 4	그렇다 5	
나는 수학 문장제를 풀 때 대개 다이어그램을 그린다.	39 (23%)	50 (29%)	49 (28%)	31 (18%)	4 (2%)	2.49
나는 수학 문장제 풀이를 다른 사람에게 설명할 때 대개 다이어그램을 사용한다.	26 (15%)	34 (20%)	35 (20%)	67 (39%)	11 (6%)	3.02
나는 수학 문장제를 푸는 데 유용한 다이어그램을 그릴 수 있다.	18 (10%)	28 (16%)	66 (38%)	48 (28%)	12 (7%)	3.03

“나는 수학 문장제 풀이를 다른 사람에게 설명할 때 대개 다이어그램을 사용한다”의 평균은 3.02로, 중립적이었다. 개인적으로 문제를 풀 때 다이어그램을 사용한다는 응답보다 다른 사람에게 설명할 때 다이어그램을 사용한다는 응답이 높게 나타난 것은, 의사소통 상황이 개인적인 문제 해결 상황에 비해 자발적인 다이어그램 사용을 촉진한다는 Uesaka와 Manalo(2014)의 연구 결과와 통하는 것으로 보인다. “나는 수학 문장제를 푸는 데 유용한 다이어그램을 그릴 수 있다”의 평균은 3.03으로, 초등예비교사들은 유용한 다이어그램을 그릴 수 있는 자신의 능력에 대해 그다지 자신감을 가지고 있지 않았다. 초등예비교사들이 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 별로 사용하지 않고 유용한 다이어그램을 그릴 수 있다는 자신감도 강하지 않다는 것은, 이들이 이대로 교사가 된다면 자신들의 수업에서 다이어그램을 그다지 적극적으로 사용하지 않을 개연성이 높음을 시사한다. 자신이 잘 사용하지 않고 자신감도 없는 것을 자신의 수업에서 중시하며 적극 사용하기를 기대하기는 어렵기 때문이다.

둘째로, 초등예비교사들은 다이어그램의 유용성에 대해 긍정적인 인식을 가지고 있는 것으로 나타났다(<표 3>). “다이어그램은 수학 문장제의 구조를 이해하는 데 유용하다”와 “다이어그램은 수학 문장제 풀이를 다른 사람에게 설명하는 데 유용하다”의 평균이

각각 4.05, 4.13이었다. 전체 설문 문항 16개 중 4점대의 평균이 나온 것은 이 두 문항뿐이다. “다이어그램은 수학 문장제 풀이 방법을 찾아내는 데 유용하다”의 평균도 3.86으로 높게 나타났다. “다이어그램을 그려서 수학 문장제를 푸는 것은, 들어가는 시간과 노력에 비해 얻는 것이 적다”는 부정형 문항에 대한 응답도 평균 2.60으로, 초등예비교사들은 다이어그램이 시간과 노력을 들여 시도할 가치가 있다고 여기는 것으로 나타났다. 식 세우기와 견준 다이어그램의 유용성에 관한 부정형 문항인 “식 세우기가 다이어그램 그리기보다 수학 문장제를 푸는 수준 높은 방법이다”의 평균은 2.86으로, 식 세우기가 다이어그램보다 수준 높은 문제 해결 전략이라고 생각하지는 않는 것으로 나타났다.

<표 3> 초등예비교사의 다이어그램 유용성 인식

문항	척도					평균
	아니다	아닌편	중간	그런편	그렇다	
	1	2	3	4	5	
다이어그램은 수학 문장제의 구조를 이해하는 데 유용하다.	2 (1%)	8 (5%)	22 (13%)	88 (51%)	53 (31%)	4.05
다이어그램은 수학 문장제 풀이 방법을 찾아내는 데 유용하다.	2 (1%)	9 (5%)	40 (23%)	83 (48%)	39 (23%)	3.86
다이어그램은 수학 문장제 풀이를 다른 사람에게 설명하는 데 유용하다.	3 (2%)	5 (3%)	19 (11%)	85 (49%)	61 (35%)	4.13
다이어그램을 그려서 수학 문장제를 푸는 것은, 들어가는 시간과 노력에 비해 얻는 것이 적다.	22 (13%)	68 (39%)	47 (27%)	30 (17%)	6 (3%)	2.60
식 세우기가 다이어그램 그리기보다 수학 문장제를 푸는 수준 높은 방법이다.	13 (8%)	54 (31%)	62 (36%)	33 (19%)	11 (6%)	2.86

초등예비교사들이 식 세우기를 다이어그램보다 수준 높은 전략으로 생각하지 않는다는 것은 주목할 만하다. Stylianou(2010)의 연구에서 미국의 중학교 교사들은 기호적 표현을 중시하고 시각적 표현은 덜 중요한 부차적인 것으로 여기고 있었는데, 우리나라의 초등예비교사들은 그와는 다른 인식을 가지고 있는 것으로 보인다. 이러한 차이는 국가의 차이, 초등과 중등의 차이, 또는 그 외 다른 차이에 기인하는 것일 수 있다. 이를 밝히기 위해서는 별도의 연구가 필요하다.

한편, 초등예비교사들의 다이어그램 사용 현황과 다이어그램 유용성 인식을 같이 보면, 상충하는 듯한 점이 보인다. 다이어그램이 시간과 노력을 들여서 시도해 볼 만한 가치가 있고, 수학 문장제의 구조를 이해하고 해결 방법을 찾는 데 도움이 되며, 식 세우기에 비해 수준 낮은 방법이 아니라고 믿고 있다면, 자신들이 실제 수학 문장제를 해결할 때 그와 같이 유용하다고 믿는 다이어그램을 자발적으로 사용할 것을 기대할 수 있다. 그러나 초등예비교사들은 다이어그램을 자신들이 수학 문장제를 해결할 때에 그다지 적극적으로 사용하지 않는 것으로 나타났다. 이것은 다이어그램의 유용성에 대한 초등예비교사들의 긍정적 신념이 삶에서의 실천으로 연결되지 못하고 있음을 시사한다.

셋째로, 학교에서의 다이어그램 학습 경험은 부정적인 것으로 나타났다(<표 4>). 네 문항 모두 평균이 2점대로 낮았다. “나의 선생님들은 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 효과

적으로 사용하는 방법을 가르쳐 주셨다”, “나의 선생님들은 내가 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 그리도록 격려했다”, “나의 선생님들은 내가 수학 문장제 풀 것을 다른 사람에게 설명할 때 다이어그램을 사용하도록 격려했다”는 세 문항의 평균이 2.36에서 2.48 사이로, 전체 설문 문항 중에서 가장 부정적으로 나타났다.

<표 4> 초등예비교사의 다이어그램 학습 경험

문항	척도					평균
	아니다 1	아닌편 2	중간 3	그런편 4	그렇다 5	
나의 선생님들은 수학 문장제 풀이 방법을 설명할 때 다이어그램을 사용하였다.	18 (10%)	48 (28%)	49 (28%)	50 (29%)	8 (5%)	2.90
나의 선생님들은 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 효과적으로 사용하는 방법을 가르쳐 주셨다.	38 (22%)	58 (34%)	36 (21%)	38 (22%)	3 (2%)	2.48
나의 선생님들은 내가 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 그리도록 격려했다.	33 (19%)	65 (38%)	42 (24%)	28 (16%)	5 (3%)	2.46
나의 선생님들은 내가 수학 문장제 풀 것을 다른 사람에게 설명할 때 다이어그램을 사용하도록 격려했다.	40 (23%)	58 (34%)	49 (28%)	24 (14%)	2 (1%)	2.36

“나의 선생님들은 수학 문장제 풀이 방법을 설명할 때 다이어그램을 사용하였다”는 문항의 평균은 2.9로 다른 세 문항에 비해 상대적으로 높았다. 교사들이 수학 문장제를 푸는 방법을 학생들에게 설명할 때 다이어그램 사용을 시범하더라도, 교사의 시범을 보는 것만으로 학생들이 다이어그램을 그리는 능력을 길러 자발적으로 사용하게 되기는 어려울 것이다.

학교에서의 다이어그램 학습 경험에 대한 조사 결과는 초등예비교사들이 다이어그램의 유용성을 인정함에 불구하고 다이어그램을 스스로 그다지 사용하지 않는, 신념과 실제가 분리되는 현상의 한 원인을 시사한다. 초등예비교사들은 교육대학교에 들어오기 전에 학교에서 수학을 학습하면서 다이어그램을 사용해본 경험이 적고, 다이어그램을 효과적으로 사용하는 방법을 배우지 못했고, 다이어그램을 사용하도록 격려를 받은 경험도 적다. 이런 경험 속에서, 비록 다이어그램의 유용성은 인정한다 하더라도, 다이어그램을 자발적으로 사용하지 않고 유용한 다이어그램을 그리는 자신의 능력에 대한 자신감도 갖지 못하게 되었을 수 있다.

넷째로, 미래의 교사로서 다이어그램 교육 의지 영역에 대한 응답은 긍정적으로 나타났다(<표 5>). “나는 교사가 되면, 수학 문장제 푸는 방법을 가르칠 때 다이어그램을 사용할 것이다”의 평균은 3.77, “나는 교사가 되면, 아동들이 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 그리도록 지도할 것이다”의 평균은 3.61, “나는 교사가 되면, 아동들이 자신들의 수학 문장제 풀이를 설명할 때 다이어그램을 사용하도록 지도할 것이다”의 평균이 3.61로, 모두 긍정적으로 나타났다.

<표 5> 초등예비교사의 다이어그램 교육 의지

문항	척도					평균
	아니다 1	아닌편 2	중간 3	그런편 4	그렇다 5	
나는 교사가 되면, 수학 문장제 푸는 방법을 가르칠 때 다이어그램을 사용할 것이다.	4 (2%)	8 (5%)	44 (25%)	84 (49%)	33 (19%)	3.77
나는 교사가 되면, 아동들이 수학 문장제를 풀 때 다이어그램을 그리도록 지도할 것이다.	5 (3%)	11 (6%)	56 (32%)	76 (44%)	25 (14%)	3.61
나는 교사가 되면, 아동들이 자신들의 수학 문장제 풀이를 설명할 때 다이어그램을 사용하도록 지도할 것이다.	3 (2%)	12 (7%)	59 (34%)	75 (43%)	24 (14%)	3.61
수학 문장제를 다이어그램을 그려서 풀도록 아동들을 지도하는 것은 어려운 일이다.	19 (11%)	58 (34%)	55 (32%)	37 (21%)	4 (2%)	2.71

“수학 문장제를 다이어그램을 그려서 풀도록 아동들을 지도하는 것은 어려운 일이다”라는 문항에 대한 응답의 평균이 2.77로 낮게 나타났는데, 이것은 다이어그램 학습 지도를 별로 어렵지 않다고 생각하는 초등예비교사들이 많다는 것을 뜻한다. 어려운 일이 아니다(아닌 편 또는 아니다)라고 응답한 초등예비교사가(45%) 어려운 일이다(그런 편 또는 그렇다)라고 응답한 초등예비교사(23%)의 약 두 배이다. 이러한 자신감은 다이어그램 교육을 생각할 때 그다지 바람직한 것으로 보이지 않는다. 다이어그램에 대해 부족한 학습 경험을 가지고 자발적으로 다이어그램을 사용하지도 않으면서 다이어그램 학습 지도가 어렵지 않다고 생각하는 것은, 자신이 갖추지 못한 것을 다른 사람이 갖추게 하는 것은 쉽다고 여기는 이율배반적인 것이다. 교원양성대학의 예비교사 교육프로그램에서 이와 같은 관념을 수정할 기회를 제공할 필요가 있다.

전체 조사 결과를 요약하면, 수학교육 프로그램 입문기의 많은 초등예비교사들이 다음과 같은 관념을 가지고 있는 것으로 보인다: “나는 다이어그램에 관해 배운 경험이 별로 없고, 다이어그램을 별로 사용하지도 않는다. 그러나 다이어그램의 가치를 인정하며, 교사가 되면 수학 문장제 학습 지도시 다이어그램을 적극적으로 사용하고 권장할 것이다. 다이어그램 학습 지도는 별로 어려운 일이 아니다.”

IV. 수학교육 프로그램 입문기의 초등예비교사들이 그린 다이어그램

1. 자료 수집 및 분석

수학교육 프로그램에 입문하는 초등예비교사들이 그리는 다이어그램의 특징을 알아보기로 하자, ○○교육대학교의 수학과교육론1 강좌의 수강생 70명에게 다음 두 문항을 제시하고 풀게 하였다. 문제에 주어진 상황만 나타낸 그림을 그리거나 계산으로 얻은 결과로서의 답만 단순히 그림으로 나타내지 않도록, 문제의 해결 과정을 보여 주는 다이어그램을 그

려서 문제를 해결하도록 요청하였다.

문제의 해결 과정을 보여주는 다이어그램을 그려, 다음 문제를 해결하시오.

(문제 1) 피자가 $\frac{3}{4}$ 판 남아 있습니다. 나연이는 남아 있는 피자의 $\frac{2}{5}$ 를 먹었습니다.

나연이가 먹은 피자는 몇 판입니까?

(문제 2) 닭과 돼지의 머리의 수를 합치면 50개입니다. 닭의 다리와 돼지의 다리수를 모두 합치면 132개입니다. 닭과 돼지는 각각 몇 마리입니까?

(문제 1)은 정형적인 분수 곱셈 문장제이다. (문제 2)는 중학교에서는 방정식 활용 문제이지만, 초등학교 5, 6학년 수학의 문제 해결 단원에서 다루어졌던 유형의 문제이다(교육인적자원부, 2004a, 2004b; 권석일, 임재훈, 2007). 이 문제는 초등 수학에서 그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기와 같은 문제 해결 전략을 사용하여 풀 수 있는 비정형 문제에 속한다(정동권, 김수미, 김지원, 2010).

학생들이 문제를 풀면서 그린 그림들은 일차적으로 문제의 표면적 특징을 묘사한 화보적 그림인지 문제의 수량적 요소들 사이의 관계를 나타낸 도식적 그림 즉, 다이어그램인지로 분류될 수 있다. 또 학생들이 그린 다이어그램의 적절성은 문제 구조의 양적 질적 요소를 잘 표현했는가로 판단할 수 있다. 각각의 문제 상황에는 다이어그램에 정확하게 표현되어야 하는 본질적인 요소들이 있다. Diezmann(1999)에 의하면, 이와 같은 문제의 본질적인 요소들은 문제 표현을 위한 이론적인 전형(prototype)을 형성하며, 학생들이 그린 다이어그램과 이 전형 사이의 일치도로 학생들의 다이어그램의 수준을 평가할 수 있다. 이러한 관점에서, Diezmann은 구조적인 요소가 정확하게 표현되어 있는 정도에 따라 다이어그램의 수준을 구분할 것을 제안하였다. 이 연구에서 초등예비교사들에게 제시된 과제는 문제의 해결 과정을 보여 주는 다이어그램을 그릴 것을 요구하고 있으므로, 문제의 해결 과정을 표현하고 있는지도 준거로 삼을 수 있다. 이러한 점을 종합적으로 고려하여, 초등예비교사들이 그린 다이어그램의 분류 기준을 다음과 같이 설정하였다.³⁾ (각 수준의 구체적인 사례는 다음 절의 [그림 3] 참고.)

0 수준 -그림 없음

1 수준 -문제에 주어진 수량 관계를 나타내지 못함

2 수준 -문제에 주어진 수량 관계를 나타냄

3 수준 -문제에 주어진 수량 관계와 해를 나타냄

4 수준 -해를 구하는 추론(풀이) 과정을 나타냄⁴⁾

설정된 기준에 따라 연구자와 수학교육전문가 1명이 각각 초등예비교사들이 그린 다이어그램을 평가하였다. 한 예비교사가 복수의 다이어그램을 그린 경우에는 그 중 제일 윗 수준의 것으로 그 예비교사의 수준을 평가하였다. 평가자간 일치도는 92%였으며, 불일치한 경우 각각에 대해 논의를 거쳐 합의, 조정하였다.

3) 1수준에는 수량 관계를 적절히 나타내지 못한 다이어그램뿐 아니라 일부 화보적 표현도 포함된다. 그러므로 여기서 제시한 분류 기준은 다이어그램을 포함한 좀더 넓은 범위에 적용되는 것이지만, 이 논문의 주요 초점이 다이어그램에 있고 일부 화보적 표현을 제외하면 주된 분석 대상이 다이어그램임을 고려하여, 다이어그램 분류 기준이라고 하였다.

4) 3수준의 다이어그램에는 결과로서의 해가, 4수준의 다이어그램에는 해를 구하는 풀이(추론) 과정이 나타나 있다는 차이가 있다.

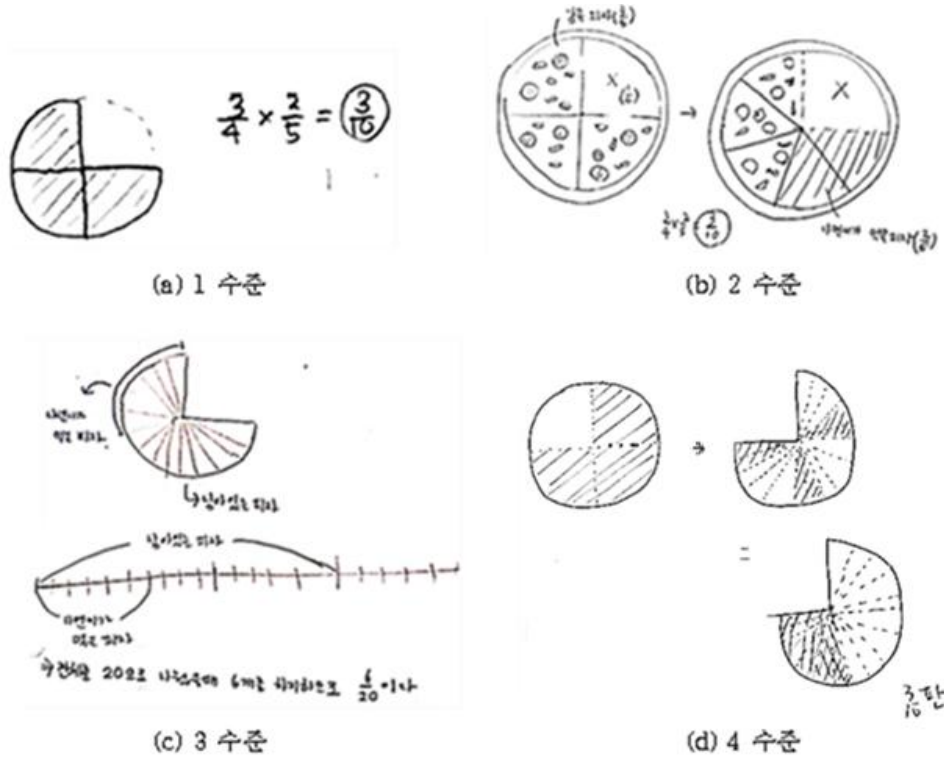
2. 결과

(문제 1)을 풀면서 초등예비교사들이 그린 다이어그램을 분류한 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6> 초등예비교사들의 다이어그램: (문제 1)

수준	명 (비율)
0 그림 없음	2 (3%)
1 문제에 주어진 수량 관계를 나타내지 못함	7 (10%)
2 문제에 주어진 수량 관계를 나타냄	23 (33%)
3 문제에 주어진 수량 관계와 해를 나타냄	17 (24%)
4 해를 구하는 추론 (풀이) 과정을 나타냄	21 (30%)

초등예비교사들이 그린 각 수준의 다이어그램의 사례를 제시하면 [그림 2]와 같다.



[그림 3] (문제 1)의 각 수준 사례

다이어그램을 그리지 않았거나, [그림 3]의 (a), (b)와 같이 피자 $\frac{3}{4}$ 판 또는 피자 $\frac{3}{4}$ 판의 $\frac{2}{5}$ 와 같이 주어진 문제 상황의 일부 또는 전부만을 나타낸 다이어그램을 그린 초등예비교사의 비율이 46%로 절반에 가깝다. [그림 3](c)와 같이 답인 $\frac{6}{20}$ 판을 나타낸 그림을

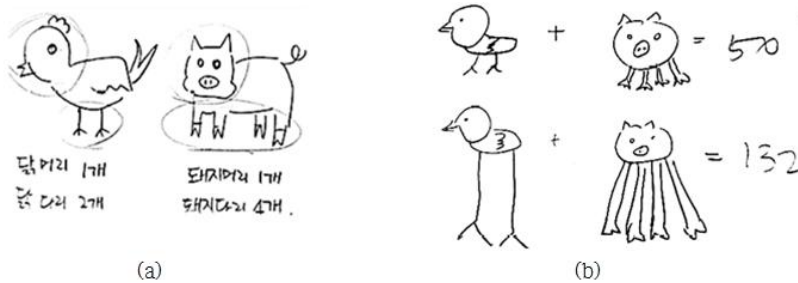
그런 예비교사가 약 24%이고, [그림 3](d)와 같이, $\frac{3}{4}$ 의 $\frac{2}{5}$ 를 구하기 위한 과정, 즉 각각의 $\frac{1}{4}$ 을 5등분하는 일을 반복하여 해인 $\frac{6}{20}$ 을 구하는 과정을 다이어그램에 표현한 예비교사는 30%이다.

(문제 1)의 분수 곱셈은 초등학교 수학의 연산 영역의 중요 기본 내용이지만, (문제 2)는 그렇지 않고 (문제 1)에 비해 비정형적인 성격이 강하다. (문제 2)를 풀면서 초등예비교사들이 그린 다이어그램을 분석한 결과는 <표 7>과 같다. (문제 1)의 결과와 비교할 때, 다이어그램을 그리지 못한 예비교사의 비율이 26%로 높아지고, 해를 구하는 과정을 나타낸 다이어그램을 그린 비율이 낮아진 것을 볼 수 있다.

<표 7> 초등예비교사들의 다이어그램: (문제 2)

수준	명 (비율)
0 그림 없음	18 (26%)
1 문제에 주어진 수량 관계를 나타내지 못함	17 (24%)
2 문제에 주어진 수 2-1 방정식의 계수나 변수를 그림이나 도형으로 대치함	19 (27%)
량 관계를 나타냄 2-2 선분도 등을 이용하여 주어진 수량 관계를 나타냄	9 (13%)
3 문제에 주어진 수량 관계와 해를 나타냄	0 (0%)
4 해를 구하는 추론 (풀이) 과정을 나타냄	7 (10%)

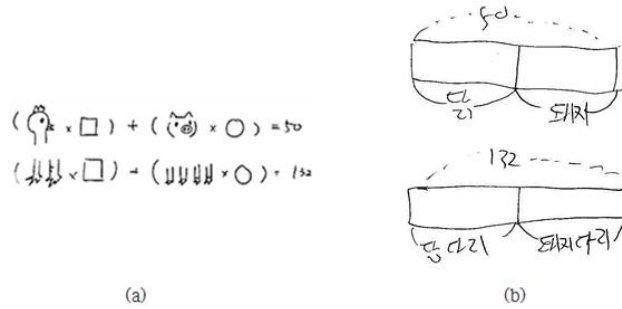
초등예비교사들이 (문제 2)를 풀면서 그린 그림의 사례를 제시하면 [그림 4], [그림 5], [그림 6]과 같다.



[그림 4] (문제 2)의 1수준 사례

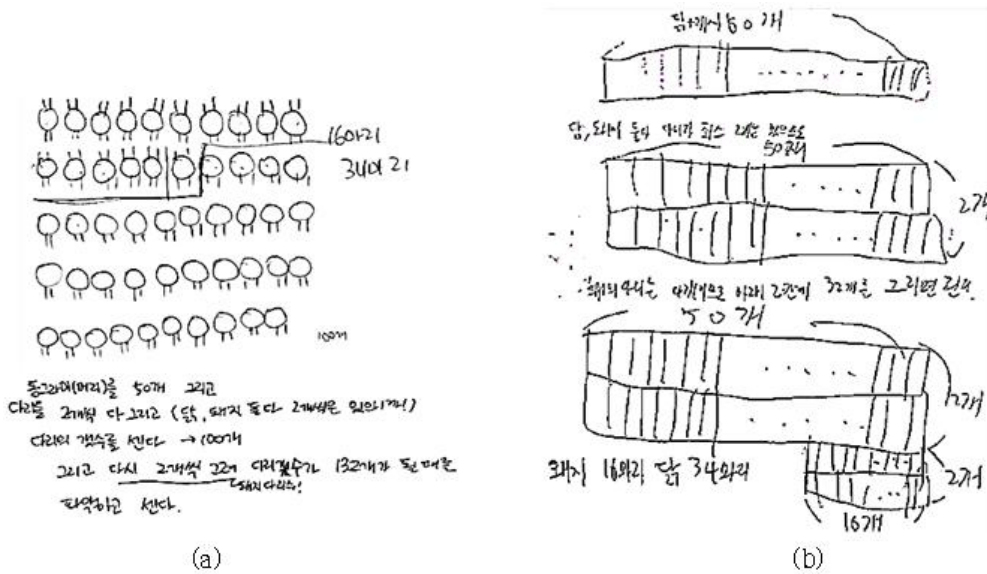
[그림 4](a)는 개별 닭과 돼지의 머리, 다리에 관한 기초적인 정보를 묘사하고 있을 뿐, 문제에 들어 있는 수량 관계나 조건을 나타내고 있지 못하다. [그림 4](b)는 각각 방정식 $x+y=50$, $2x+4y=132$ 를 그림으로 나타내려 시도한 것으로 보이고, 아래 그림이 다리의 수에 관한 문제의 조건을 묘사한 것이라는 점을 다리를 길게 그려 나타내려 한 것으로 보인다.

이와 같이 1 수준에 해당하는 그림을 그린 예비교사가 전체의 약 $\frac{1}{4}$ 이다.



[그림 5] (문제 2)의 2 수준 사례

[그림 5](a)와 같이 방정식에서 계수나 변수를 단순히 닭, 돼지 그림이나 네모 세모로 나타낸 예비교사가 27%이다. [그림 5](b)와 같이 선분도나 띠도 등을 이용해 수량관계를 나타낸 예비교사는 13%이다. 해를 구하는 추론 (풀이) 과정을 나타낸 다이어그램을 그린 예비교사는 10%이다. 이 중 1명은 [그림 6](a)와 같이 닭과 돼지의 머리와 다리만 나타낸 단순화된 그림을 이용한 추론으로 문제를 해결하였고, 6명은 [그림 6](b)와 같이 띠도나 선분도를 사용한 추론으로 문제를 해결하였다.



[그림 6] (문제 2)의 4수준 사례

참고로, 이 문제의 해인 닭의 마리 수 34, 돼지의 마리 수 16을 맞게 구한 예비교사는 전체의 94%인 66명이었다. 이에 비하여, 앞에서 살펴 본 바와 같이, 선분도나 띠도 등을 이용해 문제에 주어진 수량관계를 나타내거나(9명, 13%) 다이어그램을 이용한 추론으로 답을 구한(7명, 10%) 예비교사는 합쳐서 전체의 약 $\frac{1}{4}$ 에 불과하다. 이것은 초등예비교사들이 이와 같은 문제를 다이어그램으로 나타내고 그것을 가지고 추론하여 해결하는 능력이,

식을 세우고 계산하여 답을 구하는 능력에 비해, 부족함을 시사한다.

(문제 1)과 (문제 2)에서 초등예비교사들이 그린 다이어그램을 종합하여 볼 때, 해를 구하는 추론(풀이) 과정을 나타낸 다이어그램을 그린 초등예비교사의 비율이 (문제 1)은 30%, (문제 2)는 10%로 소수였다. 다이어그램을 그리지 못하거나, 문제에 주어진 수량 관계의 일부 또는 전부만 나타내는 다이어그램, 수식 계산으로 구한 결과로서의 해만 나타내는 다이어그램을 그린 초등예비교사들이 많았다. 이러한 결과는 수학교육 프로그램 입문기의 초등예비교사들이 다이어그램을 문제를 해결하는 추론 도구로 사용하는 능력이 부족함을 시사한다.

V. 결 론

현재 교육대학교에 입학하는 학생들은 고등학교에서 상위 10% 내외의 우수한 성적을 가진 학생들이 다수이다. 이들이 고등학교에서 수학을 포함한 거의 모든 과목에서 우수한 학업 성적을 보였다는 것을 근거 삼아, 자연수, 소수, 분수의 계산과 같은 초등학교 수학의 일반내용지식은 잘 갖추고 있을 것이라고 여겨도 큰 무리는 없을 것이다. 그러나 수학 문장제 해결에 유용한 다이어그램을 그리고 그것을 가지고 추론을 전개하여 문제를 해결하는 것은 수나 식의 계산을 잘 하는 것과는 다른 지식과 기능을 필요로 한다. 그러므로 초등예비교사들이 다이어그램에 대한 어떤 관념과 경험, 수행 능력을 가지고 교육대학교의 수학교육 프로그램에 입문하는지 실태를 알아볼 필요가 있다.

수학교육 프로그램에 입문하는 초등예비교사들의 다이어그램에 대한 관념과 경험을 설문 조사한 결과는 긍정적인 측면과 부정적인 측면을 같이 보여준다. 먼저, 긍정적인 측면으로, 초등예비교사들은 다이어그램을 문제 해결과 의사소통에 유용한, 시간과 노력을 투자하여 시도할 가치가 있고, 식에 비해 수준 낮지 않은 것으로 인식하고 있었다. 또, 장차 자신의 수업에서 다이어그램을 사용하고, 아동들이 수학 문장제를 풀거나 풀이를 설명할 때 다이어그램을 그리도록 격려, 지도하겠다는 교육 의지를 지니고 있었다. 이에 비하여, 다이어그램 사용 현황과 학교에서의 다이어그램 학습 경험에서는 부정적인 모습이 나타났다. 초등예비교사들은 다이어그램을 자신의 문제 해결 도구로 자발적으로 사용하지 않으며, 유용한 다이어그램을 그릴 수 있다는 자신감도 별로 없었다. 또 교육대학교에 들어오기 전에 학교에서 수학 문장제 해결에 다이어그램을 사용해본 경험이 적고, 다이어그램을 효과적으로 사용하는 방법을 배우지 못했으며, 교사로부터 다이어그램을 사용하도록 격려를 받은 경험도 적은 것으로 나타났다. 요약하면, 상당수의 초등예비교사들이 다이어그램의 유용성을 인정하고 그 교육 의지를 지니고 있으나, 다이어그램과 관련된 과거의 불충분한 경험 위에 현재 스스로 다이어그램을 별로 사용하지 않는, 신념과 실제가 불일치하는 상태로 수학교육 프로그램에 들어오는 것으로 보인다.

초등예비교사들이 문장제를 해결하면서 그린 다이어그램을 분석한 결과, 문제의 해결 과정을 보여 주는 다이어그램을 그리도록 요청받았음에도 불구하고, 해를 구하는 과정을 나타낸 다이어그램을 그린 초등예비교사는 소수였다. 이것은 상당수의 초등예비교사들이 수학 문장제의 구조를 다이어그램으로 나타내고 그것을 사용하여 추론을 진행하여 해를 구하는 능력, 풀이 과정을 다이어그램으로 나타내는 능력이 부족한 상태로 수학교육 프로그램에 입문하고 있음을 시사한다. 초등예비교사들이 교육대학교의 수학교육 프로그램에

입문하는 시점에서 이미 그 이전의 학습 경험을 바탕으로 다이어그램에 대한 적절한 지식과 기능을 가지고 있다면, 예비교사 교육프로그램에서 다이어그램 관련 역량 신장에 별도의 주의를 기울이지 않아도 될 것이다. 그러나 이 연구의 결과는 우리나라의 초등예비교사들이 수학 문장제 해결에 유용한 다이어그램을 그리고 사용하는 역량이 부족한 상태로 교사교육 프로그램에 들어오고 있음을 보여준다. 그러므로 예비교사 교육프로그램에서 다이어그램과 관련된 지식과 기능을 습득하고 장차 학습 지도시 다이어그램을 적절히 사용할 수 있는 역량을 기를 기회를 제공할 필요성이 제기된다. 향후 이 측면에서 교육대학교의 수학교육 프로그램을 검토하고, 요구되는 변화가 있다면 그 실행 방안을 모색할 필요가 있다.

참고문헌

- 강창욱(2013). **시각적 표현을 강조한 수업이 문제해결력과 수학 학습 태도에 미치는 영향**. 서울교육대학교 석사학위논문.
- 교육인적자원부(2004a). **수학 5-나**. 서울: 대한교과서.
- 교육인적자원부(2004b). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서.
- 권석일, 임재훈(2007). 그림그리기 전략을 통한 초·중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화. **수학교육학연구**, 17(2), 91-109.
- 김소희, 이광호, 구미영(2013). 초등학교 4학년 학생들의 문제 해결 과정에서의 시각적 표현. **초등수학교육**, 16(3), 285-301.
- 김유정, 백석윤(2005). 초등 수학 문제 해결 과정에 사용되는 표현 방법에 대한 연구. **한국초등수학교육학회지**, 9(2), 85-110.
- 김재홍(2010). **다이어그램적 추론으로서의 분석법에 기반한 기하 증명교육 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.
- 윤자영(2017). **초등 수학 영재들의 문제 해결 과정에서 나타난 시각적 표현**. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 이대현, 박배훈(2002). 수학교육에서 시각화와 직관. **수학교육학연구**, 12(1), 71-79.
- 이소정(2014). **다이어그램 활용을 통한 수학 문제해결 과정의 기호학적 분석**. 이화여자대학교 박사학위논문.
- 임재훈(2014). 선형적 지식으로서 곱셈의 교환법칙 교육의 문제. **한국초등수학교육학회지**, 18(1) 1-17.
- 임재훈, 이형숙(2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여 : 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구**, 25(2), 189-206.
- 정동권, 김수미, 김지원(2010). **수학 문제해결 지도의 이해**. 서울: 학지사.
- 최경아(2013). **시각적 표현을 강조한 문제해결지도가 문장제 해결에 미치는 영향 : 초등학교 5학년 중심으로**. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 황현미, 방정숙(2009). 수학 문제 해결과정에서 초등학교 6학년 학생들의 시각적 표현에 관한 연구. **초등수학교육**, 12(2), 81-97.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241.
- Bakker, A., & Hoffmann, M. H. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 333-358.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 399-407.

- Cai, J., & Lester, F. K. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and U.S. classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 221–237.
- Diezmann, C. M. (1999). Assessing diagram quality: Making a difference to representation. In J. M. Truran & K. M. Truran (Eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 185–191), Adelaide: MERGA.
- Diezmann, C. M. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 241–248). Hiroshima, Japan.
- Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 7(3), 4–8.
- Diezmann, C. M. (2005). Assessing primary students' knowledge of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks. In P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonagh, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 289–296). Sydney: MERGA.
- Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 77–89). Reston, VA: NCTM.
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology*, 91(4), 684.
- Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 481–500.
- Manalo, E., Uesaka, Y., Pérez-Kriz, S., Kato, M., & Fukaya, T. (2013). Science and engineering students' use of diagrams during note taking versus explanation. *Educational Studies*, 39(1), 118–123.
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 39–60.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205–235). Rotterdam, Netherlands: Sense.
- Rasmussen, C., & Marrongelle, K. (2006). Pedagogical content tools: Integrating student reasoning and mathematics in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(5), 388–420.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of

-
- strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325–343.
- Uesaka, Y., & Manalo, E. (2006). Active comparison as a means of promoting the development of abstract conditional knowledge and appropriate choice of diagrams in math word problem solving. In D. Barker–Plummer, R. Cox, & N. Swoboda (Eds.), *Diagrams 2006, LNAI 4045* (pp. 181–195). Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag.
- Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. I. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving?. *Learning and Instruction*, 17(3), 322–335.
- Uesaka, Y., & Manalo, E. (2014). How communicative learning situations influence students' use of diagrams: Focusing on spontaneous diagram construction and protocols during explanation. In T. Dwyer, H. Purchase, & A. Delaney (Eds.), *Diagrammatic representation and inference, diagrams 2014, LNAI 8578* (pp. 93–107). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of learning disabilities*, 40(6), 540–553.

<Abstract>

Prospective elementary teachers' preconceptions and experiences of diagrams
in solving math word problems

Yim, Jaehoon⁵⁾

This study involved an investigation of prospective elementary teachers' preconceptions and experiences of diagrams and their ability to draw diagrams in solving math word problems. A questionnaire and two math word problems were administered to prospective elementary teachers who began to taking an introductory mathematics education course. The results from the analysis of their responses to the questionnaire items indicate that prospective elementary teachers appreciate the value of diagrams as tools for problem solving and communication. In addition, prospective elementary teachers have the will not only to teach their future students how to use diagrams but also to encourage them to draw diagrams in solving math word problems. However, the results also indicates that prospective elementary teachers neither use diagrams spontaneously in their math problem solving activities nor have confidence in drawing useful diagrams. Prospective elementary teachers also manifested low scores on the questionnaire items asking whether they were taught how to draw useful diagrams or encouraged by their teachers to use diagrams in their previous learning experiences. The results from the analysis of the diagrams that prospective elementary teachers drew in solving math word problems showed that most of them had difficulty drawing diagrams that represent their reasoning and solving process.

Key words: diagram, visual representation, prospective elementary teacher, teacher education, problem solving

논문접수: 2018. 04. 16

논문심사: 2018. 05. 08

게재확정: 2018. 05. 18

5) jhyim@ginue.ac.kr