한국초등수학교육학회지 22(4) 385-403. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 22(4) 385-403.
2018. 11. 30 November 30. 2018.

# 분수 나눗셈의 통합적 이해를 위한 방편으로서 포함제에서 1÷(제수)를 매개로 하는 방법에 대한 고찰[1)]

임재훈[2)]

분수 나눗셈의 여러 맥락 중 등분제와 카테시안 곱의 역 맥락에서는 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 자연스럽게 유도된다. 그러므로 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 분수 나눗셈의 통합 알고리즘으로 지도하고자 할 때 특히 이슈가 되는 것은 포함제 맥락이다. 이 논문에서는 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하는 방법이 지닌 잠재력 및 그 기반을 분석하고, 이 방법을 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 분수 나눗셈의 통합 알고리즘으로 지도하려 할 때 고려할 수 있는 한 대안으로 제안한다. 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방법은 다음과 같은 특징을 지니고 있다. 첫째, 포함제 맥락에서 맥락과의 연결성을 유지한 채로 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도할 수 있다. 둘째, 다른 맥락들에서와 마찬가지로, 제수와 1의 곱셈적 관계에 주목한다. 셋째, 다른 맥락들에서와 마찬가지로, 제수와 1의 곱셈적 관계를 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 징검다리로 삼는 추론과 제수의 분자를 징검다리로 삼는 두 가지 추론으로 파악한다. 이러한 특징은 이 방법이 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 분수 나눗셈의 공통 구조를 담고 있는 통합 알고리즘으로 다루는 데 기여할 수 있음을 시사한다. 한편, 이 방법은 양분수의 이중적 의미와 배의 합성을 그 기반으로 한다. 분수 나눗셈의 통합적 이해를 지향하는 교재 개발 및 수업 연구에서는 이 기반의 형성에 유의할 필요가 있다.

주제어: 분수 나눗셈, 포함제, 등분제, 카테시안 곱의 역, 제수의 역수 곱하기 알고리즘

## Ⅰ. 서 론

$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}$와 같은 분수의 나눗셈은 피제수와 제수의 분모를 같게 만드는 방법, 피제수와 제수의 역수를 곱하는 방법, 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 나누는 방법과 같이 다양한 방법으로 계산할 수 있다. 이 중에서 피제수와 제수의 역수를 곱하는 방법 (이하 제수의 역수 곱하기 알고리즘)은 다른 방법에 비해 빠르고 간편하게 분수 나눗셈을 계산할 수 있게 해준다는 장점이 있다. 이 방법은 분수 나눗셈의 표준 알고리즘이라고 불리기도 한다(박교식, 2014).

---

1) 이 논문은 2017학년도 경인교육대학교 연구교수 연구비에 의하여 연구된 것임.
2) 경인교육대학교, 교수

나눗셈에는 포함제, 등분제와 같은 서로 다른 맥락이 있다. 아동들은 문제에 묘사된 행위나 관계로 문제를 파악하므로(Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 2005), 아동에게 분수 나눗셈 계산법을 가르칠 때 포함제, 등분제와 같은 맥락 및 그에 내재된 행위나 관계를 고려할 필요가 있다. 신준식(2013)이 지적한 바와 같이, 분수 나눗셈 계산법을 기계적으로 학습하게 하지 않으려면 나눗셈의 맥락과 계산법의 연결이 중요하다.

이 논문의 초점은 제수가 분수인 나눗셈에서 포함제 맥락과 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결에 있다. 2007 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정에 따른 초등 교과서에서는 포함제 맥락에서 통분을 한 후 곱셈의 교환법칙, 분수의 곱셈 방법을 사용한 수식 처리를 통해 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하였다(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015c). 이와 같은 접근법의 대안으로, 배의 측정 공간을 독립된 측정 공간으로 설정하고 두 측정 공간 사이의 함수적 관계로 제수의 역수에 의미를 부여하는 등의 방안이 제안되었다(임재훈, 2016). 그런데 이러한 대안은 정비례 관계를 분수 나눗셈과 유기적으로 연결할 것을 요구한다. 정비례 관계는 2009 개정 교육과정에서는 초등학교 5-6학년군에 있었으나, 2015 개정 교육과정에서 중학교로 이동되었다(교육과학기술부, 2012; 교육부, 2015a). 이러한 사정을 고려하면, 이 방안을 초등학교 수학에서 구현하는 데 다소 불편함이 있다.

이 논문에서는 포함제 맥락에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 다루는 다른 대안을 탐색한다. 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방법이 지닌 잠재력을 분수 나눗셈의 통합적 이해 측면에서 고찰한다. 그리고 현행 교과서의 관련 내용을 분석하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 포함제를 비롯한 분수 나눗셈의 다양한 맥락을 아우르는 통합 알고리즘[3]으로 지도하기 위한 선결 요건을 확인한다. 이 연구는 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 분수 나눗셈의 여러 맥락을 아우르는 통합 알고리즘으로 지도하는 교재 개발 및 수업 연구의 이론적 배경이 될 수 있다.

## Ⅱ. 분수 나눗셈의 맥락과 제수의 역수 곱하기 알고리즘

이 장에서는 분수 나눗셈의 맥락과 계산법, 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 수식에 대하여 고찰한다.

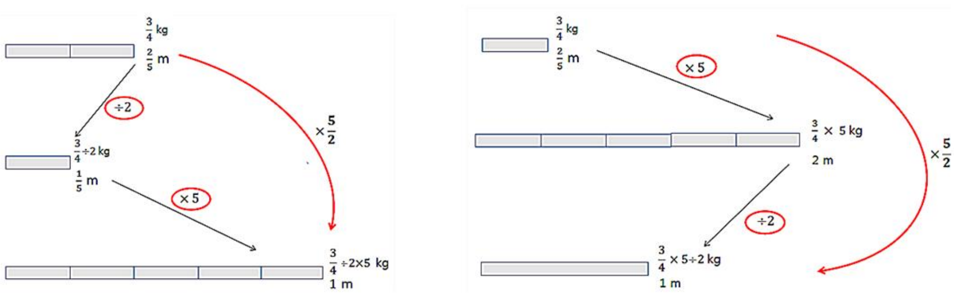
### 1. 분수 나눗셈의 맥락과 계산법

Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)은 분수 나눗셈의 맥락을 등분제(partitive division), 포함제(measurement division), 단위 비율 결정(the determination of a unit rate), 곱셈의 역(the inverse of multiplication), 카테시안 곱의 역(the inverse of a Cartesian product)으로 분류하였다. 이 중에서 등분제와 단위 비율 결정은 모두 제수의 양에 대응하는 피제수의 양이 주어졌을 때 제수 쪽의 양 1에 대응하는 피제수 쪽의 양을 구하는 것으로, 제수가 자연수일 때를 등분제, 제수가 분수일 때를 단위 비율 결정으로 구분한 것이다. 제수가 자연수인가 분수인가라는 차이 대신, 제수 쪽의 양 1에 대응하는 피제수 쪽의 양을 구한다는 구조

3) 이 논문에서 분수 나눗셈의 통합 알고리즘은 분수 나눗셈의 서로 다른 세 맥락 -포함제, 등분제, 카테시안 곱의 역 맥락- 모두에서 맥락과의 연결성을 유지하면서 유도될 수 있는 공통 알고리즘을 뜻한다. 이와 유사하게, 분수 나눗셈의 통합적 이해는 포함제, 등분제, 카테시안 곱의 역이라는 다양한 맥락에서 공통된 추론, 수식 표현, 구조를 파악하는 것을 뜻한다.

적 동일성에 주목하면, 이 둘은 같은 맥락으로 볼 수 있다. 또, 곱셈의 역 맥락은 □의 $\frac{3}{2}$배가 48일 때 □를 구하는 것 같은 문제($48 \div \frac{3}{2}$)인데, 이 역시 제수 $\frac{3}{2}$에 해당하는 양이 주어졌을 때 제수 쪽 1에 해당하는 양을 구하는 문제로 볼 수 있다. 카테시안 곱의 역은 넓이와 한 변의 길이가 주어진 직사각형의 다른 한 변의 길이를 구하는 맥락이다. 이렇게 보면, 분수 나눗셈은, 배율을 구하는 포함제, 제수 쪽의 1에 대응하는 피제수 쪽의 양(또는 단위 비율)을 구하는 등분제, 직사각형의 한 차원을 구하는 카테시안 곱의 역의 세 맥락으로 대별할 수 있다.4)

이 세 맥락과 분수 나눗셈 알고리즘의 관련에 대하여 살펴보자. 등분제 맥락은 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 밀접한 관련이 있다(임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 조용진, 홍갑주, 2013; Siebert, 2002). $\frac{2}{5}\,m$에 $\frac{3}{4}\,kg$인 파이프 $1\,m$의 무게를 구하는 문제는 [그림 1]과 같이 $\frac{2}{5}\,m$ 파이프에서 시작하여 $1\,m$ 파이프로 진행하는 추론으로 해결되고, 이로부터 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 유도된다.



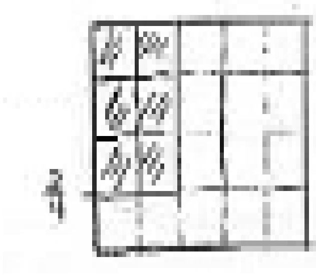

(a) (b)

[그림 1] 제수가 분수인 등분제의 두 풀이

[그림 1](a)는 단위분수 길이를 징검다리 삼아 $\frac{2}{5}\,m \rightarrow \frac{1}{5}\,m \rightarrow 1\,m$로 가는 과정을 보여준다. 이때 파이프의 무게는 차례대로 $\frac{3}{4}\,kg \rightarrow \frac{3}{4} \div 2\,kg \rightarrow \frac{3}{4} \div 2 \times 5\,kg$이 된다. [그림 1](b)는 자연수 길이를 징검다리 삼아, $\frac{2}{5}\,m \rightarrow 2\,m \rightarrow 1\,m$로 가는 과정을 보여준다. 이때 파이프의 무게는 $\frac{3}{4}\,kg \rightarrow \frac{3}{4} \times 5\,kg \rightarrow \frac{3}{4} \times 5 \div 2\,kg$이 된다. 줄이고 늘리거나 늘리고 줄이는 과정을 압축하여 한번에 $\frac{5}{2}$배 하여 $\frac{2}{5}\,m$에서 $1\,m$로 갈 수 있고, 이것은 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = (\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}) \div (\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}) = (\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}) \div 1 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$와 같이 나타낼 수 있다.

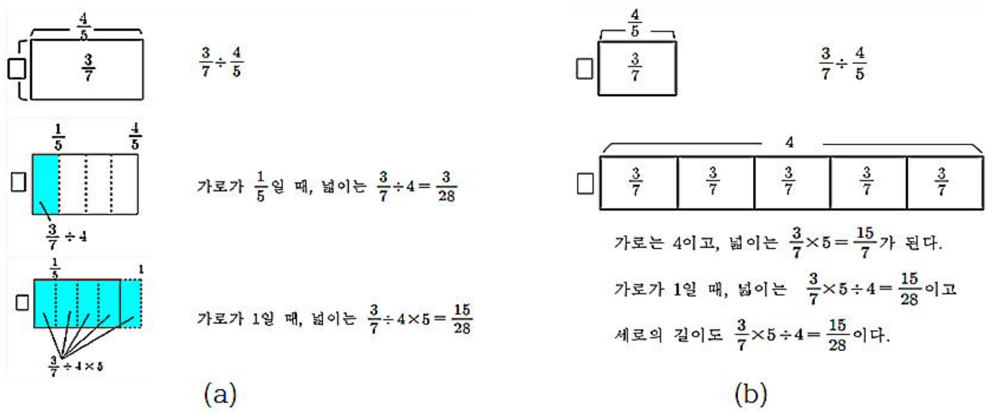
4) 이 세 맥락을 다음과 같이 구분할 수도 있다. 6÷2=3에서 예를 들어, 피제수와 제수에 $m$(미터)가 있는 것이 포함제이고($6m \div 2m = 3$), 피제수와 몫에 $m$가 있는 것이 등분제이고($6m \div 2 = 3m$), 제수와 몫에 $m$가 있는 것이 카테시안 곱의 역 맥락이다($6m^2 \div 2m = 3m$).

직사각형의 한 변의 길이를 구하는 카테시안 곱의 역 맥락에서는 해결 방법에 따라 다른 알고리즘이 유도된다. Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)은 단위정사각형을 이용하여 넓이가 $\frac{6}{20}m^2$이고 세로의 길이가 $\frac{3}{4}m$인 직사각형의 가로의 길이를 다음과 같이 구하였다. 넓이가 1인 단위정사각형의 세로를 4등분하여 $\frac{3}{4}$을 잡는다. 넓이의 분모 20을 세로의 길이의 분모 4로 나누면 5이므로 가로를 5등분한다. 그러면 [그림 2]와 같이 넓이가 $\frac{6}{20}m^2$이고 세로의 길이가 $\frac{3}{4}m$인 직사각형의 가로의 길이 $\frac{2}{5}m$를 구할 수 있다.



[그림 2] 카테시안 곱의 역 맥락의 분수 나눗셈 풀이
(Sinicrope, Mick, and Kolb, 2002. p. 160.)

Sinicrope, Mick와 Kolb은 이 과정을 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 나누는 알고리즘 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b \div d}{a \div c}$으로 형식화하였다. 이용률(2001)은 주어진 직사각형을 세로 방향으로 늘여서 넓이가 1인 직사각형을 만들고 그것을 정사각형으로 변형하는 추론으로 카테시안 곱의 역 맥락의 분수 나눗셈을 해결하는 방법을 제시하였다. 임재훈(2007)은 위의 두 방법을 비판적으로 분석하고, 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1로 바꾸는 방법을 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 자연스럽게 연결되는 방법으로 제시하였다([그림 3]).

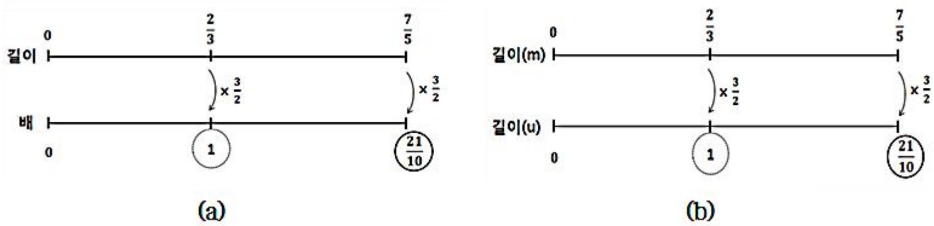



[그림 3] 카테시안 곱의 역 맥락의 분수 나눗셈 풀이
(임재훈, 2007, pp. 20-21)

등분제 맥락에서 제수 $\frac{2}{5}m$인 파이프에서 시작하여 $1m$인 파이프로 단위분수 $\frac{1}{5}$을 거쳐 가거나 자연수 2를 거쳐 가는 두 가지 방법이 있듯이, 넓이가 $\frac{3}{7}m^2$이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}m$인 직사각형의 세로의 길이를 구할 때에도 단위분수 길이를 거쳐 가거나 자연수 길이

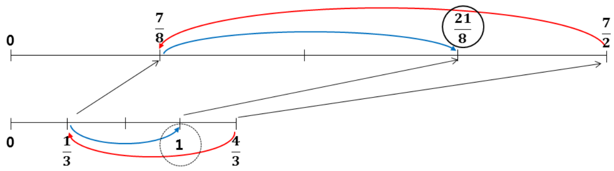
를 거쳐 가는 두 가지 방법이 있다. [그림 3](a)는 단위분수 길이를 거쳐 가는 과정($\frac{4}{5}m \rightarrow \frac{1}{5}m \rightarrow 1m$)을, [그림 3](b)는 자연수 길이를 거쳐 가는 과정($\frac{4}{5}m \rightarrow 4m \rightarrow 1m$)을 보여준다. 이와 같이 카테시안 곱의 역 맥락과 등분제 맥락에서 공통적으로, 문제를 해결하는 추론 과정은 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \div d \times c = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$, $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times c \div d = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$, $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div (\frac{d}{c} \times \frac{c}{d}) = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div 1 = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$와 같은 수식으로 표현될 수 있다.

포함제 맥락에서는 피제수와 제수의 분모를 같게 만드는 공통분모 알고리즘이 자연스럽게 출현한다(Perlwitz, 2004; Sharp & Adams, 2002; Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2009). 우리나라 교과서에서는 이 점을 고려하여 일단 공통분모 알고리즘을 도입한 다음 수식 변형을 통해 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방식을 취해 왔다. 그런데 이 방식은 수식 변형 과정에서 포함제 맥락과 연결성이 끊어져 제수의 역수가 포함제 맥락에서 지닌 의미가 드러나지 않는 단점이 있다. 이에 대한 대안으로, [그림 4]와 같이 배의 측정 공간을 새로운 길이 단위 u로 구성되는 공간처럼 하나의 측정 공간으로 드러내거나, [그림 5]와 같이 제수의 구조를 피제수 쪽에 투사하는 방법이 제안되었다(임재훈, 2016).




[그림 4] 두 측정 공간 사이의 연산자로서 제수의 역수 ($\frac{7}{5}m \div \frac{2}{3}m$)

(임재훈, 2016, pp. 529-530.)




[그림 5] 동형접근법에 의한 $\frac{7}{2}m \div \frac{4}{3}m$의 해결

(임재훈, 2016, p. 531.)

[그림 4](a)는 길이와 배라는 두 측정 공간을 이중수직선으로 표현한 것이다. [그림 4](b)는 제수 $\frac{2}{3}m$를 새로운 길이 단위 $1u$로 보고 피제수 $\frac{7}{5}m$는 몇 $u$가 되겠는가로 생각하여 $\frac{7}{5}m \div \frac{2}{3}m$를 해결한 것이다. 이때 제수의 역수 $\frac{3}{2}$은 $m$로 표현된 길이를 $u$로 표현된 길이로 변환하는 함수이다. 이러한 문제 해결 과정은 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div (\frac{d}{c} \times \frac{c}{d})$

$=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$와 같이 형식화될 수 있다. [그림 5]는 $1m$가 몇 $m$로 늘어나는지를 알면 $\frac{4}{3}m$가 $\frac{7}{2}m$로 몇 배 늘어난 것인지도 알 수 있다는 점에 착안한 것이다. 이와 같은 문제 해결 과정은 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\div d\times c=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$ 또는 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1$ $=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$와 같이 형식화될 수 있다.

[그림 4]나 [그림 5]의 방법을 사용하면, 포함제, 등분제, 카테시안 곱의 역 맥락 모두에서 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$와 같은 수식 표현을 통해 제수의 역수 곱하기 알고리즘에 이를 수 있다. 모든 맥락에서 같은 수식 표현을 통해 같은 알고리즘에 이른다는 점에서, 포함제에서 이 두 방법의 사용은 분수 나눗셈의 통합적 이해를 높은 수준에서 지향하는 시도라고 할 수 있다. 다만, [그림 4]의 방법은 두 측정 공간 사이의 함수적 관계를 탐구할 것을 요청하므로, 이를 위해서는 분수 나눗셈과 정비례 등 관련 내용을 유기적으로 연결해야 한다. 또, 길이와 무게, 가로의 길이와 넓이와 같은 서로 다른 두 속성의 양이 문제의 겉에 드러나 있는 등분제나 카테시안 곱의 역 맥락과는 달리, 길이라는 한 속성의 두 양만 드러나 있는 포함제에서 길이 공간과 배 공간 또는 기존 단위($m$)로 구성된 길이 공간과 새로운 가상 단위($u$)로 구성된 길이 공간이라는 두 개의 측정 공간을 별도로 상정하는 것이 아동들에게 쉽지 않을 수 있다. 센티미터와 인치, 킬로미터와 마일과 같은 단위 변환에 익숙한 미국 아동들에게는 몰라도, 이러한 단위 변환에 익숙하지 않은 우리나라 아동들에게는 $1u=\frac{2}{3}m$, $1m=\frac{3}{2}u$와 같은 두 측정 공간 사이의 변환이 어려울 수도 있다. [그림 5]의 제수의 구조를 피제수 쪽에 투사하는 동형접근법은, 모든 포함제 문제에 적용 가능한 추론 방식이기는 하지만, 특정한 유형의 포함제, 즉 고무줄 늘리기, 마법 연필 문제, 나무와 그 그림자와 같은 확대-축소 상황의 포함제에 특히 잘 어울린다는 한계가 있다(임재훈, 2017).

### 2. 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 수식

제수의 역수 곱하기 알고리즘을 수식으로 유도 또는 정당화하는 방식에는 나눗셈과 곱셈의 관계를 이용하는 방식, 번분수를 이용하는 방식, 제수를 1로 만드는 방식, 공통분모 알고리즘을 이용하는 방식, 분모끼리 분자끼리 나누는 방식 등 여러 가지가 있다(박교식, 2014; 신준식, 2013).[5] 여기서는 이 방식들을 주로 포함제와 관련하여 살펴본다.

① 나눗셈과 곱셈의 관계를 이용하는 방식

$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\square$, $\square\times\frac{2}{5}=\frac{3}{4}$, $\square\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$ , $\square=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$

② 번분수를 이용하는 방식

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}}{\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

5) 1이 제수의 몇 배인지를 이용하여 포함제 맥락의 분수 나눗셈을 계산하는 방법 및 그와 관련된 수식은 이 논문의 주요 초점이므로 다음 장에서 따로 논한다.

③ 제수를 1로 만드는 방식

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=(\frac{3}{4}\times\frac{5}{2})\div(\frac{2}{5}\times\frac{5}{2})=(\frac{3}{4}\times\frac{5}{2})\div 1=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=(\frac{3}{4}\div 2\times 5)\div(\frac{2}{5}\div 2\times 5)=(\frac{3}{4}\div 2\times 5)\div 1=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=(\frac{3}{4}\times 5\div 2)\div(\frac{2}{5}\times 5\div 2)=(\frac{3}{4}\times 5\div 2)\div 1=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

④ 공통분모 알고리즘을 이용하는 방식

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\times 5}{4\times 5}\div\frac{2\times 4}{5\times 4}=(3\times 5)\div(2\times 4)=\frac{3\times 5}{2\times 4}$$

$\frac{3\times 5}{2\times 4}=\frac{3\times 5}{4\times 2}$이고 $\frac{3\times 5}{4\times 2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$. 따라서 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$

⑤ 분모끼리 분자끼리 나누는 방식

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\div 2}{4\div 5}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}}{\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}}{1}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{3\times 5}{2\times 4}=\frac{3\times 5}{4\times 2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{(3\times 2\times 5)\div 2}{(4\times 2\times 5)\div 5}=\frac{3\times 5}{4\times 2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

①은 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 사용한 것이다. 포함제 맥락에서 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\square$의 $\square$는 $\frac{3}{4}$이 $\frac{2}{5}$의 몇 배인지를 뜻하는데, 수식 전개 과정에서 나타나는 $\square\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$와 같은 식을 포함제 맥락에서 의미를 부여하면서 이끌어내기 쉽지 않다. 또, 박교식(2014)이 지적한 바와 같이, 이 식을 도입하려면 등식의 성질을 이용해서 미지수만 남기는 것을 제수가 분수인 나눗셈 이전에 도입해야 하는 교육과정의 위계성 문제가 선결될 필요가 있다.

②가 지닌 곤란한 점은 형태상 자명하다. 우리나라 초등 수학에서는 번분수를 다루지 않으며, 번분수를 이용한 이 방법은 여러 가지 절차적 지식이 뒷받침되어야 한다(전평국, 박혜경, 2003). ②는 ③과 같이 번분수를 사용하지 않는 형태로 고쳐 쓸 수 있다. 번분수라는 새로운 꼴의 수를 도입하는 부담이 없으면서 같은 아이디어를 표현한다는 점에서 ③이 ②보다 장점이 있다. 이 논문의 주요 관심인 나눗셈 맥락과 관련하여 보면, ③은 등분제, 카테시안 곱의 역 맥락과 자연스럽게 연결되고, [그림 4]나 [그림 5]에 나타난 것과 같은 추론을 하면 포함제와도 연결된다.

④의 공통분모 알고리즘을 이용하는 방식은 이제까지 우리나라 초등 수학 교과서에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 데 사용되어 온 것이다(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015c). 공통분모 알고리즘은 포함제 맥락과 잘 어울리지만, ④의 공통분모 알고리즘 이후의 수식 처리 과정에 대하여 문제점이 지적되어 왔다. 조용진과 홍갑주(2013)는 $\frac{3\times 5}{2\times 4}=\frac{3\times 5}{4\times 2}$에서 분모의 2와 4의 교환, $\frac{3\times 5}{4\times 2}$에서 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$로의 분해와 같은 과정은 식의 형식적 조작으로 초등학생들에게 의미 있게 전달되기 힘들며, 학생들은 이유를 모르는 채 각 단계를 따라가다가 갑자기 결론과 마주치는 경험을 하게 된다고 비판하였다. 이들이 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 조사한 결과에 의하면, 분수의 나눗셈을 제수의 역수

곱하기로 계산할 수 있는 이유를 설명하는 문제에 대해 약 4%의 아동만이 맞게 답하였다. 초등 수학 영재들을 대상으로 한 김영아, 김동화, 노지화(2016)의 연구에서도, 교과서에 제시된 이 방법으로 분수 나눗셈 알고리즘을 기술한 아동들은 없었다.

⑤의 분모끼리 분자끼리 나누는 방식은 분수 곱셈 알고리즘과 밀접한 관련이 있다. $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}$로부터 $\frac{b\times d}{a\times c}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$인데, 이때 $\frac{b}{a}$는 $\frac{(b\times d)\div d}{(a\times c)\div c}$와 같다. 분모끼리 분자끼리 나누는 방식을 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$에 바로 적용하면 ⑤의 첫 줄과 같이 번분수가 나타난다. 둘째 줄과 같이 미리 피제수의 분자와 분모에 제수의 분자, 분모를 모두 곱하고 시작하면 번분수 표현은 피할 수 있다. 그러나 제수 쪽을 그대로 둔 채 피제수 쪽의 분자와 분모에만 제수의 분자, 분모를 모두 곱하고 그 다음에 그것을 각각 제수의 분자, 분모로 나누어야 하는 필연적이고 자연스런 추론을 포함제 맥락에서 이끌어내기 쉽지 않다.

서로 다른 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘 지도와 관련하여 다양한 견해가 있다. 그 중 하나는 각각의 맥락에 적합한 서로 다른 알고리즘을 다루자는 것이다. 신준식(2013)은 모든 분수 나눗셈을 한 알고리즘으로 해결하게 하지 말고 상황에 적절한 계산방법을 제시할 것, 보다 구체적으로, 포함제 맥락에서는 통분한 다음에 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 나누는 알고리즘을, 등분제 맥락에서는 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 다루는 교재 구성을 제안하였다. 포함제에 대하여 좀더 자세히 보면, 길이가 $1\frac{4}{8}\,m$인 끈을 $\frac{3}{4}\,m$씩 자르면 몇 도막이 되는가라는 문제를 $1\frac{4}{8}\div\frac{3}{4}=\frac{12}{8}\div\frac{6}{8}=\frac{12\div 6}{8\div 8}=12\div 6=2$와 같이 해결한다. 통분한 다음 분수의 곱셈과의 유추관계를 강조하여 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 나눈 것이 특징이다. 이 방법은 위의 ④와 ⑤를 결합한 것이라고 할 수 있다.

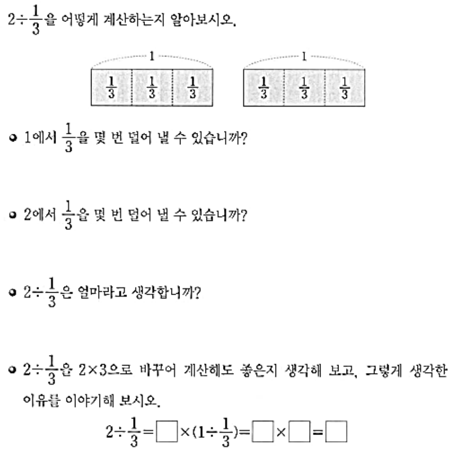
우리나라 교과서에서 취해 온 방법과 신준식(2013)의 연구에서 제안된 방법은 모두 공통분모 알고리즘을 사용한다. 이 논문의 주요 관심은, 이와는 다른 방향에서 포함제 맥락에서 공통분모 알고리즘을 매개로 하지 않으면서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방안에 있다. [그림 4]의 두 측정 공간 사이의 함수적 관계 탐구나 [그림 5]의 동형접근법은 이러한 대안의 예이며, 위의 ③의 수식으로 형식화될 수 있다. 이 논문의 초점은 다른 대안을 더 탐색하는 데 있으며, 다음 장에서 이에 대하여 논한다.

## Ⅲ. 분수 나눗셈의 통합적 이해의 방편으로서 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하는 방법의 구조

### 1. 1÷(제수)에 대한 기존 논의 및 취급

먼저 분수 나눗셈에 관한 국내의 선행 연구에서 1÷(제수)에 대한 논의, 그리고 우리나라 초등 교과서에서 1÷(제수)가 어떻게 취급되고 있는지 살펴본다. 박만구(2002)는 우리나라와 미국의 교과서에서 분수 나눗셈을 어떻게 다루고 있는지 비교하면서 다양한 표현 방식을 이용할 것을 제안하였다. 그는 다양한 표현 방식 이용의 일환으로 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 $1\div\frac{1}{5}$에

서 1이 $\frac{2}{5}$의 $\frac{5}{2}$임을 구하고 이것을 피제수와 곱하는 추론을 제시하고, 이것을 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ $=\frac{a}{b}(1\div\frac{c}{d})=\frac{a}{b}(1\div c(\frac{1}{d}))=\frac{a}{b}(1\div c(\times d))=\frac{a}{b}(1\times d(\div c))=\frac{a}{b}(1\times d(\frac{1}{c}))=\frac{a}{b}(1\times\frac{d}{c})=\frac{a}{b}(\frac{d}{c})$ $=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$와 같은 수식으로 표현하였다. 백선수(2004)는 피제수가 1인 분수 나눗셈을 해결하게 하고 피제수가 자연수인 경우와 진분수인 경우로 확장하는 교수 실험을 실시하였다. 아동들은 교사의 도움을 받아 길이가 $1m$인 색 테이프를 $\frac{3}{4}m$씩 자르면 몇 도막이 되는가라는 문제의 답 1과 $\frac{1}{3}$도막을 구하였다. 그리고 답을 가분수로 고친 후 제수와 답 사이의 규칙을 발견하고, 그것을 (자연수)÷(진분수), (진분수)÷(진분수)에 적용하였다. 그러나 이 교수 실험에서 아동들은 발견한 규칙을 귀납적으로 이해하는 수준에 머물렀다. 임재훈, 김수미, 박교식(2005)은 포함제 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘의 의미를 이해하기 위해서는 피제수가 1인 나눗셈의 의미를 이해하는 것이 중요하다고 지적하였다. 그러나 이들은 포함제 맥락에서 1÷(제수) 꼴의 학습 지도의 문제를 더 들어가 고찰하지는 않았으며, 분수 나눗셈에서 제수의 역수의 의미와 분수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 이유를 분명하게 드러낼 수 있는 방안을 강구할 것과 단위비율 결정 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 방안을 적극 고려할 것을 제안하였다.




[그림 6] $2\div\frac{1}{3}$과 $1\div\frac{1}{3}$

(교육부 2015c, pp. 42-43.)

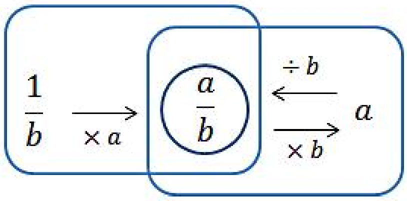
이상과 같이 분수 나눗셈 알고리즘 지도와 관련하여 1÷(제수)에 주목할 필요성이 간헐적으로 제기되었지만, 우리나라 초등 교과서에서 1÷(제수)를 매개로 한 방법은 그다지 중요하게 취급되지 않았다. 1÷(제수)에 관련된 내용이 2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 6학년 1학기 교과서 분수의 나눗셈 단원에 일부 있기는 하다. 단원 처음의“(자연수)÷(단위분수)를 계산할 수 있어요”차시에서, 활동 1에서 $1\div\frac{1}{4}$을 알아보고 활동 2에서 $2\div\frac{1}{3}$을 $2\div\frac{1}{3}=2\times(1\div\frac{1}{3})$과 같이 해결하도록 한다([그림 6]). 뒤이어 나오는 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈, 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈, (자연수)÷(단위분수가 아닌 분수), 대분수의 나눗셈은 모두 공통분모 알고리즘 및 그것을 매개로 한 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 도입과 활용으로 되어 있다. 즉, 우리나라 교과서에서는 피제수가 자연수이고 제수가 단위분수인 간단한 경우만 1÷(제수)를 이용하여 분수 나눗셈을 할 수 있다는 것을 다룬다. 제수가 단위분수 $\frac{1}{n}$이면 제수가 1에 자투리 없이 $n$번 들어가는 것을 바로 알 수 있다. 제수가 단위분수가 아니면 제수가 1에 몇 번 들어가는지 알기 위해 보다 복잡한 추론이 필요한데, 교과서에서는 제수가 단위분수가 아닌 분수일 때 1÷(제수)를 다루지 않고 이것을 바탕으로 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하지도 않는다.

2. 양분수[6]의 두 가지 의미와 배의 합성

포함제에서 피제수와 제수는 같은 종류의 양이다. $3m$는 $\frac{2}{5}m$의 몇 배인지를 구하는 포함제에서 제수 $\frac{2}{5}$는 구체적인 특정 길이를 나타낸다. 그러므로 제수가 분수인 포함제는 양을 나타내는 분수 개념과 밀접한 관련이 있다. 특히 1÷(제수)의 해결에 양을 나타내는 분수의 의미가 중요하게 작동한다.

가. 양분수의 두 가지 의미

초등학교에서 분수를 처음 도입할 때 전체를 똑같이 5등분한 것 중의 하나를 $\frac{1}{5}$, 전체를 똑같이 5등분한 것 중의 2를 $\frac{2}{5}$와 같이 도입한다. $\frac{2}{5}m$는 $\frac{1}{5}m$의 두 배를 뜻한다. 이러한 양분수의 첫째 의미는 가분수, 분모가 같은 분수의 덧셈이나 뺄셈 등 이후의 학습에서 지속적으로 반복, 강화된다. $\frac{5}{4}$는 $\frac{1}{4}$ 다섯 개가 모인 양이고, $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$은 $\frac{1}{5}$ 네 개와 $\frac{1}{5}$ 세 개가 모인 양이다. 이런 과정을 통해 [그림 7]의 왼쪽 네모 상자가 나타내는 양분수 $\frac{a}{b}$의 첫째 의미가 형성, 강화된다.



[그림 7] 양분수 $\frac{a}{b}$의 두 의미

[그림 7]의 오른쪽 네모 상자가 나타내는 양분수의 둘째 의미는 몫으로서의 분수와 관련있다. 연구자들은 아동들의 몫으로서의 분수 이해가 부족함을 지적하여 왔다. 아동들은 $3\div4$의 문제 상황 자체를 이해하지 못하거나 $3\div4$가 $\frac{3}{4}$이라는 것을 절차적으로는 구하지만 그 의미를 잘 이해하지 못한다(권성룡 2003; 소성숙, 2003). 강홍규(2014)에 의하면 $a\div b=\frac{a}{b}$는 우리나라 교육과정에서 시간이 지나면서 그 중요성을 인정받지 못하고 소홀히 취급되어 왔다. 몫으로서의 분수를 취급하기 위한 적절한 논리적 시퀀스를 찾기 어렵고 몫으로서의 분수 개념을 도입하기 위한 구체적 조작 활동이 쉽게 구성되기 어렵다는 것이 몫으로서의 분수 개념 지도가 소홀히 취급된 원인일 수 있다(강완, 2014). 그러나 몫으로서의 분수는 자연수의 나눗셈과 분수의 나눗셈을 확장하는 과정에서 매우 중요한 주제이므로 그 의미를 충실하게 다룰 필요가 있다(방정숙, 이지영, 2014).

2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 교과서는 몫으로서의 분수 개념 형성을 [그림 8]과 같이 도모하고 있다. 도입 맥락은 생각열기에서 볼 수 있듯이 등분제이다. 큰 원의 지름이 $3m$일 때 그것을 4등분한 것 중 하나에 해당하는 가장 작은 원의 지름이 $3\div4=\frac{3}{4}(m)$이다. 본 문제인 $3\div4$를 알아보기 전에, 활동 1에서 $1\div4$를 알아본다. 각 활동에는 세 가지

---

6) 여기서 양분수는 $\frac{2}{5}m$, $\frac{3}{4}kg$처럼 길이, 무게와 같은 양을 나타내는 분수를 뜻한다.

세부 활동이 있어, $a \div b$를 곱셈식 $a \times \frac{1}{b}$로 나타내고, $a$가 $b$의 몇 분의 몇인지 알아보고, 끝으로 $a \div b$의 뜻을 분수로 나타내도록 한다. 이러한 세부 활동을 해 나가면서 $\frac{a}{b}$에 어떤 새로운 의미가 형성되는가가 관건이다.

나눗셈식을 곱셈식으로 변환하는 활동 2의 첫 번째 세부 활동은 $3 \div 4$, 즉, 3을 4등분한 것 중의 하나는 3의 $\frac{1}{4}$과 같다는 것을 다룬다. 3의 $\frac{1}{4}$은 3을 구성하는 1의 $\frac{1}{4}$을 구하는 작업을 세 번 반복하고, 각각에서 얻은 $\frac{1}{4}$을 모은 $\frac{3}{4}$이다. 이때 $1 \div 4$ 곧, 1의 $\frac{1}{4}$을 구하는 일이 필요하므로, 활동 1에서 사전 준비로 $1 \div 4$를 다룬 것으로 보인다.

[그림 8] 나눗셈과 분수
(교육부, 2015b, p. 90)

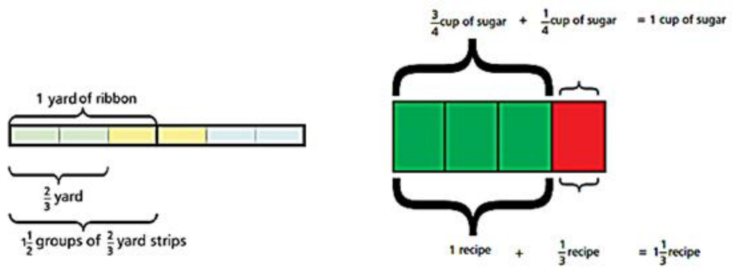
교과서에서는 나눗셈식을 곱셈식으로 변환한 다음에, $a$가 $b$의 몇 분의 몇인지 묻는다. 그런데 이것은 첫째 세부 활동 및 그와 관련된 3의 $\frac{1}{4}$을 구하는 조작과 어긋난다. $a$가 $b$의 몇 배인지 (몇 분의 몇 인지)가 유의미한 맥락은 같은 종류의 두 양 사이의 나눗셈인 포함제이며, 이때 $\frac{a}{b}$는 구체량을 나타내지 않고, 두 구체량 사이의 추상적인 관계를 나타낸다. 이렇게 중간에 맥락을 등분제 맥락에서 포함제 맥락으로 갑자기 변경하는 것은 몫으로서의 분수와 관련된 양분수 $\frac{a}{b}$의 새로운 의미 형성에 적절하지 않아 보인다. 이 둘째 세부 활동의 적절성에 대하여 재고가 필요하다.

$\frac{3}{4}m$는 $\frac{1}{4}m$에서 시작하여 만들어진 양, 즉 $\frac{1}{4}m$의 3배인 양이기도 하지만, $3m$에서 시작하여 만들어진 양, 즉 $3m$의 $\frac{1}{4}$인 양이기도 하다. 아동들이 양분수의 이 두 의미를 종합적으로 형성할 수 있는 학습 기회를 제공할 필요가 있다. $\frac{1}{b}$이 $a$번 모인 양으로만 인식했던 $\frac{a}{b}$를 $b$번 모으면 $a$가 되는 양으로, 이를테면 $\frac{2}{5}m$를 $\frac{1}{5}m$가 2번 모인 양으로뿐 아니라 5번 모으면 $2m$가 되는 양으로 인식하는 것은, 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 종합적으로 이해하는 데 유용하다.

나. 배의 합성과 1÷(제수)

포함제 맥락에서, 이를테면 $1 \div \frac{2}{5}$의 값을 구하는 일차적인 방법은 $\frac{2}{5}$를 단위로 반복하

여 1을 측정하는 것이다. 이때 문제가 되는 것은 $\frac{2}{5}$가 두 번 들어가고 남은 마지막 $\frac{1}{5}$을 어떻게 처리할 것인가이다. 이것은 [그림 9]와 같은 방식으로 해결할 수 있고, 그 최종 결과는 $2\frac{1}{2}$과 같은 대분수로 나타내어진다.

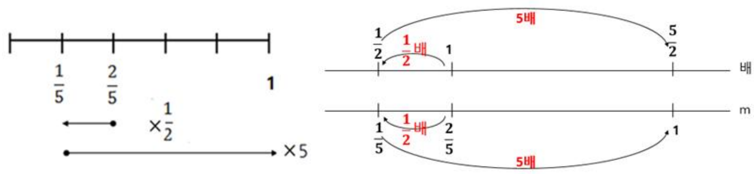



(a) (b)

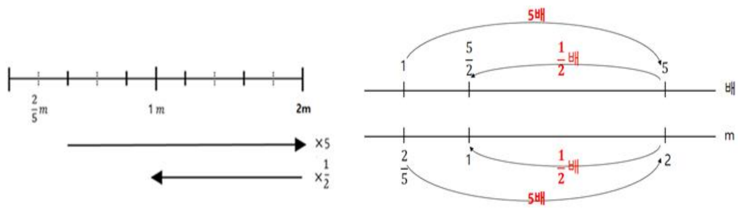
[그림 9] 1÷(제수)=(대분수). (a) $1\div\frac{2}{3}=1\frac{1}{2}$ (Cavey, & Kinzel, 2014), (b) $1\div\frac{3}{4}=1\frac{1}{3}$ (Philipp, & Hawthorne, 2015).

이러한 과정을 거쳐서 얻는 대분수 꼴의 결과는 제수와 1÷(제수) 사이의 관계를 드러내어 보여주지 않는다. 이것을 가분수 꼴로 고쳐야 1÷(제수)가 제수의 역수라는 규칙을 발견할 수 있다(Sharon, & Swarthout, 2015). 대분수를 가분수로 고친 다음에 관찰하는 이와 같은 방법은 1÷(제수)가 제수의 역수가 되어야 하는 필연적인 이유를 드러내어 보여주지는 않는다.

II장에서 등분제 맥락이나 카테시안 곱의 역 맥락의 나눗셈을 해결할 때, 제수가 $\frac{2}{5}m$라면, 단위분수 $\frac{1}{5}$ 곧 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 징검다리 삼거나 자연수 2 곧 제수의 분자를 징검다리 삼는 두 방법이 있었다. [그림 10]과 [그림 11]은 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 해결할 때 마찬가지로 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 징검다리로 삼거나 제수의 분자를 징검다리로 삼는 두 방법이 있음을 보여준다. [그림 10]의 방법은 양분수 $\frac{2}{5}$의 첫째 의미 ($\frac{1}{5}$의 2배)에 의존하고, [그림 11]의 방법은 양분수 $\frac{2}{5}$의 둘째 의미 (2의 $\frac{1}{5}$, 5배 하면 2가 되는 수)에 의존한다.

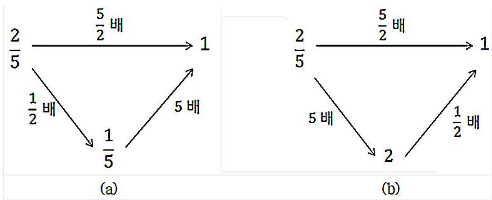


[그림 10] $1 \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$, $(\frac{2}{5} \to \frac{1}{5} \to 1)$



[그림 11] $1 \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$, $(\frac{2}{5} \to 2 \to 1)$

이와 같은 추론은 분수 배의 합성을 필요로 한다. 현행 초등학교 교과서에서 배의 합성을 명시적으로 다루는 부분은 찾아보기 어렵다. 그러므로 아동들이 배의 합성에 대한 이해를 제대로 갖추지 못한 상태에서 분수 나눗셈 학습을 시작할 가능성이 있다. [그림 12]에 보이는 것과 같은 배의 합성에 대한 이해가 결여된 상태에서는 1÷(제수)가 제수의 역수가 된다는 규칙을 귀납적으로 발견, 적용하는 것 이상으로 나아가기 어렵다. 포함제 맥락에서 귀납적 수준을 넘어서 1÷(제수)를 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 지도하려면, 배의 합성에 대한 이해를 증진할 학습 기회를 제공할 필요가 있다. 이를테면, 다음과 같은 활동을 제수가 분수인 나눗셈의 학습 이전에 제공하는 것을 고려할 수 있다.




[그림 12] 배의 합성

길이가 4 m인 마술 빗자루가 있습니다. 마법사는 주문을 외워 마술 빗자루의 길이를 여러 가지로 늘리거나 줄였습니다.


(1) 마술 빗자루를 $\frac{1}{2}$배로 줄였다가 5 배 늘리면, 원래 길이를 몇 배 한 것과 같습니까?

(2) 마술 빗자루를 5 배 늘렸다가 $\frac{1}{2}$배로 줄이면, 원래 길이를 몇 배 한 것과 같습니까?

3. 1÷(제수)와 제수의 역수 곱하기 알고리즘

양분수의 두 의미와 배의 합성은 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 등분제나 카테시안 곱의

역 맥락에서와 유사한 방법으로 해결하는 바탕이 된다. 그리고 다시, 1÷(제수)는 제수의 역수 곱하기 알고리즘으로 가는 중간 기착점이 된다. 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 지도할 때, 아동들이 1÷(제수)를 알면 ☆÷(제수)를 구하기 편리하다는 생각이 우러나게 할 필요가 있다. 이를테면 다음과 같은 활동이 도움이 될 수 있다.

1. 다음 ㈎, ㈏, ㈐ 중 어느 것이 풀기 쉽고 어느 것이 풀기 어렵습니까? 왜 그런지 그 이유를 이야기해 보시오.

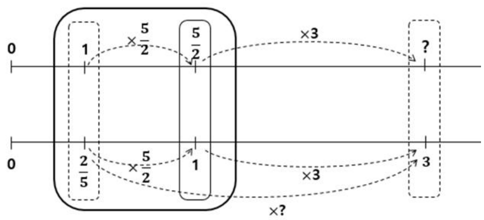
㈎ 8은 $\frac{8}{5}$의 __배. 16은 $\frac{8}{5}$의 __배. 24는 $\frac{8}{5}$의 __배.

㈏ 8은 $\frac{8}{5}$의 __배. 4는 $\frac{8}{5}$의 __배. 2는 $\frac{8}{5}$의 __배.

㈐ 7은 $\frac{8}{5}$의 __배. 13은 $\frac{8}{5}$의 __배. 10은 $\frac{8}{5}$의 __배.

2. 무엇을 알면, ☆는 $\frac{8}{5}$의 몇 배인지 구하는 문제들을 모두 쉽게 해결할 수 있을지 생각하고 모둠에서 토의해 보시오.

이와 같은 과정을 거쳐 분수 나눗셈의 제수의 역수 곱하기 알고리즘에 도달할 수 있다. 이를테면, $3\div\frac{2}{5}$는 3이 $\frac{2}{5}$의 몇 배인지 구하는 것인데, 1은 $\frac{2}{5}$의 $\frac{5}{2}$배이고, 3은 1의 3배이므로, 3은 $\frac{2}{5}$의 $\frac{5}{2}\times3$배 또는 $3\times\frac{5}{2}$배이다. 이것을 이중수직선을 사용하여 도식화하여 나타내면 [그림 13]과 같다. 이와 같이 1이 제수의 몇 배인지를 이용하여 피제수가 제수의 몇 배인지 알아내는 과정을 $3\div\frac{2}{5}=3\times(1\div\frac{2}{5})=3\times\frac{5}{2}$와 같이 나타낼 수 있다. 1이 $\frac{2}{5}$의 몇 배인지 먼저 구하고 그것을 3배 한다는 순서를 그대로 나타내면, $3\div\frac{2}{5}=(1\div\frac{2}{5})\times3=\frac{5}{2}\times3$이 더 적절하다. 그러나 $a$의 $b$배를 편의에 따라 $b\times a$로도 나타내는 융통성을 허용하면, 여전히 $3\div\frac{2}{5}=3\times(1\div\frac{2}{5})=3\times\frac{5}{2}$와 같이 나타낼 수 있다. 이상과 같은 추론은 피제수가 자연수가 아닌 분수일 때도, 즉 (분수)÷(분수)일 때도 마찬가지로 적용될 수 있다.



[그림 13] $3\div\frac{2}{5}=3\times\frac{5}{2}$

포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방법은 분수 나눗셈의 통합적 이해라는 관점에서 다음과 같은 장점을 지니고 있다. 첫째, 공통분모 알고리즘을 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘으로 연결하는 방법과 달리, 포함제 맥락과 의미의 연결성을 유지하면서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도할 수 있다. 둘째, 등분제 맥락, 카테시안 곱의 역 맥락에서와 마찬가지로, 제수와 1의 곱셈적 관계

에 주목하게 한다. 등분제 맥락에서 풀이의 핵심은 제수 쪽을 1로 곱셈적으로 변환하는 것이므로 제수와 1의 곱셈적 관계가 중요하다. 카테시안 곱의 역 맥락에서 가로의 길이를 1로 변환하는 과정에서도 제수와 1의 곱셈적 관계가 핵심이다. 그러므로 포함제 맥락에서 이 방법을 사용하면, 맥락에 상관없이 모든 맥락에서 제수와 1의 곱셈적 관계가 핵심이라는 것을 드러낼 수 있다. 셋째, 등분제 맥락이나 카테시안 곱의 역 맥락에서와 같이, 제수와 1의 곱셈적 관계를 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 징검다리로 삼거나 제수의 분자를 징검다리로 삼는 두 추론으로 파악하게 한다. 이와 같은 특징들은 이 방법이 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 분수 나눗셈의 통합 알고리즘으로 다루는 데 유용한 잠재력을 지니고 있음을 시사한다.

## Ⅳ. 결　어

나눗셈 맥락에는 배율을 구하는 포함제, 단위 비율을 구하는 등분제. 카테시안 곱의 한 차원을 구하는 카테시안 곱의 역 맥락이 있다. 등분제와 카테시안 곱의 역 맥락에서는 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 맥락과의 연결성을 유지하면서 자연스럽게 출현한다. 포함제에서는 공통분모 알고리즘을 거쳐 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방법이 그동안 초등 수학 교과서에서 사용되어 왔으나, 이 방법은 맥락과의 연결성이 중간에 사라지고 제수의 역수의 의미가 드러나지 않는 단점이 있다.

서로 다른 맥락은 나름의 고유한 면을 지니고 있고, 각 맥락에서 그 맥락에 고유한 알고리즘을 다루는 것 역시 고유한 장점을 지니고 있다. 이를테면, 포함제에서 공통분모 알고리즘을 다루는 것은 아동들에게 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에 이어 통분이 분수 연산에서 어떻게 활용되는지 볼 수 있는 또다른 기회를 제공할 수 있다(Cramer, Monson, Whitney, Leavitt, & Wyberg, 2010). 모든 맥락을 아우르는 통합 알고리즘의 가능성을 탐색하고 그 지도 방안을 모색하는 것은, 각 맥락의 고유한 특징에 적합한 서로 다른 알고리즘을 가르치는 것을 부정하지 않으며, 다만 거기에서 더 나아갈 것을 요청한다. 이 논문에서는 이와 같은 입장에서 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 방법을 초등학교 수학에서 구현 가능한 한 대안으로 제안하였다.

포함제 맥락에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 1÷(제수)를 매개로 하여 다루려면, 양분수의 두 의미와 배의 합성에 대한 이해가 필요하다. 양분수의 이중적 의미와 배의 합성은 포함제 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 한 방법에서만 필요한 것은 아니다. [그림 1]과 [그림 3]에서 볼 수 있듯이, 이것은 등분제 맥락이나 카테시안 곱의 역 맥락에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 과정에도 사용된다. 양분수의 이중적 의미와 배의 합성에 대한 이해를 결합하면, 포함제, 등분제, 카테시안 곱의 역 맥락 모두에서 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 징검다리로 삼는 추론과 제수의 분자를 징검다리로 삼는 추론으로 문제를 해결하고, 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 형식화할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 초등 교과서에서는 포함제 맥락에서 공통분모 알고리즘을 거쳐 곱셈의 교환법칙과 분수의 곱셈을 이용한 수식 처리로 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하고, 등분제 맥락이나 카테시안 곱의 역 맥락에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 것은 다루지 않는다. 달리 말하여, 양분수의 이중적 의미나 배의 합성에 의존

함 없이 전개 가능한 방식을 채택하고 있으며, 사정이 이러하므로 제수가 분수인 나눗셈 학습에 앞서 양분수의 이중적 의미나 배의 합성을 강조하지 않는 것으로 보인다. 서로 다른 맥락의 분수 나눗셈이 공통적으로 $\frac{1}{\text{제수의 분모}}$을 징검다리로 삼거나 제수의 분자를 징검다리로 삼는 추론 과정을 거쳐 해결되고 이로부터 제수의 역수 곱하기 알고리즘이라는 동일한 알고리즘이 형식화된다는 것에 초점을 두는 교재 개발 및 수업 연구에서는 양분수의 이중적 의미와 배의 합성이라는 기반 형성에 유의할 필요가 있다.

1÷(제수)를 매개로 한 방법은 포함제 맥락과 의미의 연결성을 유지한 상태에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도할 수 있을 뿐 아니라, 등분제 맥락, 카테시안 곱의 역 맥락과 마찬가지로 제수와 1의 곱셈적 관계에 주목하게 하고 이 관계를 단위분수를 징검다리로 삼거나 자연수를 징검다리로 삼는 두 추론으로 파악하게 한다는 특징이 있다. 이러한 특징은 이 방법이 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 분수 나눗셈의 공통 구조를 담고 있는 통합 알고리즘으로 다루는 데 기여할 잠재력을 지니고 있음을 시사한다. 이 잠재력이 교수 학습 상황에서 실현된다면, 아동들은 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 모든 맥락에 공통된 분수 나눗셈의 구조가 내재된 알고리즘으로 인식할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌


강완 (2014). 분수 개념 지도 내용과 방법 분석. **수학교육학연구, 24**(3), 467-480.

강흥규 (2014). 초등수학에서 '나눗셈으로서의 분수($b \div a = \frac{b}{a}$)'개념 지도에 관한 연구 - 한국의 역대 초등수학 교과서에 대한 분석을 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 18**(3), 425-439.

교육과학기술부 (2011). **수학 6-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2012). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]

교육부 (2015a). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8]

교육부 (2015b). **수학 5-2**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015c). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

권성룡 (2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. **학교수학, 5**(2), 259-273.

김영아, 김동화, 노지화 (2016). 초등수학영재의 분수 나눗셈의 이해에 관한 연구. East Asian mathematical journal, **32**(4), 565-587

박교식 (2014). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정 분석. **한국초등수학교육학회지, 18**(1), 105-122.

박만구 (2002). 왜 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$인가?. 수학교육논문집, 13, 39-54.

방정숙, 이지영 (2014). 몫으로서의 분수에 관한 초등학교 수학과 교과용도서 분석. **수학교육학연구, 24**(2), 165-180.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 이용한 대안적인 분수 나눗셈의 형식화 방안에 관한 연구. **초등수학교육, 8**(2), 97-113.

소성숙 (2003). **초등학교 학생들의 분수감각에 대한 실태 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

신준식 (2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. **수학교육**, **52**(2), 217-230.

이용률 (2001). **지도내용의 핵심과제 99**. 서울: 경문사.

임재훈, 김수미, 박교식 (2005).분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2), 235-249.

임재훈 (2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. **학교수학, 9**(1), 13-28.

임재훈 (2016). 분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성, **한국초등수학교육학회지, 20**(4), 521-539.

임재훈 (2017). 확대 상황 포함나눗셈에 대한 고찰, **한국초등수학교육학회지, 21**(1), 115-134.

전평국, 박혜경(2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. **수**

**학교육논문집, 15**, 71−76.

조용진, 홍갑주 (2013). 분수 나눗셈의 지도에서 단위비율 결정 맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구. **초등수학교육, 16**(2), 93−106.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2005). 어떻게 수학을 배우지? (김수환, 박영희, 백선수, 이경화, 한대희 역). 서울: 경문사.

Cavey, L. O., & Kinzel, M. T. (2014). From whole numbers to invert and multiply. *Teaching children mathematics*, *20*(6), 374−383.

Cramer, K., Monson, D., Whitney, S., Leavitt, S., & Wyberg, T. (2010). Dividing Fractions and Problem Solving. *Mathematics teaching in the middle school*, *15*(6), 338−346.

Perlwitz, M. D. (2004). Two students' constructed strategies to divide fractions. *Mathematics Teacher in the Middle School, 10*, 122−126.

Philipp, R. A., & Hawthorne, C. (2015). Unpacking Referent Units in Fraction Operations. *Teaching Children Mathematics*, *22*(4), 240−247.

Sharon, V. V., & Swarthout, M. B. (2015). How Many in One?. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(5), 308−312.

Sharp, J., & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research, 95*, 333−347.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247−256). Reston, VA: NCTM.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 153−161), Reston, VA: NCTM.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay−Williams, J. M. (2009). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

<Abstract>

# On the Method of Using 1÷(divisor) in Quotitive Division for Comprehensive Understanding of Division of Fractions

Yim, Jaehoon[7)]

Fraction division can be categorized as partitive division, measurement division, and the inverse of a Cartesian product. In the contexts of quotitive division and the inverse of a Cartesian product, the multiply−by−the−reciprocal algorithm is drawn well out. In this study, I analyze the potential and significance of the method of using 1÷(divisor) as an alternative way of developing the multiply−by−the−reciprocal algorithm in the context of quotitive division.

The method of using 1÷(divisor) in quotitive division has the following advantages. First, by this method we can draw the multiply−by−the−reciprocal algorithm keeping connection with the context of quotitive division. Second, as in other contexts, this method focuses on the multiplicative relationship between the divisor and 1. Third, as in other contexts, this method investigates the multiplicative relationship between the divisor and 1 by two kinds of reasoning that use either $\frac{1}{\textit{the denominator of the divisor}}$ or the numerator of the divisor as a stepping stone. These advantages indicates the potential of this method in understanding the multiply−by−the−reciprocal algorithm as the common structure of fraction division.

This method is based on the dual meaning of a fraction as a quantity and the composition of times which the current elementary mathematics textbook does not focus on. It is necessary to pay attention to how to form this basis when developing teaching materials for fraction division.

Key words: fraction division, quotitive division, partitive division, inverse of a Cartesian product, the multiply−by−the−reciprocal algorithm

논문접수: 2018. 10. 15
논문심사: 2018. 11. 02
게재확정: 2018. 11. 23

7) jhyim@ginue.ac.kr