한국초등수학교육학회지 22(4) 369-384. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 22(4) 369-384.
2018. 11. 30 November 30. 2018.

곱셈 지도에 관한 고찰

강문봉[1] · 김정하[2]

곱셈은 동수누가, 배, 곱집합을 포함한 여러 가지 의미를 가지고 있고 다양한 상황에서 사용된다. 초등학교에서 곱셈의 이러한 다양한 의미는 교과서에 구체화되어 있으며 지도 방법이나 지도 순서가 다른 개념이나 연산에 비해 매우 안정적으로 정착되어 있다. 그럼에도 불구하고 좀더 보완되고 개선될 여지가 있어 보인다. 이 연구는 곱셈의 여러 개념적 측면들이 어떤 유사점과 차이점이 있는지를 문헌을 통해 고찰해 보고 교과서 분석을 통해 그 지도 방법과 지도 순서가 적절한지를 분석해 보려는 것이다. 연구 결과, 배 개념이 너무 일찍 도입되었으며, 그 이후 곱셈 지도에서 배 개념을 제대로 반영하지 못하였음을 알 수 있었다. 또한 양과 양의 곱셈을 직사각형 넓이 개념을 이용하여 지도할 필요성도 있었다.

주제어: 곱셈, 동수누가, 배, 곱집합, 직사각형 넓이

Ⅰ. 서 론

수학의 개념이나 절차는 고정된 것이 아니라 시간이 지나가면서 성장 발전해 왔다. 초등학교에서 매우 중요한 연산 중의 하나인 곱셈 역시 마찬가지이다. 곱셈은 같은 수를 여러 번 더하는 것을 간단하게 나타내는 동수누가로 출발하여, 피승수와 곱 사이의 관계에 초점을 맞춘 배 개념, 곱집합의 원소의 개수를 나타내는 곱집합 개념 등의 의미를 수반하며 변화해 왔다. 그 중에서 동수누가와 배 개념은 초등학교에서 중요한 곱셈의 개념으로 다루어지고 있으며, 곱집합은 시대 상황에 따라 지도되기도 하고 사라지기도 하였다.

곱셈은 매우 다양한 상황에서 사용된다. 대상을 묶어서 세는 상황, 수직선에서 일정한 간격으로 뛰어서 세는 상황, 가격을 구하는 상황, 비례 상황, 직사각형으로 배열되어 있는 상황, 직사각형의 넓이를 구하는 상황, 시간과 속력이 주어졌을 때 혹은 페인트로 벽을 칠할 수 있는 넓이를 구하는 상황 등과 같이 서로 다른 양을 곱하는 상황, 순서쌍을 구하는 상황 등 곱셈이 사용되고 적용되는 경우가 매우 다양하다(Freudenthal, 1983; 강흥규, 2009; 우정호, 2017). 이러한 다양한 상황에는 곱셈의 특별한 의미가 적용되어져야 하는 경우도 있다. 곱셈이 가지는 다양한 의미에 따라 곱셈 알고리즘의 개발 과정도 달라지게 마련이다.

우리나라에서는 여러 차례의 교육과정 개정을 통하여 곱셈 개념의 지도 순서와 시기는 비교적 안정적으로 정착되어 있다고 보여진다. 2학년 1학기에 곱셈의 의미가 지도되고 이

1) [제1저자] 경인교육대학교, 교수
2) [교신저자] 경인교육대학교, 강사

때 묶어 세기, 뛰어 세기, 동수누가, 배 등이 지도되고, 2학년 2학기에서 곱셈구구가 도입되며, 3학년에서부터 단계적으로 곱셈 알고리즘이 지도된다. 5학년 무렵에서부터 사각형의 넓이와 분수의 곱셈, 소수의 곱셈이 다루어지면서 유리수 범위의 곱셈이 지도되고 있다. 이러한 흐름과 지도 내용은 여러 차례의 교육과정 개정에서도 크게 변하지 않고 있다.

그럼에도 불구하고 곱셈 개념의 지도에 대해서 재고할 부분들이 있다. 즉, 배 개념이 적절하게 잘 다루어지고 있는지, 그리고 서로 다른 양의 곱셈에 대해서 어떻게 대처해야 할 것인지 등에 대해 논의할 부분이 있다. 이 연구에서는 곱셈의 여러 개념적 측면들이 어떤 유사점과 차이점이 있는지를 문헌을 통해 고찰해 보고, 교과서 분석을 통해 그 지도 방법과 지도 순서가 적절한지를 분석해 보려고 한다.

Ⅱ. 곱셈 개념의 분석

덧셈과 마찬가지로 곱셈은 오랜 역사를 통해 그 의미가 성장 발전해 왔고 계산 방법도 효율적으로 발전해 왔다. 강흥규는 곱셈을 개념적 차원에서 동수누가, 배(培), 곱집합의 세 가지로 나누었다(강흥규, 2009). 우정호는 곱셈이 적용되는 상황을 묶어 세기로의 세기 단위의 변환, 동수누가, 배의 합성, 직사각형 모양의 배열, 수직선 위에서의 뛰어 세기, 데카르트 곱 등으로 제시하였다(우정호, 2017). Freudenthal(1983)은 곱셈의 의미를 반복 덧셈과 순서쌍(또는 곱집합)으로 보고 있다. 이와 같이 곱셈은 그 의미가 다의적이며 적용되는 상황도 다양하다.

1. 동수누가와 배

동수누가 또는 반복 덧셈은 같은 수를 반복하여 더하는 것을 간단하게 표현한 것을 의미한다. 이것은 곱셈 개념의 역사적 발달 과정에서 매우 일찍 드러난 것이다. 고대 이집트인들은 곱셈을 '2배하기'와 같은 방법을 사용하여 계산하였다. 예를 들어 17×15를 계산할 때 [그림 1]에서 알 수 있는 것처럼, 계속해서 두 배를 하고 16배를 한 값 272에서 1개의 17을 빼어 255를 얻었다.[3] 이것은 2를 16번 더한 것에서 하나를 뺀 것이므로 동수누가를 의미하며, 이와 같은 '2배하기'와 같은 독특한 방법은 절대기수법이라는 이집트인들의 기수법에 어느 정도 그 원인이 있다고 생각한다.

1	17
2	34
4	68
8	136
16	272
1	17
15	255

[그림 1] 고대이집트인의 곱셈

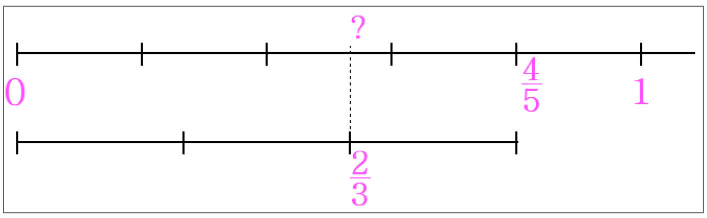
고대 그리스에서도 곱셈을 동수누가로 보고 있다. 유클리드의 기하학 원론 7권의 정의 15는 곱셈에 관한 것이다. 이 정의에 대해서 Heath(1956, p.287)가 "이것은 덧셈의 단축으로 잘 알려진 곱셈의 초기의 정의이다."라고 주석을 단 것을 보면 고대 그리스인들도 곱셈을 반복된 덧셈을 간단히 한 동수누가로 이해하고 있음을 알 수 있다. 단축된 덧셈이라는 의미는 multus(many)+plicare(to fold)와 같이 라틴어에도 그대로 반영되어 있다

3) 서양에서는 17을 15번 더하는 것을 15×17과 같이 표기하지만 우리는 17×15와 같이 표현한다. 17을 15번을 더하기 위해서 15=1+2+4+8이므로 1, 2, 4, 8에 있는 값 17, 34, 68, 136을 더하면 되지만 Smith(1953, p.106)가 제시한 [그림 1]에서 16 밑에 1의 열이 추가된 것을 보면 아마도 16번에서 한 번 빼는 방법을 사용한 것으로 보인다.

(Smith, 1953, p.101). 자연수를 공리적으로 정의한 Peano가 곱셈을 $x^{+}y = xy + y$와 같이 정의한 방식 역시 동수누가에 근거한 것이다.

이와 같이 동수누가는 곱셈 개념의 역사적 발달 과정에서 아주 초기에서부터 등장하여 오래도록 유지되는 곱셈의 기본적 의미이다. 그러나 수학이 발달하면서, 분수나 무리수의 곱셈으로 발전하는 데에 동수누가는 더 이상 적용할 수 없게 된다. 또한 동수누가의 경우 피승수와 승수에서 사용되는 수의 의미가 다르기 때문에 교환법칙에 대한 논의를 할 때 어려운 문제가 제기되며, (2피트)×(3피트)=(6제곱피트)와 같은 곱셈 역시 동수누가로 설명할 수 없다.

자연수에서 유리수로 곱셈이 확장 적용되기 위해서는 배 개념이 필요하게 된다. '배(培)'의 사전적 의미는 "일정한 수나 양이 그 수만큼 거듭됨"을 말하는 것이며 이것은 동수누가를 의미한다. 그러나 일상적으로 우리는 2배, 3배, 또는 $\frac{2}{3}$배와 같은 표현을 사용하며, 이러한 표현의 사용은 '배'가 이산량이나 연속량의 동수누가를 포함하여 유리수 범위에서의 확대와 축소라는 관계를 말한다고 할 수 있다.[4] 또한 확대나 축소를 하려면 어떤 것을 '하나', 즉 새로운 단위로 볼 수 있어야 한다. 그러므로 '배'는 사전적 의미에서 벗어나서 유리수 범위로 확장할 수 있으며 어떤 묶음을 단위로 재구성하는 정신 작용을 요구한다. 그러나 확대 또는 축소된 양을 정확히 구하기 위해서는 결국 동수누가 개념에 근거해서 계산해야 한다. 예를 들어, 3배는 세 번 거듭하는 것이며, '$\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$배'는 $\frac{4}{5}$를 하나로 보고 그것을 $\frac{2}{3}$로 축소하는 것이다. 축소된 값을 구하기 위해서는 [그림 2]와 같이 $\frac{4}{5}$를 3등분한 것의 2개를 취해야 하며 이것은 $\frac{4}{5}$를 3등분한 $\frac{4}{15}$를 두 번 더하는 것이 된다. 그러므로 배 개념은 자연수의 범위 내에서는 동수누가를 말하며, 동수누가를 포함하여 곱셈이 유리수 범위로 확장한 것이라고 할 수 있으며 동시에 새로운 단위를 고려하는 정신활동이라고 할 수 있다.



[그림 2] $\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$배를 계산하는 방법

곱셈을 동수누가로 생각하는 것은 너무 제한적이며 덧셈과 곱셈의 본질적인 차이를 간과한 것이라는 주장도 있다(정영옥, 2013). 그러한 주장의 하나로 $a \times b = c$와 $a + b = c$에서 b의 의미가 본질적으로 다르다는 점이다(강흥규, 2009). 즉, 덧셈에서는 피가수와 가수가 같은 기수인 반면 곱셈에서 승수는 피승수와 다른 개념이라는 것이다. 그러나 이런

4) 사전적 의미로 볼 때 '배'는 거듭 반복됨을 의미하는 것으로 볼 수 있다. 그러나 수학적 의미를 부여할 때 '배'는 scala product를 의미하는 것으로 보아야 한다.

비교는 덧셈과 곱셈이라는 서로 다른 연산에서이므로 적절한 비교가 되지 않는다고 생각한다. 이런 비교 대신 동수누가로서의 $a\times b$와 배 개념으로서의 $a\times b$를 비교할 때 b의 의미가 서로 다르다는 지적을 할 수는 있다. 즉, 동수누가에서의 승수는 '번'이라는 횟수의 의미를 가지고 있고 이것은 덧셈의 반복적인 행위를 나타내는 것인 반면 배 개념에서는 승수가 피승수의 확대 또는 축소를 말하며 피승수와 곱 사이의 배라는 '관계'를 의미하고, a를 하나의 단위로 재구성하는 정신적 활동이 있어야 한다는 점에서 차이가 있다고 할 수 있다.

동수누가는 합성단위를 구성하지 못했다는 지적도 있다. '배'는 명백히 새로운 단위를 형성해내는 것이지만 동수누가는 그렇지 못하다는 점에서 이러한 지적은 타당하다고 할 것이다. 그러나 동수누가에서도 3×4=3+3+3+3에서 같은 수 3을 계속해서 더하는 것은 (1, 2, 3), (4, 5, 6)과 같이 하나하나의 낱개를 세어나가기 보다는 3개 묶음을 하나로 보고 이를 묶어서 3, 6, 9와 같이 더하거나 뛰어 세기를 한다는 점에서 이것 역시 일종의 합성단위 또는 적어도 새로운 단위가 구성되기 전의 '중간적인' 합성단위라고 할 수 있다고 생각한다.

2. 곱집합

곱집합은 집합론에 근거한 곱셈 개념이다. 곱집합은 동수누가나 배와는 달리 피승수와 승수가 모두 개수 개념으로 같다는 특징을 가지고 있다고 한다(강홍규, 2009; 김영아, 김성준, 2016). 그런데 곱집합 A×B에서 두 집합은 $\{a,b\}$와 같은 원소의 집합일 수도 있고 $\{\{a\},\{a,b\}\}$와 같은 집합의 집합일 수도 있다. 그러므로 곱집합으로서의 곱셈은 피승수와 승수가 '같은 개수'의 측면에서 볼 것이 아니라 '어떤'집합의 원소의 개수인가 하는 점, 그리고 곱은 집합 A도 B도 아닌 새로운 차원의 순서쌍의 집합의 원소의 개수라는 점에 주목해야 할 것이다. 이 점에 주목하면 성격이 다른 피승수와 승수, 예를 들어 서로 다른 두 양의 순서쌍에 의해 곱이 정해지는, 양과 양의 곱으로 곱셈이 확장될 수 있을 것이다. 정영옥(2013)이 곱셈 상황에 대한 여러 연구자들의 관점을 비교하여 정리한 내용을 보면 Carpenter et. al.의 넓이, Freudenthal의 양과 양의 곱, Nesher의 데카르트 곱을 같은 선상에 두었는데, 바로 이러한 점을 드러낸 것이라고 할 수 있다.

이것이 곧 단위와 단위의 곱셈으로 연결될 수 있는 요소이며, 이어서 설명할 직사각형의 넓이 개념으로의 확장으로 이어진다고 생각한다. 곱집합에 의한 곱셈의 정의는 곱셈의 교환법칙을 자연스럽게 설명할 수 있다는 장점을 가지기도 한다. 그러나 곱집합을 구하기 위해서는 동수누가를 고려해야 한다. 예를 들어 A={a,b,c}, B={1,2}일 때 {(a,1), (b,1), (c,1)}과 {(a,2), (b,2), (c,2)}가 다르지만 그 개수를 구할 때는 3개씩 2개가 있다고 보고 결국 3+3과 같은 동수누가가 된다. 결국 배 개념이든 곱집합 개념이든 곱셈의 결과를 구하기 위해서는 동수누가 개념을 이용하지 않을 수 없게 된다. 또한 곱집합 역시 자연수의 곱셈에서만 적용되며 유리수 개념으로 확장할 수 없다는 한계가 있다.

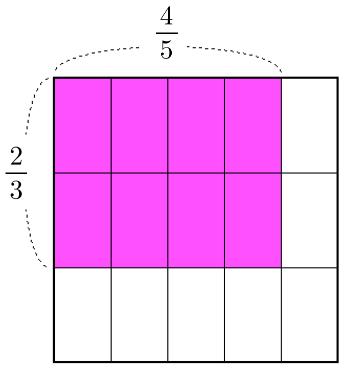
3. 직사각형의 넓이

가. 동수누가 또는 배를 적용한 직사각형의 넓이

이제 교과서에서 실제로 사용되고 있으면서도 설명되지 않는 또 하나의 곱셈 상황을 생각해 볼 수 있다. 그것은 직사각형의 넓이나 직육면체 또는 원기둥의 부피를 구하는 경우

이다. 직사각형 배열 모델은 동수누가의 경우에도 곱셈 상황을 시각적으로 보여주는 데 효율적이다. 그러나 연속량의 곱셈의 경우에는 직사각형의 넓이로 지도될 수 있다.

초등학교에서 직사각형의 넓이는 단위정사각형의 개수를 구하는 것으로 도입된다. 그것은 곱셈의 동수누가 개념이 적용된 것이다. 가로와 세로가 분수인 직사각형의 넓이는 단위 정사각형을 등분할하고 동수누가를 적용해야 한다. 예를 들어 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$을 구하기 위해서는 [그림 3]과 같이 단위 정사각형을 만들고 이 정사각형을 가로로 5등분, 세로로 3등분한 후 조그마한 직사각형을 4개씩 2개, 혹은 2개씩 4개를 취하게 된다.



[그림 3] $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$의 계산

물론 이것을 배 개념으로 설명할 수도 있다. 그러려면 먼저 단위정사각형을 생각하고 단위정사각형이 가로로 $\frac{4}{5}$배 축소된 직사각형의 넓이를 구하고 난 다음, 이것을 '하나'로 보고 다시 세로로 $\frac{2}{3}$배 축소된 직사각형의 넓이를 구하는 방식으로 진행되어야 한다. 즉, $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=(1\times\frac{4}{5})\times\frac{2}{3}$와 같은 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 이러한 복잡한 과정에도 불구하고 학생들이 단위정사각형이 가로로, 세로로 확대 또는 축소된 것으로 이해하기는 쉽지 않다. 그러므로 직사각형의 넓이라는 관점에서 분수의 곱셈을 지도하는 것은 등분할과 동수누가로 이해하는 것이 자연스럽다. 동수누가의 경우 $\frac{1}{15}$㎠의 직사각형이 8개 있다는 것이며 배의 경우 1㎠의 $\frac{8}{15}$배라는 의미상의 차이가 있기는 하다.

나. 양과 양의 곱으로서의 직사각형의 넓이

직사각형의 넓이를 이용하여 곱셈을 설명할 때는 동수누가든 배든 피승수와 곱은 모두 넓이로서 같은 양을 나타내며 승수는 '배'를 나타내는 순수한 수이다. 그러나 동수누가나 배로는 설명할 수 없는 곱셈의 예가 존재한다. 그것은 양과 양의 곱셈이다. 이러한 곱셈은 오래 전부터 사용되어 왔다. 예를 들어 Plato of Tivoli(1116)가 이런 식으로 곱셈의 정의를 확장하기도 하였다(Smith, 1953). 과학에서도 속력과 시간의 곱이나 운동에너지의 공식 등에서도 양과 양의 곱셈을 많이 볼 수 있다. 동수누가나 배로 곱셈을 설명한다면 이와 같은 두 양의 곱은 설명할 수 없다.

두 양의 곱을 설명하기 위해서는 곱집합을 이용해야 하며 연속량의 곱을 생각한다면 곱집합보다 직사각형의 넓이 개념을 적용해야 한다. 곱집합에 의해 곱셈을 정의하는 것처럼 가로와 세로를 각각 순서쌍의 요소로 고려하여 직사각형의 넓이를 (가로, 세로)로 생각하면 직사각형의 넓이는 곱집합적 개념으로 이해할 수 있다. 변의 길이가 연속량이기 때문에 곱집합이 자연수의 집합에 한정되는 반면 직사각형의 넓이는 유리수 범위로 곱셈을 확장할 수 있다. 이렇게 되면 2㎝×3㎝=6㎠와 같이 단위와 단위의 곱을 생각할 수 있고 더 나아가서 2㎠×3㎝=6㎤와 같이 넓이와 길이의 곱도 생각할 수 있다. 그렇게 해서 입체도

형의 부피는 예를 들어 단위정육면체의 개수를 구하기 위해 (가로)×(세로)×(높이)로 구할 수도 있으나 (밑넓이)×(높이)와 같이 두 양의 곱으로 구할 수도 있다. 이와 같이 두 양의 곱을 도입하면 시간과 속력의 곱이 이동거리가 된다는 것도 쉽게 지도할 수 있을 것이다.

이와 같은 방식으로 직사각형의 넓이를 이용하여 곱셈을 지도한다면 배 개념에서 두 양의 곱으로 한 걸음 더 나아갈 수 있을 것이다.

4. 요약

곱셈 개념으로 동수누가, 배, 곱집합, 넓이 개념의 공통점과 차이점을 정리하면 다음과 같다.

동수누가 개념에서는 피승수와 승수의 의미가 다르다. 피승수는 이산량이나 연속량의 집합으로 나타낼 수 있는 기수 개념이고 승수는 '번', '횟수'를 의미한다. 그런 점에서 승수는 순수한 자연수가 된다. 곱은 피승수를 몇 번 더하는 것이기 때문에 피승수와 같은 기수이다. 동수누가 개념은 곱셈의 결과를 계산하는 데 매우 유용하다.

배 개념에서도 피승수와 승수의 의미가 다르다. 피승수는 동수누가에서처럼 기수 개념이고 승수는 '배'를 의미한다. 곱은 피승수와 같은 기수이다. 그러나 동수누가에서 승수는 몇 번 더하는 행위를 나타내지만 배 개념에서의 승수는 반복행위보다는 피승수와 곱 사이의 관계이며, 승수는 자연수를 포함하여 분수나 소수가 될 수 있다.

곱집합 개념에서는 피승수와 승수 모두 어떤 집합의 원소의 개수이다. 곱은 곱집합의 원소, 즉 순서쌍의 개수이다. 그러한 점에서 피승수, 승수, 곱 모두 같은 기수가 된다. 그러나 피승수와 승수를 나타내는 두 집합은 서로 성격이 다를 수도 있으며, 특히 곱은 두 집합의 원소의 순서쌍의 개수로서 피승수 및 승수와 그 성격이 확연히 다르다.

직사각형의 넓이는 등분할과 동수누가를 이용하여 구할 수 있다. 그러나 여기서 특별히 언급하는 이유는 직사각형의 넓이는 양과 양의 곱을 대표한다는 의미이다. 이 경우 피승수와 승수는 같은 양을 나타낼 수도 있고 다른 양을 나타낼 수도 있다. 또한 곱은 승수나 피승수와는 전혀 다른 양을 나타낸다. 그러므로 동수누가나 배에서는 승수가 순수한 수를 나타내지만 양과 양을 곱하는 넓이에서는 승수가 순수한 수가 아니라 어떤 양을 나타낸다.

이러한 점을 표로 나타내면 다음 <표 1>과 같다.

<표 1> 여러 가지 곱셈 개념의 유사점과 차이점

	피승수와 승수의 의미	피승수와 곱의 의미	승수의 범위
동수누가	다르다	같다	자연수
곱집합	같을 수도 다를 수도 있다	다르다	자연수
배	다르다	같다	유리수
(양의 곱으로서의) 직사각형의 넓이	같다	다르다	유리수

Ⅲ. 곱셈 개념의 지도

곱셈의 의미 또는 곱셈이 적용되는 상황이 동수누가, 배, 곱집합, 직사각형의 넓이와 같

이 다양하다는 것을 살펴보았다. 이러한 다양한 개념을 언제 어떤 계열로 지도할 것인가를 생각해 보아야 한다.

곱셈과 비슷하게 분수 개념도 부분과 전체(등분할), 측정수, 몫, 비율, 연산자 등 다양한 의미를 가지고 있다(유현주, 1995; 이용률, 2010; 우정호, 1998). 그 중 부분과 전체로서의 분수는 분수를 지도할 때 가장 먼저 도입하고 있으며[5], 연산자는 분수의 곱셈을 다룰 때 자연스럽게 사용하고 있고, 몫 분수는 5-6학년군에서 자연수의 나눗셈을 몫으로 나타낼 때, 비율분수도 5-6학년군의 비와 비율에서 지도하고 있다.

분수 개념의 등분할, 몫, 비는 상당 부분 서로 독립적인 의미이지만, 곱셈의 여러 의미는 이와 달리 확장적 의미를 가지기도 하고 독립적이기도 하는 다소 복잡한 측면이 있다. 배는 동수누가의 의미를 포함하고 있으나 동수누가는 덧셈의 반복 행위인 반면 배는 피승수와 곱 사이의 관계를 나타내기도 한다. 반면 곱집합은 피승수와 승수가 서로 다른 차원으로 간주되어 동수누가나 배와는 다르며, 양과 양의 곱으로서의 직사각형의 넓이는 곱집합 개념을 유리수 범위로 확장한 것으로 간주될 수도 있지만, 직사각형의 넓이 자체는 동수누가나 배 개념을 적용하여 구할 수도 있다. 그런 점에서 곱셈은 분수 개념보다 훨씬 복잡한 교수학적 문제를 가지고 있다고 할 수 있을 것이다.

역사적으로 볼 때 가장 먼저 등장한 곱의 의미는 동수누가이다. 또한 배 개념이든 곱집합 개념이든 곱의 값을 계산하기 위해서는 동수누가가 필수적이다. 그러므로 곱셈 지도에서 동수누가 개념을 가장 먼저 지도하고 동수누가를 통해 곱셈 알고리즘을 지도하는 것은 타당하다고 할 것이다.

곱셈의 배 개념은 확대와 축소, 비례관계 등과 관련 있다. 나귀수(2008)는 비와 비율에 관한 선행연구들을 고찰하여, 비와 비율을 지도하기 위해서는 곱셈을 중심으로 한 승법적 사고를 할 수 있도록 도와줄 필요가 있다고 주장하였다. 곱셈적 사고를 할 수 없으면 비와 비율의 상황을 올바로 다루는 것은 거의 불가능할 것이다. 그러나 여기서 곱셈적 사고는 덧셈적 사고 이후에 형성되는 것으로, 어떤 단위의 반복을 볼 수 있는 '배'개념을 의미한다(NCTM, 2013). 그러므로 비례 관계를 지도하기 전에 배 개념이 지도되는 것이 적절할 것이다. 한편 동수누가는 '몇 번', '몇 회'와 같이 반복되는 덧셈이기 때문에 자연수의 곱셈에서 의미를 가지며 유리수의 곱셈으로 확장될 때는 벽에 부딪히게 된다. 그러므로 배의 의미는 비례관계를 배우기 전 혹은 분수의 곱셈을 지도하기 전에 선행될 필요가 있다.

곱셈의 본질이 동수누가인지 배인지에 대한 논쟁에 대해서 강홍규(2009)는 자세히 설명하고 있다. 수학교육현대화 운동가들은 곱셈은 덧셈과는 독립적인 것이며 이른 시기부터 설명되어져야 한다고 주장하며, Dewey는 동수누가로 곱셈을 지도하는 것은 곱셈의 본질인 배 개념을 획득하는 데 장애가 되기 때문에 곱셈의 도입 시기부터 다루어져야 한다고 주장한다. 그러나 이런 주장은 완성된 개념을 조기에 도입하자는 주장이며 개념의 역사적 발달이나 심리적 발달에 비추어볼 때는 타당해 보이지 않는다. 배 개념을 획득하는 데 장애가 된다는 Dewey의 주장을 받아들인다 하더라도 이것은 지식의 구성 과정에서 피할 수 없는 인식론적 장애이며, 이러한 인식론적 장애를 극복하도록 도움을 주는 것이 교육이다. "인식론적 장애는 새로운 지식의 구성을 방해하는 부정적인 측면이 있는 반면에, 이를 깨닫게 되면서 그것을 토대로 새로운 방식으로의 앎이 시작되며 그 극복을 통해 보다 높

5) 2015 개정 교육과정에서는 3학년 1학기에서 '전체를 똑같이 나눈 몇 개 중 몇 개'로 분수를 도입하고 있다.

은 수준의 이해가 가능해지는 긍정적인 측면”(우정호, 2000, p.463)이 있기 때문이다.

그런 점에서 배 개념이 서둘러 동수누가 개념을 대체하거나 배 개념과 동수누가 개념을 동시에 지도하는 것은 적절하지 않으며, 묶음이나 뛰어세기, 직사각형 배열 상황으로 동수누가에 의해 곱셈을 지도하다가 상대단위를 생각할 수 있고 동수누가가 더 이상 적용되지 못하는 시기에 도입하는 것이 바람직하며 그 시기는 비례적 사고를 지도하거나 분수의 곱셈이 등장하는 때라고 생각한다.

곱집합 개념은 두 집합의 순서쌍을 구해야 이해할 수 있는 개념이다. 순서쌍을 구하여 그 개수를 안다 하더라도 그 결과가 곱임을 이해하기가 쉽지 않을 것이다. 실제로 곱집합으로서의 곱셈은 자연스럽게 등장한 것은 아니다. Anghileri와 Johnson은 20세기 초까지 반복 덧셈으로서의 곱셈 개념이 강조되었지만 그 이후 곱셈이 그 자체의 독립적인 연산이 되는 방법을 찾는 중에 집합의 아이디어에 기초한 데카르트 곱 개념이 탄생되었다고 주장한다(정영옥, 2013, p.891에서 재인용). 이와 같은 독립적인 연산으로서의 곱셈은 수학교육 현대화 운동의 영향을 받은 3차 교육과정 이후 초등학교 교과서에서 삭제되어 이제 그 흔적을 찾아보기 힘들다. 그러므로 초등학교에서 곱집합 개념을 굳이 도입할 필요는 없을 것이며 있다 하더라도 경우의 수를 구하는 토픽 정도로 다루는 것이 적절할 것이다.

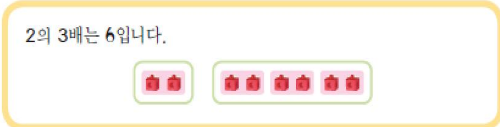
직사각형의 넓이 개념은 매우 중요하다. 이산량의 곱셈에서도 직사각형 배열 모델을 사용하는 것이 시각적으로 효과적이며 곱셈의 교환법칙이나 분배법칙을 이해하는 데도 직사각형 배열 모델은 매우 효과적이다. 임재훈(2014, p.12)은 곱셈의 다른 모델과 달리 “직사각형 배열 모델은 곱셈의 교환법칙의 선험성을 드러낼 수 있는 가능성을 지니고 있는 모델”이라고 주장한다. 직사각형의 넓이 모델은 그 외에도 여러 장점이 있으며 직사각형의 넓이를 구하는 상황도 초등학교에서 매우 흔하다. 직사각형의 넓이는 동수누가 개념으로 도입하여도 좋으며 이는 교과서에서 동수누가로 곱셈을 도입한 것과 일관성을 가질 수 있다. 동수누가는 자연수에서의 곱셈에 한하는 데 비해 넓이 개념은 유리수 범위로도 확대할 수 있다.

여기에서 더 나아갈 필요가 있어 보인다. 아직 초등학교에서 도형의 넓이를 지도할 때 2㎝×3㎝=6㎠과 같이 단위와 단위의 곱을 사용하고 있지는 않지만 학생들은 자연스럽게 직사각형의 넓이를 구할 때 단위정사각형의 개수를 구한다는 생각보다는 가로와 세로를 곱해서 2㎝×3㎝=6㎠와 같이 구하게 된다. 이러한 현상은 교사가 부지불식간에 이렇게 지도하는 탓인지 아니면 직사각형의 넓이가 단위정사각형의 개수를 구하는 활동임을 강조하지 않은 탓인지는 아직 조사 밖의 일이다. 그러나 두 양의 곱을 구해야 할 필요도 있어 보인다. 교육과정의 개정 과정에서 원기둥의 부피를 초등학교에서 삭제하기도 하고 추가하기도 하는데, 추가할 경우 원기둥의 부피를 구하기 위한 공식으로 (밑넓이)×(높이)가 주어지곤 한다. 직육면체의 부피를 구할 때도 이 공식이 사용되기도 한다. 그러나 이 공식은 명백히 동수누가가 적용된 것도 아니고 배 개념이 적용된 것도 아니다. 동수누가나 배의 경우 승수는 ‘높이’와 같은 양이 아니라 ‘수’이며, 피승수와 곱은 두 가지 모두 같은 양이어야 한다. 반면에, (밑넓이)×(높이)는 양과 양의 곱이며, 그런 점에서 단위와 단위의 곱이 인정되어져야만 한다. 또한 분수의 곱셈 알고리즘을 발견하는 과정에서도 막대의 확대 및 축소와 같은 배의 의미를 적용하기 보다는 직사각형의 넓이를 이용하는 것이 보다 편리하고 이해하기 쉽다는 점에서 이러한 개념은 지도할 필요가 있어 보인다.

Ⅳ. 교과서 분석

동수누가와 배, 직사각형의 넓이 개념에 근거하여 우리나라 초등수학 교과서를 분석해 보려고 한다. 1학년부터 4학년까지는 2015 개정 교육과정에 따른 교과서를 분석하며, 개정 교육과정에 따른 5, 6학년 교과서는 아직 학교에 보급되지 않았기 때문에 5, 6학년 교과서는 2009 개정 교육과정에 따라 개발된 교과서임을 밝힌다.

2015 개정 교과서에서 곱셈이 가장 먼저 등장하는 것은 2학년 1학기 6단원이다. 여기서는 묶어세는 활동을 한 다음에 [그림 4]와 같이 '배'가 도입되고 이어서 [그림 5]와 같이 '배'를 곱셈식으로 표현하고 난 다음 [그림 6]과 같이 '동수누가'를 곱셈식으로 표현하고 있다. 이어서 '배' 또는 '동수누가'를 곱셈식으로 표현하는 연습을 한다.



[그림 4] 2학년 1학기(p.148)

• 3의 6배를 3×6이라고 씁니다.
• 3×6은 3 곱하기 6이라고 읽습니다.

[그림 5] 2학년 1학기(p.152)

• 4+4+4+4+4+4+4는 4×7과 같습니다.
• 4×7=28
• 4×7=28은 4 곱하기 7은 28과 같습니다라고 읽습니다.
• 4와 7의 곱은 28입니다.

[그림 6] 2학년 1학기(p.153)

2학년 2학기에서는 '배'라는 표현을 사용하지 않고, 물건들의 묶음을 이용하여 곱셈구구를 완성하고 있다.

3학년 1학기에서는 나눗셈 단원에서 자연수의 나눗셈이 도입되고 나눗셈과 곱셈의 관계가 다루어진다. 곱셈 단원에서는 두 자리 수와 한 자리 수의 곱셈 방법을 지도한다. 그러나 이 두 단원 어디에서도 '배'라는 용어는 등장하지 않고 모두 묶음인 동수누가로 지도된다.

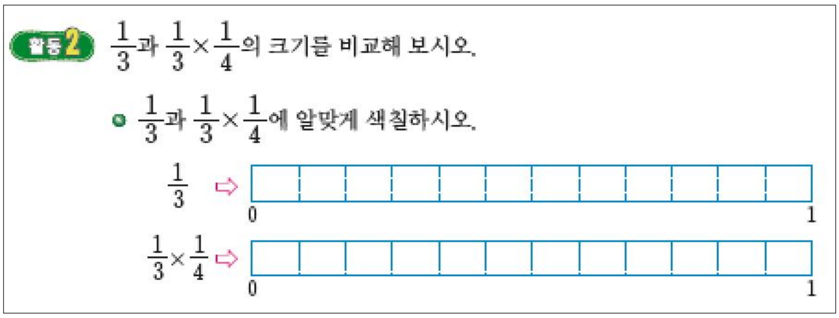
두 자리 수의 곱셈 방법을 지도하고 있는 3학년 2학기 교과서나 세 자리 수의 곱셈을 지도하는 4학년 1학기 교과서에서도 동수누가의 상황을 다루며 '배'라는 표현은 등장하지 않는다.

우리나라에서 '배'라는 용어가 곱셈 개념을 지도하는 초기 단계에서부터 등장한 것은 2차 교육과정에서부터이다. 이것은 아마도 곱셈은 덧셈과는 독립적인 것이며 이른 시기부터 설명되어져야 한다고 주장하는 수학교육현대화 운동의 영향을 받은 것으로 보이며, 그러한 영향으로 3차 교육과정에서는 동수누가, 곱집합, 배 개념 모두 2학년에서 다루어졌었다.

이와 같이 '배'라는 용어가 오래 전부터 초등학교 2학년에서 도입되어 지도되어 온 역사적 전통이 있기는 하지만 그렇더라도 도입 후 분수의 곱셈을 다루기 전까지는 그 용어가 사용되지 않는 교과서의 흐름을 본다면 '배'라는 용어는 너무 일찍 도입되었다고 할 수 있다. 곱셈의 본질적 의미가 '배'라는 주장(교육과학기술부, 2013, p.385; Dewey, 1895, 강홍규 논문 p.23에서 재인용; NCTM, 2013)을 반박하는 것은 아니지만 적어도 2학년 교과서의 기술을 본다면 '배'의 진정한 본질적 의미가 드러나기 보다는 동수누가를 다른 용어로 표현한 또 하나의 이름에 불과하며, 분수의 곱셈을 배우기 이전까지는 이후의 학습에서도 아무런 관련이 없는 고립된 용어에 불과할 뿐이다.

김영아와 김성준(2016)은 2007 개정 교육과정에서 배 개념의 가치를 동수누가에 앞서 강조하고 있지만, 이것이 곱셈 지도에서 부각되지 않고 있으며 그 결과 여전히 곱셈은 동수누가의 상황을 강조하고 있다고 주장하고 있다. “배의 개념은 두 수 사이의 관계를 의미하므로 학생들이 이해하기 어려울 수 있다.”(교육부, 2017a, p.296)는 교사용지도서의 내용도 있다. 이러한 사실은 ‘배’ 개념이 초등학교 2학년에서 너무 일찍 도입되어 배의 의미를 살릴 수 없거나 아니면 2학년에서는 배 개념을 이해하기 어렵다는 점을 드러낸 것이라고 할 수 있다.

5학년 1학기에서 곱셈이 사용되는 경우는 우선 다각형의 넓이 단원이다. 직사각형의 넓이는 단위 정사각형의 개수를 구하는 것이며 따라서 이것은 동수누가 개념이 적용된 것이라고 할 수 있다. 분수의 곱셈 단원에서도 동수누가를 적용한 방법이 등장한다. (분수)×(자연수)는 명백히 동수누가에 의해 구해지며, (자연수)×(진분수), (자연수)×(대분수), (단위분수)×(단위분수), (진분수)×(진분수), (대분수)×(대분수), 세 분수의 곱셈 중에서 (자연수)×(대분수)에서만 ‘배’라는 표현이 사용되고 있다. 예를 들어 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$은 $\frac{1}{3}$의 $\frac{1}{4}$배임을 알게 해야 하는데 그러한 내용은 전혀 없다. 물론, 2학년에서 이미 곱셈이 ‘배’임을 지도했기 때문에 여기서 굳이 그러한 점을 언급할 필요가 없다고 주장할 수도 있다. 그렇다 하더라도 분수의 곱셈에서 배의 의미를 강조하지 않는 것은 2학년에서 조기에 배의 의미를 강조한 것에 비하면 적절해 보이지 않는다.

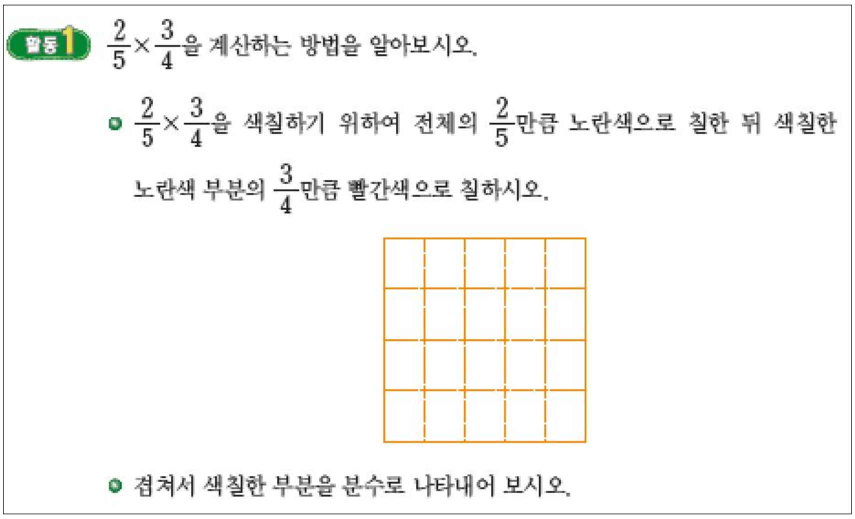


[그림 7] 5학년 1학기(p.187)

[그림 7]을 보면 분수의 곱셈에서 배 개념을 의도하였는지 의심스러울 정도이다. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$는 $\frac{1}{3}$의 $\frac{1}{4}$배로서, $\frac{1}{3}$을 하나로 보고 그 $\frac{1}{4}$을 찾는 활동을 해야 하는데 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$을 구하는 두 번째 막대에서 $\frac{1}{3}$이 하나인 단위가 아니라 처음의 1을 고려한 그림을 그렸다는 것은 배의 의미를 적용했다기 보다 그 결과를 구하는 데 급급한 방식이라고 할 수 있다.

(진분수)×(진분수)를 계산하는 방법을 지도하기 위해서는 [그림 8]과 같이 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 사용하였다. 이 과정을 보면 ① 단위정사각형을 제시하고, ② 단위정사각형의 $\frac{2}{5}$를 취한 다음, ③ 이것의 $\frac{3}{4}$을 취한다. ③으로 이행하는 과정에서 단위정사각형의 $\frac{2}{5}$를 하나, 즉 단위로 보는 행위가 있기는 하지만 이것이 명백하게 드러났다고 보

기는 어렵다. 또한 이 곱셈이 $\frac{2}{5}$의 $\frac{3}{4}$'배'라는 표현도 없기 때문에 배 개념이 쉽게 드러나지는 않는다. 그 보다는 시각적 효과에 의해 등분할과 동수누가의 의미가 더 명확하게 드러나게 된다.


활동1 $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$을 계산하는 방법을 알아보시오.

- $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$을 색칠하기 위하여 전체의 $\frac{2}{5}$만큼 노란색으로 칠한 뒤 색칠한 노란색 부분의 $\frac{3}{4}$만큼 빨간색으로 칠하시오.
- 겹쳐서 색칠한 부분을 분수로 나타내어 보시오.

[그림 8] 5학년 1학기(p.188)

즉, 동수누가의 의미만이 드러나 보이는 자연수의 곱셈에서는 배를 너무 강조하고 배 개념이 가장 적절하게 드러날 수 있는 분수의 곱셈에서는 배의 의미가 전혀 드러나지 않았다는 것은 곱셈의 본질이랄 수 있는 배 개념에 대한 교수학적 고려가 적절치 않았다는 것을 의미한다.

5학년 2학기에서 곱셈이 사용되는 경우는 소수의 곱셈에서이다. 소수는 십진분수이기 때문에 소수의 곱셈 역시 본질적으로는 분수의 곱셈에서와 크게 다르지 않다.

이렇게 볼 때 자연수의 곱셈에서와 마찬가지로 분수의 곱셈에서도 '배'의 의미가 잘 드러나지 않았다고 할 수 있다. 방정숙과 이지영(2009)은 7차 교육과정의 교과서와 익힘책에서 분수 곱셈 단원에서 다루어지는 문장제를 분석하여 사용된 곱셈의 의미의 분포 비율을 조사하였다. 묶음의 의미가 15문항(62.5%), 넓이의 의미가 5문항(20.8%), 비율의 의미가 4문항(16.7%)이었다. 연구자들이 비율 상황을 몇 배의 상황으로 해석하였기 때문에 '배'라는 용어가 사용된 문항은 분수 곱셈에서 16.7%에 불과하다는 것을 말한다. 이러한 비율은 교육과정이 개정되었다 하더라도 크게 다르지는 않을 것으로 보인다.

6학년 1학기의 직육면체의 겉넓이와 부피에서 부피를 구하는 과정을 보면 곱셈의 의미를 다시 한번 생각해 볼 수 있다. 부피는 기본적으로 단위정육면체의 개수를 구하는 것이며 교과서에서는 이를 쌓기나무를 이용하여 지도하고 있다. 그런데 [그림 9]를 보면 은근슬쩍 관점이 달라지고 있음을 알 수 있다. 부피를 구하기 위해서는 단위정육면체의 개수를 세어야 하고 그러려면 가로로, 세로로, 위로 몇 개의 정육면체가 놓여 있는지를 알아보고 가로, 세로, 높이를 곱해야 한다. 그러나 [그림 9]를 보면 정육면체의 개수가 아니라 가로, 세로, 높이가 각각 몇 cm인지를 묻고 있다. 이것은 결국 암묵적으로 cm×cm×cm=㎤와 같은 단위의 곱셈을 의미하게 된다. 물론 가로가 예를 들어 3cm이면 가로로 단위정육면체

가 3개 놓여 있다는 것을 의미하므로 길이를 측정하든 개수를 구하든 동일하다고 주장할 수도 있기는 하지만, 이렇게 이해하기에는 꽤 큰 간극이 있는 것은 분명해 보인다.

● 표를 완성하시오.

	가로(cm)	세로(cm)	높이(cm)	부피(cm^3)
가				
나				

● 직육면체의 부피 구하는 방법을 식으로 정리해 보시오.

(직육면체의 부피)=($\boxed{}$)×($\boxed{}$)×($\boxed{}$)

[그림 9] 6학년 1학기(p.186)

이와 같이 교과서 내용을 분석한 결과 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 첫째, ‘배’라는 용어는 너무 일찍 도입되었으며 그 의미도 살리지 못했다. 둘째, ‘배’라는 용어는 도입 시기에만 여러 번 등장하였을 뿐 그 이후 거의 교과서에서 살아 있지 못한 용어가 되었다. 셋째, 배 개념이 효과적일 상황인 분수의 곱셈에서는 정작 ‘배’라는 용어도 등장하지 않고 그 의미도 부각되지 않고 있다. 넷째, 분수의 곱셈을 지도할 때 배 개념을 효과적으로 적용할 수 있는 막대의 확대와 축소와 같은 방법보다 직사각형의 넓이를 이용하고 있는데, 이 경우에도 배 개념보다 등분할과 동수누가를 이용하고 있다. 다섯째, 직사각형의 넓이를 구하거나 직육면체의 부피를 구할 때 단위의 개수를 구함과 동시에 지금까지 지도하지 않았던 단위의 곱셈으로 은연 중 전환하고 있다.

V. 결 론

이 연구는 곱셈의 여러 개념적 측면들을 살펴보고 교과서 분석을 통해 그 지도 방법과 지도 순서가 적절한지를 분석해 보려고 하는 것이었다.

곱셈은 동수누가, 배, 곱집합이라는 세 가지 개념적 측면을 가지고 있는 것으로 이해되고 있다. 그 중에서 배는 새로운 단위를 형성하고 이의 확대와 축소가 반영된 개념이며, 동수누가에서와는 달리 승수는 피승수와 곱 사이의 관계를 의미하는 것으로 이해된다. 이러한 세 가지 개념 외에 양과 양의 곱으로서의 곱셈을 고려할 수 있다는 것을 확인하였다.

초등학교 수학 교과서를 분석한 결과 다음과 같은 주장을 할 수 있었다.

첫째, ‘배’라는 용어가 너무 일찍 도입되었다. ‘배’는 새로운 단위의 형성이고 승수는 피승수와 승수 사이의 관계라는 점을 고려할 때 초등학교 2학년에서 굳이 ‘배’라는 용어를 사용하기에는 너무 이르며, 동수누가가 한계에 부딪히는 상황, 즉 분수의 곱셈을 지도할 때까지는 도입을 미루는 것이 좋다.

둘째, ‘배’의 의미를 살리기 위해서는 분수의 곱셈을 막대의 확대와 축소로 도입해야 한다. 막대는 그 길이를 하나, 즉 새로운 단위로 보기에 적합한 소재이다. 물론, 막대를 이용하여 그 몇 분의 몇을 구하는 것은 쉬운 일이 아니다. 분수 곱셈 알고리즘을 쉽게 발견

할 수 있는 것은 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 사용하는 것이다. 그러나 '곱'의 의미를 부각시키기 위해서는 막대를 이용하는 것이 효과적이다.

셋째, 분수의 곱셈은 직사각형의 넓이를 이용하여 지도하고 있으며, 곱셈 알고리즘을 개발하는 데 이러한 방법은 효과적이지만 '곱'의 의미를 살리지는 못하고 있다. 막대를 사용하지 않고 직사각형의 넓이 방법을 사용하기 때문에 자연스럽게 '배'라는 표현도 사용하기가 부적절해지고 있다. 이러한 점은 2학년에서 '배' 개념을 강조하던 것과 일관성이 떨어지는 문제를 야기한다.

넷째, 단위와 단위의 곱셈은 초등학교 지도 내용이 아니지만 교과서에서 그러한 요소의 가능성을 확인할 수 있었다. 양의 곱은 수학의 역사에서 오래 전부터 정의되어 사용되어 오던 것이므로 초등학교에서 이를 지도할 수도 있다고 보며, 초등학교 지도 내용으로 도입할 것을 제안한다. 분수의 곱셈을 직사각형의 넓이로 지도할 때 단위와 단위의 곱을 추가할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강홍규 (2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념 지도 방안, **대한수학교육학회지 학교수학 11권 1호**, 17-37.

교육과학기술부 (2013). **교사용지도서 1-2학년군 수학 3**. 교육과학기술부.

교육부 (2017a). **교사용지도서 수학 2-1**. 교육부.

교육부 (2017b). **초등학교 1-2학년군 수학 2-1**. 교육부.

교육부 (2017c). **초등학교 1-2학년군 수학 2-2**. 교육부.

교육부 (2017d). **초등학교 1-2학년군 수학 3-1**. 교육부.

교육부 (2017e). **초등학교 1-2학년군 수학 3-2**. 교육부.

교육부 (2017f). **초등학교 1-2학년군 수학 4-1**. 교육부.

교육부 (2017g). **초등학교 1-2학년군 수학 4-2**. 교육부.

교육부 (2015a). **5-6학년군 수학 5-1**. 교육부.

교육부 (2015b). **5-6학년군 수학 5-2**. 교육부.

교육부 (2015c). **5-6학년군 수학 6-1**. 교육부.

김영아, 김성준 (2016). 초등수학영재의 곱셈 상황에 따른 개념 이해 분석, **한국초등수학교육학회지 20(2)**. 283-309.

나귀수 (2008). 비와 비율 지도에 대한 연구-교과서 재구성을 중심으로-, **대한수학교육학회지 수학교육학연구 18권 3호**, 309-333.

방정숙, 이지영 (2009). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석, **대한수학교육학회지 학교수학 11권 4호**, 723-743.

유현주 (1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교박사학위논문.

이용률 (2010). **초등학교 수학의 중요한 지도내용**. 경문사.

우정호 (1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교출판부.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교출판부.

우정호 (2017). **개정판 학교수학의 교육적 기초(상)**. 서울대학교출판문화원.

임재훈 (2014). 선험적 지식으로서의 곱셈의 교환법칙 교육의 문제, **한국초등수학교육학회지 18(1)**, 1-17.

정영옥 (2013). 초등수학에서 자연수 곱셈 지도-곱셈의 도입과 곱셈 구구를 중심으로-, **대한수학교육학회지 학교수학 15권 4호**, 889-920.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Heath. L., (1956). *Euclid the Thirteen Books of the Elements*. Dover Publications, Inc.

New York.

Lannin, J. (2013). *Multiplication and Division into Practice 3−5*. NCTM.

Smith, D. E. (1953). *History of Mathematics vol Ⅱ*, Dover Publications, Inc. New York.

<Abstract>

The Study of Teaching Multiplication

Kang, Monbong[6]; & Kim, Jeongha[7]

Multiplication is able to be described by using repeated addition, a Cartesian product, a scalar operation, rectangular array and area in many various context. Multiplication in various problem situations is learned by various of the teaching method and the order of teaching more than any other mathematical concepts and operations in elementary school. Nevertheless, the context of multiplication leaves further room for improvement. The purpose of this study is to examine the similarities and differences between the conceptual aspects of multiplication through the literature and to analyze the appropriateness of the teaching method and the order of teaching through textbook analysis. As a result of the study, it was found that multiplication of a scalar operation was introduced too early and did not properly reflect of meaning of multiplication as a scalar operation. There is also a need to use the concept of the rectangular array or area as a meaning of multiplication two quantities.

Key words: multiplication, repeated addition, multiplication as a scalar operation, Cartesian product, rectangular area or array

논문접수: 2018. 10. 16
논문심사: 2018. 11. 05
게재확정: 2018. 11. 23

6) mbkang@ginue.ac.kr
7) [corresponding author] seakjh@hanmail.net