

## 수학영재 학생들의 분석적 증명 학습 효과 검증을 위한 시선추적기의 활용

정 경 우 (밀양고등학교 교사)  
윤 종 국 (한국교원대학교 교수)<sup>†</sup>  
이 광 호 (한국교원대학교 교수)

본 연구에서는 수학영재 학생들을 대상으로 분석법을 이용한 증명 학습을 하게 한 후 나타나는 시선의 변화 및 시선의 변화로 야기되는 학습 성취도의 변화가 어떠한지를 알아보고자 하였다. 시선의 변화를 알아보기 위해 시선추적기법을 도입하였으며, 시선추적기를 통해 분석법의 학습효과를 좀 더 객관적으로 파악하고자 하였다. 본 연구의 결과로서, 분석법을 학습한 후 학생들이 증명 문제를 풀 때, 증명 아랫부분에서부터 증명 윗부분으로 올라가는 방식으로 시선의 이동방향이 변화하였으며 증명 아랫부분에 대한 시선 점유 비율이 윗부분에 비해 높아짐을 알 수 있었다. 또한 분석법 학습으로 야기된 시선의 변화는 증명 학습 성취도와 상관관계가 있으며 증명 학습 성취도를 향상시킨다는 것을 알 수 있었다.

### I. 서론

NCTM(2000)에 의하면 수학적 추론과 증명을 수학의 가장 근본적인 측면으로 인식할 수 있으며 2015 개정교육과정에서도 6가지 수학교육역량 중 추론을 두어 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력을 강조하고 있다(교육부, 2015). 하지만 대다수의 학생들은 증명을 어려워할 뿐만 아니라 실험, 실측의 방법으로 증명을 대체할 수 있다고 생각하며 증명의 의의에 대해서도 의문을 품고 있다(류성립, 1998). 또한 증명을 학습한 이후에도 증명을 제대로 수행할 수 없음이 여러 선행연구에서 보고되었고(Fischbein & Kedem, 1982; Senk, 1985; Healy & Hoyles, 2000), 이에 대한 대안 중 하나로 분석법이 제안되어 왔다(강문봉, 1992; 나귀수, 1998; 우정호, 2000; Polya, 1971). 실제로 분석법을 수업에 적용한 결과, 분석법 학습을 통해 증명 방법을 효과적으로 찾을 수 있었으며 논리적인 사고에도 많은 도움이 된다고 선행연구에서 밝히고 있다(나귀수, 2009; 류희찬, 이수연, 2009).

교육부는 2013년 10월에 '제3차 영재교육진흥 종합계획'을 발표하여 지난 2차 계획에 대한 성과평가 및 분석을 통해 5개 분야에 걸쳐 17개 추진과제를 제시하였다. 5개 분야 중 하나로 영재교육의 질적 수준을 제고하기 위해 수요자 중심의 영재교육과정을 제공할 것을 강조하였다. 그에 대한 추진과제로 학생 맞춤형 영재교육 제공, 창의·융합형 영재교육 콘텐츠 개발, 영재교육 프로그램 구성·운영방식 개선, 영재교육 프로그램 질 관리 체제 강

\* 접수일(2018년 6월 15일), 심사(수정)일(1차: 2018년 9월 4일, 2차: 2018년 9월 19일), 게재확정일(2018년 9월 21일)

\* ZDM분류 : D40, U30

\* MSC2000분류 : 97D40

\* 주제어 : 증명, 분석법, 시선추적기.

<sup>†</sup> 교신저자 : jgyun69@knue.ac.kr

\* 본 논문은 정경우(2018)의 석사학위 논문의 일부를 재구성 한 것임.

화를 제시하였다(교육부, 2013). 이 가운데 맞춤형 영재교육을 위해서는 영재 학생들의 사고 특성을 잘 파악하는 것이 중요한데 그동안 수학영재 학생들의 사고 특성을 파악하기 위한 선행 연구들은 대부분 문제기반 학습지나 설문지, 면담을 통해 이루어져 왔다(나귀수, 2011; 고은성, 2012; 김경은, 서혜애, 김동화, 2016). 이러한 연구들은 대부분 간접적이면서 결과 위주의 분석에 의존하고 있어 영재 학생들의 사고 및 행동의 특성을 직접적으로 표출하기에는 미비한 실정이다.

한편, Cavanagh(1992), McFadden et al.(2002)의 연구에 의하면 어떤 대상에 대한 시선의 이동을 추적하면 그 대상에 대한 시각적 주의 여부도 직접적으로 판단할 수 있다고 하였다. 이에 따라 최근 국내·외에서 시선추적기법을 활용한 교육 연구(김소영, 변정호, 이일선, 권용주, 2013; 이소라, 서혁, 2013; 이미진, 이광호, 2015; 한미향, 권승혁, 권용주, 2015; Alcock et al., 2015)들이 활발히 이루어지고 있다. 시선추적기법의 장점으로는 연구 방법에 대한 과학성과 객관성을 확보할 수 있고 의식적인 안구운동 뿐만 아니라 무의식적인 안구운동을 분석할 수 있기 때문에 연구 참여자의 습관화된 행동을 분석할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 중학교 3학년 수학영재 학생들을 참여자로 하여 기존의 증명 문제 해결에 대한 사고 과정을 시선의 변화를 통해 알아보고자 한다. 또한 분석법을 활용한 수업 이후에 학생들의 시선 변화를 파악함으로써 분석법의 효과에 대한 객관적인 자료를 제공하여 수학영재교육에도 도움을 주고자 한다.

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 아래와 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 분석법을 학습하기 전과 후의 학생들의 증명 학습에서 나타나는 시선의 변화는 어떠한가?
2. 분석법을 학습하기 전과 후의 학생들의 시선의 변화와 증명 학습 성취도의 상관관계는 어떠한가?

## II. 이론적 배경

### 1. 분석법과 종합법

분석법은 기원전 6세기경에 피타고라스학파의 수학자들에 의해 사용되었고 플라톤에 의해 그 방법이 제안되었으며, 기원전 3세기경의 그리스 수학자 파푸스에 의해서 체계적으로 정리되었다. 파푸스는 분석법과 종합법에 대해 다음과 같이 말하고 있다. 분석법에서는 증명해야 할 것을 참인 것처럼 가정한 후 이것이 선행하는 어떤 것으로부터 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자의 선행자는 무엇인가 문기를 계속하여, 결국 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 이르게 된다. 이러한 절차를 ‘분석’, ‘거꾸로 풀기’ 또는 ‘역행적 추론’이라고 부른다. 종합법에서는 그 과정을 반대로 하여, 분석법에서 제일 마지막에 도달한 지점, 즉 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것으로부터 시작한다. 그로부터 분석법에서 그에 선행한 것을 이끌어내며, 분석 과정을 되밟아 가면서 마지막에 요구하고 있는 것에 도달할 때까지 연역적 과정을 계속한다. 이러한 절차를 ‘종합’, ‘구성적 풀이’ 또는 ‘전진적 추론’이라고 부른다(Polya, 1971). 분석과 종합에 대한 파푸스의 설명을 통해 우리는 다음을 알 수 있다. 분석법을 통해 어떤 추측이 참인지 거짓인지를 알 수 있으며, 또한 추측이 참일 때 분석의 과정을 역으로 거침으로써 추측을 정당화할 수 있다. 따라서 분석법은 발견의 과정인 동시에 정당화의 과정으로 볼 수 있는 것이다(강문봉, 1992).

분석법에는 크게 두 가지의 유형이 있다. 증명하고자 하는 결론을 참인 것으로 가정하고, 그 선행조건인 충분조건을 계속 찾아나가서 결국은 참임이 밝혀져 있는 명제에 도달함으로써 증명하고자 하는 명제가 참임을 밝히는 방법을 강문봉(1992)은 ‘환원적 분석’이라 하였다. 다음으로 구하고자 하는 답을 이미 구한 것처럼 가정하고, 그로부터 유도될 수 있는 필요조건을 거듭 찾아가는 방법을 강문봉(1992)은 ‘연역적 분석’이라 하였다. 본 연구에서는 환원적 분석 방법을 이용하여 학생들에게 분석법을 통한 증명 학습 효과를 알아보고자 하였다.

## 2. 시선추적기법

시선추적기법은 실시간으로 안구의 움직임을 추적하여 연구 참여자가 무엇을 어떻게 보는가를 분석하는 연구 방법을 말한다(Duchowski, 2007; Holmqvist et al., 2011). 시선추적기법은 연구 방법에 대한 과학성과 객관성을 확보할 수 있고 의식적인 안구운동 뿐만 아니라 무의식적인 안구운동을 파악할 수 있기 때문에 연구 참여자의 습관화된 행동을 분석할 수 있다. 또한 적외선을 연구 참여자의 눈에 조사하여 동공의 중심위치를 추적하기 때문에 비침습적이며 다른 신경과학 연구방법에 비해 높은 안전성을 갖고 있다(신원섭, 2016). 이러한 이점으로 최근 마케팅, 교육연구 등의 다양한 분야에서 활용되고 있다. 국내에서 시선추적을 활용한 연구 중 최근 10년 동안(2005년~2016년) 국내 학술지논문에 게재된 교육관련 논문 45편을 살펴보면 2012년부터 시선추적을 활용한 연구가 2012년 6편, 2013년 11편, 2014년 9편, 2015년 11편으로 증가추세를 알 수 있고, 연구영역을 살펴보면 과학교육과 관련된 연구가 26편, 국어교육과 관련된 연구가 16편인 반면 수학교육과 관련된 연구는 1편에 불과하였다(신원섭, 2016). 과학교육에 관한 연구는 과학영재 학생과 일반학생의 시선 추적 특성 연구(한미향, 권승혁, 권용주, 2015), 과학영재 관별을 위한 시선추적 기반 과제집착력 측정도구 개발 연구(김소영, 변정호, 이일선, 권용주, 2013), 과학 학업성취도 문항풀이에서의 시선추적 연구(김소영, 변정호, 이일선, 권용주, 2012), 과학교과서 읽기 과정 분석 연구(박효정, 신동훈, 2015) 등 다양한 주제로 연구가 진행되었다. 학생을 대상으로 한 연구뿐만 아니라 교사를 대상으로 한 연구도 진행되었다. 변정호, 이일선, 권용주(2011)는 교사를 대상으로 하여 시선 추적을 통해 교사의 시선 분배 및 교수행동의 패턴을 알아보고 컨설팅을 통해 수업 개선을 꾀하는 연구를 진행하였다. 국어교육에 관한 연구는 다양한 주제의 읽기 과정 분석 연구(이소라, 서혁, 2013; 이소라, 2014; 김현진, 2015; 서혁, 김지희, 오은하, 이소라, 2015)가 많은 비중을 차지하고 있다. 한편, 수학교육에 관한 연구로는 초등학교 학생들의 등호의 관계적 이해를 알아보는 연구(이미진, 이광호, 2015)가 있는데, 이는 시선추적기를 활용하여 웹기반 저술 교수학습 프로그램을 이용한 대수적 실험이 학생들의 방정식에 대한 관계적 사고를 형성시키는지 시선 움직임으로 확인하였다. 이처럼 시선추적기를 활용한 연구는 다양한 분야에서 연구가 진행되고 있으나 국내에서 수학교육에 관한 연구는 상대적으로 미비한 실정이다. 국외에서 시선추적기를 통해 증명 과정을 알아본 연구로는 Alcock et al.(2015)이 있는데, 이는 시선추적기를 활용하여 학부생과 전문가의 증명 이해에 대한 시선 분석을 탐구하였다.

시선추적기는 연구의 목적에 따라 고정형태의 시선추적기 또는 모바일 형태의 시선추적기를 사용할 수 있다. 본 연구에서는 고정형태의 시선추적기를 사용하여 실험을 진행하였다. 학생들이 모니터를 통해 빈 칸으로 제시된 증명문제를 해결하는 동안 모니터 하단에 부착된 시선추적기에서 시선의 움직임을 감지하여 모니터에 시선 움직임이 반영된 동영상상이 생성된다. 시선움직임이 반영된 동영상상을 만들기 위해서 측정 전에 반드시 좌표 교정(calibration)과정을 거쳐야 한다. 좌표 교정 과정은 본 촬영에 앞서 참여자가 보고 있는 시선의 실제 위치를 시선추적기에 입력하여 좌표를 교정하는데, 이는 개개인의 안구 위치와 시선이 다르기 때문이다(Duchowski, 2007). 이후 분석 소프트웨어를 이용하여 특정 시점에서 어느 부분을 응시하고 있었는지를 파악하여 분석법의 효과에 대한 분석을 진행하였다. 분석을 위해서는 먼저 장면이나 이미지가 필요하다. 본 연구에서는 학생들에게 증명과정에 빈 칸이 있는 문제를 이미지로 제시하였다. 그리고 각 이미지 위에 관심영역(AOI : Areas of interest)을 설정한다. AOI는 특정영역을 참여자가 언제 얼마나 보았는가를 알기 위해 설정하는 것으로 연구의 목적에 맞추어 설정하여야 한다. 본 연구에서는 시선의 이동 방향을 파악하기 위하여 증명문제, 그림, 증명 내용 윗부분, 증명 내용 아랫부분으로 크게 4개의 AOI를 설정하여 분석에 활용하였다. 시선추적의 분석 결과는 총 시선 수(gaze number)와 특정 AOI에 대한 시선고정 수(fixation number), 시선 고정율(fixation rate), 각 AOI별로 처음 시선이 들어온 시각(time to first fixation), 각 AOI별로 시선이 머물렀던 총 시간(total fixation duration), AOI 간의 시선이동빈도(gaze movement), 시선 궤적(gaze plot) 등의 다양한 자료들로 산출된다.

지금까지 선행논문들에 의해 분석법이 증명 학습의 효과적인 방법으로 제시되어왔다. 본 연구는 그런 선행연구들의 결과를 시선추적기법을 이용하여 분석법의 효과를 실증적으로 규명하고 학생들의 학습 성취에 어떠한 영향을 줄 수 있는지를 알아보려고 한다. 이를 위해 시선추적기를 통한 양적 데이터와 사후 면담을 통한 질적 데이터를 활용하고자 한다.

### III. 방법 및 절차

본 연구에서는 시선추적기를 활용하여 학생들의 시선분석 자료를 수집하고 통계적으로 분석한 다음, 사후 면담을 통해 사고 과정을 알아보는 설명적 순차 설계로 연구를 진행하였다.

#### 1. 연구 참여자

본 연구는 수학영재 학생들을 참여자로 하여 분석법을 적용한 후에 학생들의 증명 학습 방법의 변화를 알아보는 것이 주목적이다. 2015 개정 수학교육과정에서 연역적 정당화가 중학교 2학년에 도입되고 있으므로 보다 형식적인 증명 학습을 다루는 본 연구에서는 중학교 3학년 학생 중 수학영재 학생들을 참여자로 하였다. 예비실험과 본 실험을 진행하기 위해서 수학영재 학생 두 집단을 섭외하였다. 예비실험 참여자로는 대구광역시 소재 G 중학교 수학교사의 도움을 받아 영재교육을 받은 경험이 있는 학생들 중 실험에 참여하고자 희망하는 학생 8명을 선발하였다. 그리고 본 실험 참여자로 충북 청주시 소재 K대학교 부설 영재교육원 소속 학생 12명을 섭외하였다. 본 실험 참여자로 선정한 12명의 학생들은 세종시로부터 영재 위탁교육을 받고 있는 중학교 3학년 학생들이다.

시선추적과정에서 참가자가 눈을 깜박이거나, 아래를 볼 때, 화면에서 떨어진 곳을 볼 때 등의 여러 상황에서는 시선 응시 지점(gaze point)이 잡히지 않는다. 이로 인하여 데이터 손실이 발생하고, 이 손실 비율을 제외하고 시선추적기가 데이터를 획득한 비율을 시선추적률이라 한다. 본 실험에서는 12명의 연구 참여 학생들 중 사전, 사후 검사의 시선추적률이 75%이상인 학생 8명(S1~S8)을 연구 대상으로 최종 선정하였다. 최종 선정된 학생들은 남학생 5명, 여학생 3명이었으며 서로 다른 5개 중학교에 소속되어있다.

#### 2. 과제 개발

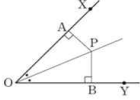
##### 가. 검사도구개발

분석법을 활용한 수업의 효과를 알아보기 위해 사전, 사후 검사지를 개발하였다. 검사문항은 2009 개정교육과정의 중학교 2학년 수학 교과서(김원경 외(2010), 류희찬 외(2013a)), 중학교 3학년 수학 교과서(김원경 외(2011), 류희찬 외(2013b))와 평면기하의 아이디어(박승동, 2006)를 참고하여 사전, 사후 검사지 각 6문항씩을 개발하였다. 각 문항에서 증명 과정 가운데에 빈 칸을 두어 학생들이 빈 칸을 채우는 학습을 하도록 문항을 구성하였으며, 문제 수준을 다양하게 하여 학생들이 쉬운 문제에서부터 어려운 문제까지 차례대로 풀어 볼 수 있도록 하였다. 검사도구의 내용 타당도를 확보하기 위해 수학교육전문가 2인과 중·고등학교에서 영재교육의 현장경험이 있는 수학교육 또는 수학영재교육 전공 대학원생 7인이 참여한 정기적 세미나를 통해 검사지의 내용타당도를 점검하였다. 개발된 검사 도구는 예비실험 후 난이도 조정을 위해 문항 수정 과정을 거쳤으며 동형검사를 실시하여 사전, 사후 검사지가 동형임을 확인한 후에 검사지 개발을 확정지었다. 개발한 사전, 사후 검사지의 예시는 [그림 III-1], [그림 III-2]와 같다.

1.  $\angle XOY$ 의 이등분선 위의 한 점 P에서 반직선 OX, OY에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 할 때,  $PA=PB$ 임을 보여라.

[증명] 두 직각삼각형 OPA와 OPB에서  
 $OP$ 는 공통인 변 ..... ①  
 $\angle POA = \angle POB$  ..... ②  
 $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$  이고,  
 ( ) 이므로  
 ( ) ..... ③

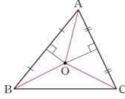
①, ②, ③에 의하여  
 $\triangle OPA \cong \triangle OPB$  (ASA 합동)이다.  
 즉,  $PA=PB$   
 따라서  $\angle XOY$ 의 이등분선 위의 한 점 P에서  
 반직선 OX, OY에 이르는 거리는 서로 같다.



2. 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

[증명] 오른쪽 그림과 같이  $\triangle ABC$ 에서  
 변 AB와 변 AC의 수직이등분선의 교점을 O라고 하자.  
 점 O는 변 AB의 수직이등분선 위의 점이므로  
 $OA=OB$  ..... ①  
 ( ) ..... ②  
 ( ) ..... ③

①, ②에 의하여  
 $OB=OC$  이므로  
 점 O는 변 BC의 수직이등분선 위의 점이다.  
 즉,  $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

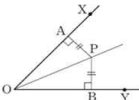


[그림 III-1] 사전 검사지 예시

1.  $\angle XOY$ 의 두 변에서 같은 거리에 있는 한 점을 P라고 하고, 점 P에서  $\angle XOY$ 의 두 변에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 할 때,  $\angle AOP = \angle BOP$ 임을 보여라.

[증명] 두 직각삼각형 OPA와 OPB에서  
 $PA=PB$  ..... ①  
 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$  ..... ②  
 ( ) ..... ③

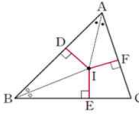
①, ②, ③에서 ( )에 의하여  
 $\triangle OPA \cong \triangle OPB$  이므로  
 $\angle AOP = \angle BOP$ 이다.  
 따라서 점 P는  $\angle XOY$ 의 이등분선 위에 있다.



2. 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

[증명] 오른쪽 그림과 같이  $\triangle ABC$ 에서  
 $\angle A$ 와  $\angle B$ 의 이등분선의 교점을 I라고 하고,  
 점 I에서 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을  
 각각 D, E, F라고 하자.  
 점 I는  $\angle A$ 의 이등분선 위의 점이므로  
 $ID=IF$  ..... ①  
 ( ) ..... ②  
 ( ) ..... ③

①, ②에 의하여  
 $IE=IF$   
 이므로 점 I는  $\angle C$ 의 이등분선 위의 점이다.  
 즉,  $\triangle ABC$ 의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

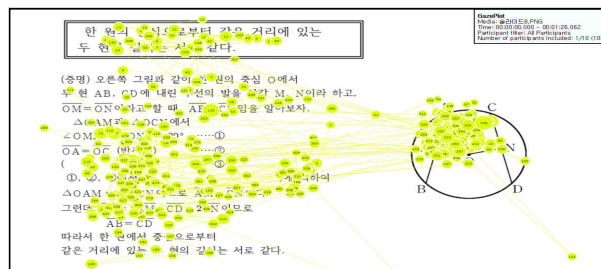


[그림 III-2] 사후 검사지 예시

나. 교수 실험 활동지 개발

분석법을 활용한 교수실험을 진행하기 위해 2009 개정교육과정의 중학교 2학년 수학 교과서(김원경 외(2010), 류희찬 외(2013))와 중학교 3학년 수학 교과서(김원경 외(2011), 류희찬 외(2013)) 중 도형의 성질 단원에서 제시된 증명 문제를 분석법의 형식으로 바꾸어 학생들이 직접 증명을 구성할 수 있도록 활동지를 구성하였다. 활동지의 양식은 이채연(2009)을 참고하였다.

3. 예비 실험



[그림 III-3] 시선 궤적(gaze plot) 분석 예시

예비실험은 2017년 5월 11일에 G중학교 동아리 활동시간을 이용하여 진행되었다. 이 실험에서 [그림 III-3]에 나타난 시선 궤적(gaze plot)과 더불어 각 AOI별로 처음 시선이 들어온 시각(time to first fixation)을 분석한 결과 증명의 윗부분에서 아랫부분으로 시선이 이동한 경우가 97.5%에 이르렀다. 반면 증명의 아랫부분에서 윗부분으로 시선이 이동한 경우는 2.5%에 불과하였다. 이 결과를 통해, 표본의 오차가 있을 수 있지만 대다수의 학생들이 증명 문제를 해결하면서 위에서부터 아래의 방향으로 차례대로 증명과정을 읽으며 학습하고 있다는 것을

합리적으로 의심해 볼 수 있게 되었다. 또한 각 AOI별로 시선이 머물렀던 총 고정 지속시간(total fixation duration)을 계산해 본 결과 증명의 윗부분에 시선이 머무르는 시간이 증명의 아랫부분에 시선이 머무는 시간의 약 3배가 된다는 것을 알 수 있었다.

4. 본 실험

가. 사전검사 및 교수 실험

K대학교 부설 영재교육원 소속 학생 12명을 참여자로 하여 본 실험 이전에 시선추적기를 활용한 본 연구에 대해 사전 안내를 하고 학부모 및 학생 동의를 구하여 실험에 임하였다. 사전 검사는 2017년 6월 3일에 실시하였다. 검사 전 주의사항을 숙지시키고 학생 1명씩 연구실로 와서 모니터에 제시되는 사전 검사지의 문제를 푸는 방식으로 검사를 진행하였다. 각 학생마다 좌표 교정의 과정을 거쳤으며 각 문항별로는 시간제한을 두지 않아 충분히 생각하고 답할 수 있도록 하였다. 문제의 빈 칸에 들어갈 내용을 큰 소리로 대답하면 연구자가 그 내용을 녹음하여 채점 및 분석에 활용하였다. 사전 검사 후 교수 실험은 2017년 7월 1일에 실시하였다. 교수 실험은 총 4차시의 수업을 진행하였으며 각 차시별 수업내용은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 교수 실험의 내용과 수업 방법

차시	학습 내용	수업 방법
1차시 (9:00~9:50)	증명의 의의 및 증명 학습 실태	① PPT 자료를 통한 교사의 설명 ② 교사와 학생들 간의 토론
2차시 (10:00~10:50)	분석법과 종합법	
3차시 (11:00~11:50)	분석법을 통한 증명 실습(1)	① 활동지를 이용하여 학생 각자 분석법을 통해 증명 방법 찾고 종합법으로 다시 표현하기 ② 교사와 학생들 간의 토론 및 발표와 교사의 설명 ③ 학생 각자의 증명 방법과 표현을 반성하고 정리하기
4차시 (12:00~12:50)	분석법을 통한 증명 실습(2)	

평행사변형 ABCD에서 대변의 길이가 서로 같음을 증명하여라.

1. 사전활동  
주어진 명제에서 가정과 결론을 구분하여 기호로 표현해 봅시다.

- 가정(어미) 알고 있는 것  
⇒  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- 결론(구하고자 하는 것)  
⇒  $\overline{AD} = \overline{CB}, \overline{AB} = \overline{CD}$

2. 분석적 사고활동

①  $\overline{AB} = \overline{DC}, \overline{AD} = \overline{BC}$ 가 성립하려면 무엇을 보여줘야 할까?  
⇒  $\overline{AB}$ 와  $\overline{DC}$ ,  $\overline{AD}$ 와  $\overline{BC}$ 를 포함하는 합동인 삼각형이 있으면 충분하다.  
대각선  $\overline{AC}$ 을 그으면  $\triangle ABC$ 와  $\triangle CDA$ 는  $\overline{AB}$ 와  $\overline{DC}$ ,  $\overline{AD}$ 와  $\overline{BC}$ 를 포함하는 삼각형이다.  
즉,  $\triangle ABC = \triangle CDA$  을 보여줘야 충분하다.

②  $\triangle ABC = \triangle CDA$ 임을 보여주기 위해서는 무엇을 알아야 할까?  
⇒ 삼각형의 합동조건에는  $\angle BAC = \angle DCA$  합동,  $\angle BCA = \angle DAC$  합동이 있다.  
이 세 가지 조건 중 우리가 알고 있는 사실을 통해 어떤 조건을 만족하는지 생각해봅시다.

③ 평행선의 성질에 의해  $\angle DAC = \angle BCA$   
평행선의 성질에 의해  $\angle BAC = \angle DCA$   
 $\overline{AC}$ 는 공통이므로

$\triangle ABC = \triangle CDA$  합동 조건에 의해  $\triangle ABC = \triangle CDA$ 이다.  
①  $\triangle ABC = \triangle CDA$  이므로 대응변 관계에 의해  $\overline{AB} = \overline{CD}$   
 $\overline{AD} = \overline{CB}$ 이다.

3. 종합적 사고활동  
위의 분석적 사고활동을 토대로 주어진 명제를 종합적 방법으로 증명하여 봅시다.

AC 공통  
평행사변형이므로  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ,  
 $\angle DAC = \angle BCA$ ,  
 $\angle BAC = \angle DCA$   
 $\triangle ABC = \triangle CDA$  (ASA 합동) 이므로  $\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{AD} = \overline{CB}$

[그림 III-4] 분석법을 통한 증명 구성 실습 예시

빔프로젝터를 이용하여 수업을 진행하였으며 1, 2차시에는 사전에 준비한 PPT 자료를 활용하여 증명의 의의

와 학습 실태, 분석법과 종합법의 의미와 특징, 차이점 등에 대하여 자세히 학습하였고, 3, 4차시에는 활동지를 이용하여 분석법을 통해 학생들이 직접 증명을 구성하는 실습을 해보았다. 학생들은 활동지의 안내에 따라 사고하며 활동지의 빈 칸을 채웠으며, 분석법으로 증명을 구성하고 난 뒤 종합법으로 다시 증명을 기술하는 과정도 학습하였다. 실제 학생들이 실습한 예시는 [그림 III-4]와 같다.

#### 나. 사후 검사와 면담

사후 검사는 2017년 7월 1일에 오전 수업을 마치고 오후 시간(14:00~18:30)을 이용하여 사전 검사와 동일한 과정으로 진행하였다. 사후 면담은 2017년 7월 22일에 실시하였다. 면담 형식은 반구조화된 면담으로 미리 준비한 질문들을 기본으로 하고 학생들의 답변에 따라 추가적인 질문을 더 하여 학생들의 사고과정을 심층적으로 파악하고자 하였다. 면담 내용은 사전 동의하에 녹음하였으며 증명에 대한 평소 생각과 분석법을 활용한 수업의 효과 등에 대해서 준비된 질문을 하고 학생이 자유롭게 대답할 수 있도록 하였다. 연구자가 준비한 질문은 <표 III-2>와 같이 4가지 문항으로 구성하였다.

<표 III-2> 사후 면담 질문 내용

문항	질문 내용
1	증명 학습에 대한 평소 생각을 말해주세요
2	7월 1일에 했던 분석법 수업에 대한 소감을 자유롭게 말해주세요
3	분석법 학습 후에 증명 문제에 대한 시선의 변화를 느낄 수 있었나요?
4	분석법을 통한 시선 변화와 증명 학습간의 상관관계가 있다고 생각하나요?

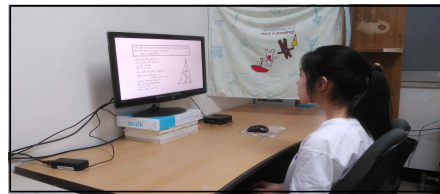
### 5. 자료 수집 및 분석

#### 가. 자료 수집

본 연구의 자료 수집을 위해 사용한 시선추적기는 스웨덴 Tobii사의 Tobii pro X2-60이라는 제품이다([그림 III-5]). 이 고정형 시선추적기는 적외선을 각막에 반사시킨 각막광을 카메라가 인지하여 추적하는 원리(Bright Pupil System)로 시선움직임을 기록한다. 1° 미만의 시각적 각도까지 측정가능하며 초당 60개의 시선데이터를 수집할 수 있어서 비교적 정확한 데이터를 얻을 수 있다. 23인치 모니터를 사용하였으며 모니터 화면과 연구 참여자의 거리는 약 60~70cm가 되도록 하였다. 또한 학생들이 고개를 숙이지 않고 편안한 자세에서 문제를 풀 수 있도록 의자 높이와 모니터 높이를 조정하였다([그림 III-6]).



[그림 III-5] Tobii pro X2-60



[그림 III-6] 실제 실험 장면

시선추적기를 통한 데이터는 고정(Fixation)과 도약(Saccade)을 바탕으로 하기 때문에 고정을 어떻게 정의하느냐가 데이터 분석에 있어 매우 중요하다. 본 연구에서는 고정(fixation)의 기준을 정하고자 Tobii Fixation filter를 사용하였다(Kaldy, Kraper, Carter & Blaser, 2011). 이 필터는 신호의 급격한 변화가 있을 경우, 시선이 다른 고정점으로 이동한 것으로 인식하는 필터이다. 본 연구는 연구의 특성상 증명 과정을 위아래 또는 좌우로 빠르게 움직이는 시선의 이동이 많아 이 필터가 가장 적합한 필터라고 판단하였다. Tobii Fixation filter는 시선

신호의 빠른 변화를 확인하여 시선 신호가 주어진 공간 반경보다 가까운지를 확인하여 고정(Fixation)과 도약(Saccade)을 판단한다(Kaldy et al., 2011). 공간 반경의 임계값은 Kaldy et al.(2011)의 연구와 같이 35pixels(약 1°의 시야각)로 설정하였고, 35pixels/millisecond를 기준으로 그보다 작은 움직임은 고정(Fixation)으로, 그보다 큰 움직임은 도약(Saccade)으로 판단하였다.

나. 자료 분석


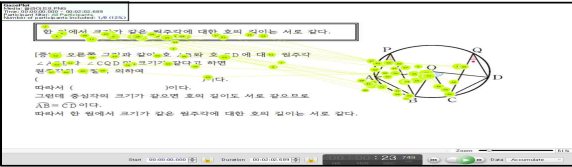
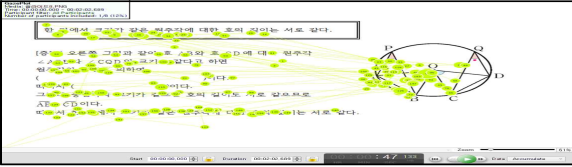
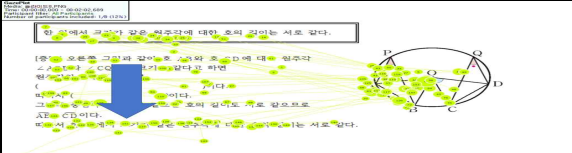
본 연구 목적을 달성하기 위하여 자료 분석은 시선추적기 분석 프로그램인 Tobbi studio와 통계 프로그램인 SPSS 22.0 두 가지를 이용하여 실시하였다. Tobbi studio를 통하여 처음 고정까지 걸리는 시간(time to first fixation), 총 고정 지속 시간(total fixation duration) 등의 시선 이동에 대한 수량적 데이터와 히트맵 이미지(heatmap), 시선 궤적(gaze plot) 등의 질적 데이터를 확보하여 분석에 활용하였다. 또한 SPSS 22.0을 이용하여 양적 데이터로 얻은 값이 사전, 사후 검사 결과 통계적으로 유의미한 차이를 나타내는지 알아보기 위하여 대응 표본 t검정을 실시하고, 시선 변화와 증명 학습 성취도 간의 상관관계를 파악하기 위하여 상관분석을 실시하였다.

IV. 결과

1. 분석법을 학습하기 전과 후의 시선의 변화

가. 시선의 이동 경로 분석

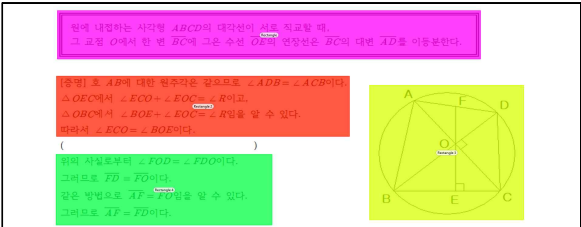
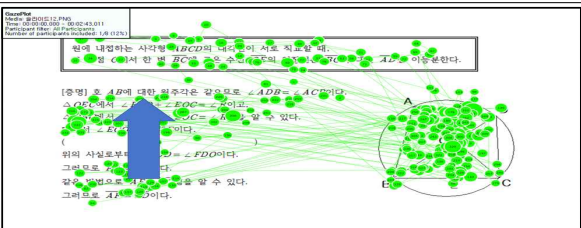
<표 IV-1> 하향 이동 예시

구분	시선 궤적
AOI 설정	
증명 윗부분 (23초 장면)	
증명 아랫부분 (47초 장면)	
시선 이동 방향	



본 연구에서는 학생별로 각 문제에 대한 시선 궤적을 분석하여 학생들이 증명 문제를 풀 때의 시선 이동 경로를 확인하였다. <표 IV-1>을 보면 23초인 화면에서는 시선의 고정이 증명 윗부분에 집중되어 있고 증명 아랫부분에는 거의 없는 것을 볼 수 있는 반면, 47초인 화면을 보면 증명 아랫부분에 시선의 고정이 다수 찍혀 있는 것을 볼 수 있다. 이를 통해 연구자는 학생이 증명의 윗부분을 먼저 보고 아랫부분을 본 것으로 판단하고, 정량적인 분석을 위해 관심영역(AOI) 중 증명 윗부분 안에 있는 고정(fixation)들의 고정발생시각의 평균을 계산하여 그 값을  $\beta_1$ 이라 하고, 증명 아랫부분 안에 있는 고정(fixation)들의 고정발생시각의 평균을 계산하여 그 값을  $\beta_2$ 라 하여,  $\beta_1 < \beta_2$ 인 경우를 하향이동이라 정의하였다.

<표 IV-2> 상향 이동 예시

구분	시선 궤적
AOI 설정	
증명 아랫부분 (41초 장면)	
증명 윗부분 (1분 36초 장면)	
시선 이동 방향	

한편, <표 IV-2>를 보면 41초인 화면에서는 시선의 고정이 증명 아랫부분에 집중되어 있고 증명 윗부분에는 거의 없는 것을 볼 수 있는 반면, 1분 36초인 화면을 보면 증명 윗부분에 많은 시선의 고정이 찍혀 있는 것을

볼 수 있다. 이 경우 위와 마찬가지로 정량적인 분석을 위해  $\beta_1, \beta_2$ 를 같은 방법으로 정의하고  $\beta_1 > \beta_2$ 인 경우를 상향이동이라 정의하였다.

<표 IV-3>, <표 IV-4>는 학생들의 시선 이동 방향을 사전, 사후 검사별로 분석한 결과이다. 사전 검사에서는 96%(46문항/48문항)가 증명의 윗부분에서 아랫부분으로 시선이 이동하는 하향이동을 보였으며, 단 4%(2문항/48문항)만이 증명의 아랫부분에서 윗부분으로 시선이 이동하는 상향이동을 보였다. 하지만 사후 검사에서는 69%(33문항/48문항)가 상향이동을 보였고, 31%(15문항/48문항)가 하향이동을 보였다.

<표 IV-3> 사전 검사 시선 이동 방향 분석

학생	문제1	문제2	문제3	문제4	문제5	문제6
S1	하향	하향	하향	하향	하향	하향
S2	하향	하향	하향	하향	하향	상향
S3	하향	하향	하향	하향	하향	하향
S4	하향	하향	하향	하향	하향	하향
S5	하향	하향	하향	하향	하향	하향
S6	하향	하향	하향	하향	하향	하향
S7	하향	하향	하향	하향	하향	하향
S8	하향	하향	하향	하향	하향	상향

<표 IV-4> 사후 검사 시선 이동 방향 분석

학생	문제1	문제2	문제3	문제4	문제5	문제6
S1	상향	상향	상향	상향	상향	상향
S2	상향	상향	상향	상향	상향	상향
S3	상향	하향	하향	하향	하향	상향
S4	상향	상향	상향	상향	상향	상향
S5	상향	상향	하향	상향	상향	상향
S6	상향	하향	하향	상향	상향	상향
S7	상향	하향	하향	하향	하향	하향
S8	하향	상향	하향	상향	상향	하향

이 결과를 간단하게 표로 정리하면 <표 IV-5>와 같다.

<표 IV-5> 사전, 사후 시선 이동 방향 비교 (단위: %)

시선이동 방향	사전 검사	사후 검사
하향이동 비율	96	31
상향이동 비율	4	69

사전 검사에서는 위에서 아래로 내려오는 시선 이동 유형이 지배적이었지만 분석법 수업 이후의 사후 검사에서는 학생들의 시선이 증명의 결론, 즉 증명의 아랫부분을 먼저 보고 증명의 윗부분으로 시선이 이동하는 것은

로 바뀐 것을 알 수 있다. 사전, 사후 검사에서 학생별로 시선 이동의 방향의 비율을 비교한 것은 <표 IV-6>과 같다.

<표 IV-6>을 보면 학생1과 학생4의 경우에는 사전 검사에서는 모든 문제에서 위에서 아랫방향으로 시선이 이동하였으나 사후 검사에서는 모든 문제에서 아래에서 윗방향으로 시선이 이동하여 완벽히 시선 방향이 바뀐 것을 알 수 있다. 사전 검사에서는 대부분의 학생들이 하향이동을 보였으나, 사후 검사에서는 학생3과 학생7을 제외한 모든 학생들의 상향이동한 비율이 과반임을 알 수 있다.

<표 IV-6> 사전, 사후 검사의 시선 이동 방향 비율의 학생별 비교 (단위: %)

학 생	사전 검사	사후 검사
	학생별 하향이동 비율	학생별 상향이동 비율
S1	100	100
S2	83	100
S3	100	33
S4	100	100
S5	100	83
S6	100	67
S7	100	17
S8	83	50

$$\text{학생별 하향 이동 비율} = \frac{\text{하향 이동한 문항 수}}{\text{전체 문항 수 (6문항)}} \times 100 \quad \text{학생별 상향 이동 비율} = \frac{\text{상향 이동한 문항 수}}{\text{전체 문항 수 (6문항)}} \times 100$$

나. 각 AOI별 시선의 분배 분석

앞에서는 시선의 이동 경로를 살펴보았고, 여기에서는 시선이 어느 부분에 얼마나 오래 머물렀는지를 사전, 사후 검사로 구분하여 알아봄으로써 학생들의 시선 분배에 차이가 있는지를 보고자 한다. 각 AOI마다 시선이 머물렀던 총 고정 지속시간(total fixation duration)의 데이터를 분석하여 학생별로 시선의 분배 비율을 사전, 사후 검사별로 알아본 것은 <표 IV-7>, <표 IV-8>과 같다.

$$\text{각 AOI별 시선의 분배 비율} = \frac{\sum_{n=1}^6 (\text{문항 } n\text{번에서 각 AOI에 시선이 머문 시간})}{\sum_{n=1}^6 (\text{문항 } n\text{번을 푸는데 걸린 시간})} \times 100$$

<표 IV-7>, <표 IV-8>을 보면 대부분의 학생들이 그림에 가장 많은 시선이 머물렀고 그 다음으로 증명 윗부분, 증명 아랫부분 순이며, 명제가 가장 낮은 비율을 차지한 것은 사전, 사후 검사에서 동일한 결과를 보였다. 사전, 사후 검사의 차이를 살펴보기 위해 다음과 같이  $\alpha$  값을 정의한다.

$$\alpha \text{ 값} = \frac{\text{시선이 증명의 윗부분에 머문 비율}}{\text{시선이 증명의 아랫부분에 머문 비율}}$$

&lt;표 IV-7&gt; 사전 검사 각 AOI별 시선의 분배 비율 (단위: %)

학생 \ AOI	명제	증명上	그림	증명下	합계
S1	7.26	25.34	57.59	9.82	100.00
S2	6.03	23.72	55.78	14.48	100.00
S3	7.71	31.94	51.61	8.74	100.00
S4	7.08	21.14	58.91	12.87	100.00
S5	3.54	21.94	64.78	9.74	100.00
S6	3.37	29.45	58.60	8.59	100.00
S7	9.88	32.15	45.18	12.79	100.00
S8	7.49	26.12	52.00	14.38	100.00
평균	6.55	26.47	55.56	11.43	100.00

&lt;표 IV-8&gt; 사후 검사 각 AOI별 시선의 분배 비율 (단위: %)

학생 \ AOI	명제	증명上	그림	증명下	합계
S1	8.22	20.34	58.92	12.52	100.00
S2	5.59	12.94	67.41	14.07	100.00
S3	6.04	20.06	63.25	10.65	100.00
S4	6.83	16.32	61.02	15.83	100.00
S5	3.94	7.95	80.34	7.76	100.00
S6	6.92	22.80	55.52	14.76	100.00
S7	16.72	30.46	42.71	10.11	100.00
S8	7.15	16.65	58.09	18.10	100.00
평균	7.68	18.44	60.91	12.97	100.00

&lt;표 IV-9&gt; 사전, 사후 시선의 분배 비율 비교

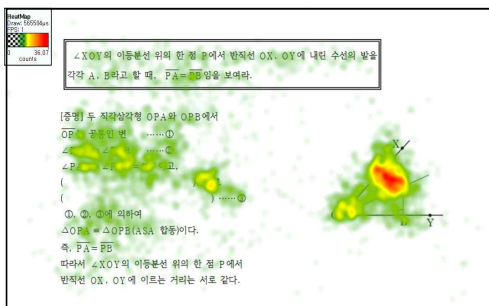
학생	사전			사후		
	증명上	증명下	$\alpha$ 값	증명上	증명下	$\alpha$ 값
S1	25.34%	9.82%	2.58	20.34%	12.52%	1.62
S2	23.72%	14.48%	1.64	12.94%	14.07%	0.92
S3	31.94%	8.74%	3.65	20.06%	10.65%	1.88
S4	21.14%	12.87%	1.64	16.32%	15.83%	1.03
S5	21.94%	9.74%	2.25	7.95%	7.76%	1.02
S6	29.45%	8.59%	3.43	22.80%	14.76%	1.54
S7	32.15%	12.79%	2.51	30.46%	10.11%	3.01
S8	26.12%	14.38%	1.82	16.65%	18.10%	0.92
평균	26.48%	11.43%	2.44	18.44%	12.98%	1.49

<표 IV-9>를 보면 사전검사에 비해 사후검사에서 증명 윗부분의 시선 분배 비율이 전체적으로 감소되었고, 증명 아랫부분의 시선 분배 비율이 전체적으로 증가된 것을 확인할 수 있다. 앞에서 정의한  $\alpha$  값을 통해 사전검사와 사후검사의 차이를 좀 더 세부적으로 알아보려고 한다. 사전  $\alpha$  값과 사후  $\alpha$  값의 차이에 대해  $t$  검증을 실시한 결과는 <표 IV-10>과 같다.

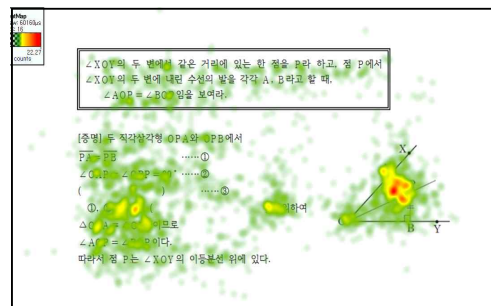
<표 IV-10> 사전, 사후  $\alpha$  값에 대한  $t$ -검증 결과<sup>1)</sup>

	사전 검사		사후 검사		$t$	$p$
	M	SD	M	SD		
$\alpha$ 값	2.4400	.77175	1.4925	.71356	3.587	.009

사전 $\alpha$  값과 사후 $\alpha$  값은 유의수준 .05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있었다.  $\alpha$  값이 감소했다는 것은 증명의 아랫부분에 대한 윗부분의 시선 분배 비율이 감소했다는 것을 의미하므로 사전 검사보다 사후 검사에서 증명의 윗부분에 비해 증명의 아랫부분을 더 오랫동안 보았다고 할 수 있다. 이와 같은 논의는 [그림 IV-1], [그림 IV-2]를 통해 쉽게 확인할 수 있다.



[그림 IV-1] 사전 검사 히트맵 이미지



[그림 IV-2] 사후 검사 히트맵 이미지

다. 시선 변화에 대한 사후 면담 내용 분석

앞서 살펴본 양적 데이터의 결과와 마찬가지로 분석법 학습 후의 시선 변화에 대해 실험에 참여한 학생 모두가 스스로 변화를 자각한다고 대답하였다. 학생들과의 면담 내용 중 의미 있는 대화를 발췌하면 다음과 같다.

<장면 IV-1> 시선 변화에 대한 학생8의 면담 내용

교사: 수업 이후에 시선의 변화를 느낄 수 있었니?

학생8: 네. 처음에는 그냥 외운대로 문제를 처음부터 계속 읽어서 문맥을 확인한 다음에 증명방식을 확인하고 위에서부터 밑으로 쪽 읽었는데 지금은 어떤 것을 증명하고 어떤 것이 핵심인지 이런 것을 먼저 보게 되었어요. 문제의 아래부터 읽음으로 해서 구하고자 하는 바를 먼저 보게 되는 그런 시선의 변화가 있었어요.

학생8은 아래부터 읽음으로 해서 구하고자 하는 바를 먼저 보게 되는 시선의 변화가 있었다고 답하였다. 시선 이동의 방향이 이전에는 위에서부터 아래로의 방향이었다면 수업 후에는 아래에서 위로의 방향으로 바뀌었다는 것을 보여준다. 이전의 방식이 제시된 증명을 수동적으로 읽었다면 사후에는 무엇을 증명해야 하는지를 염두에 두고, 구하고자 하는 바를 찾기 위해 능동적으로 증명을 탐색하는 방식으로 변화되었음을 학생의 답변을 통해 알 수 있다.

<장면 IV-2> 시선 변화에 대한 학생2의 면담 내용

교사: 분석법을 배우고 나서 증명을 볼 때 시선이 변화되었다는 것을 자각했니?

학생2: 네. 심지어 이 수업 말고도 3학년 2학기 수학 내용을 예습하는데 피타고라스 정리의 증명에서 빈 칸 넣기 증명을 하는데 그 때 딱 이 수업을 받은게 도움이 되가지고 '분석법으로 풀 수 있지 않을까?' 해서 아래서부터 보니까 상당히 쉽게 풀리더라고요.

1) 소표본이지만 정규성 검증(SPSS 22.0)을 통해 정규분포를 따른다는 것을 확인하여  $t$ -검증의 기본 가정을 충족하였다.

교사: 아~ 다른 과제에도 적용해보았구나.

학생2: 네, 도움이 많이 되었던 것 같습니다.

학생2의 경우에는 시선의 변화를 자각할 뿐만 아니라 분석법을 통한 거꾸로 읽기를 체득하여 다른 과제에도 적용시키 보았다. 교수실험에서 배운 내용을 토대로 다른 과제에까지 전이된 위와 같은 결과는 학습 효과의 측면에서 상당히 바람직하다고 볼 수 있다. 학생2는 분석법을 활용한 증명 탐구에 매우 큰 흥미를 보였으며 앞으로의 증명 학습에 대해 자신감과 기대감을 갖고 있었다.

이처럼 학생들은 분석법 수업 이후에 증명 학습에 대한 시선의 방향과 시선의 분배 비율에 있어서 변화가 있었다. 시선의 방향은 아래에서 윗부분으로 향하는 방향으로의 변화가 주를 이루었으며, 시선 분배 비율은 증명 아랫부분을 응시하는 시간이 길어졌다는 것을 면담을 통해 확인되었다.

## 2. 분석법을 학습하기 전과 후의 시선의 변화와 학습 성취도의 상관관계

### 가. 증명 학습 성취도

학생들이 인쇄물을 보며 연필을 사용하여 문제를 푸는 방식이 아니라 필기도구를 쓸 수 없는 상황에서 모니터 화면을 보고 생각하여 빈 칸에 들어갈 내용을 말하는 것이 새로운 방식이라서 학생들이 문제 푸는 것을 조금 어려워하는 경향을 보였다. 학생들의 대답을 녹음하여 채점하였으며 각 문항당 만점은 10점이고 채점기준은 <표 IV-11>과 같다.

<표 IV-11> 사전, 사후 검사 채점기준<sup>2)</sup>

채점기준	점수
정답을 정확한 용어로 표현하여 말하였다.	10점
내용은 맞지만 표현상의 오류가 있다.	8점
내용이 일부 맞지만 내용상의 약간의 오류가 있다.	5점
내용이 일부 맞지만 전체적으로 오류가 크다.	3점
전혀 관련 없는 대답 또는 무응답	0점

녹음된 학생의 대답을 분석하여 학생들의 답안을 2차에 걸쳐 채점하였다. 먼저 사전에 마련한 채점 기준으로 1차 채점을 한 뒤 학생들의 답안을 고려하여 문항별 채점 기준을 수정하여 수정, 통일된 기준으로 다시 2차 채점을 함으로써 학생들 간의 채점 신뢰도를 높이고자 하였다.

<표 IV-12> 사전, 사후 검사 총점 비교

학생	사전검사 총점	사후검사 총점	증감
S1	39	47	+8
S2	33	35	+2
S3	5	42	+37
S4	13	27	+14
S5	13	34	+21
S6	25	50	+25
S7	28	45	+17
S8	8	27	+19
평균	20.5	38.4	+17.9

2) 사전, 사후 검사지의 부분 문항으로 인해 채점기준에서 제시한 점수 외의 기타 점수가 나오게 됨.

<표 IV-13> 사전, 사후 검사 총점에 대한 t-검증 결과<sup>3)</sup>

	사전 검사		사후 검사		t	p
	M	SD	M	SD		
총점	20.5000	12.44416	38.3750	8.91127	-4.750	.002

사전 검사와 사후 검사의 총점을 비교해보면 최소 2점부터 최대 37점까지 사전 검사에 비해 사후 검사 점수가 평균 17.9점 상승하였음을 알 수 있고(<표 IV-12>), 이것은 유의수준 .05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있었다(<표 IV-13>).

나. 시선의 변화와 증명 학습 성취도 간의 상관관계

학생들의 증명 학습에 대한 시선의 변화와 성취도 간의 상관관계를 구하기 위해 앞서 논의하였던  $\alpha$  값의 변화와 검사 총점의 변화에 주목하였다. <표 IV-14>는 사전, 사후 검사에서  $\alpha$  값의 변화를 통한 시선의 변화와 사전, 사후 검사지 총점을 통한 학습 성취도 변화를 정리한 것이다.

<표 IV-14> 사전, 사후 검사에서 시선의 변화와 학습 성취도 변화

학생	시선의 변화			학습 성취도 변화		
	사전 $\alpha$ 값	사후 $\alpha$ 값	증감	사전검사 총점	사후검사 총점	증감
S1	2.58	1.62	-0.96	39	47	+8
S2	1.64	0.92	-0.72	33	35	+2
S3	3.65	1.88	-1.77	5	42	+37
S4	1.64	1.03	-0.61	13	27	+14
S5	2.25	1.02	-1.23	13	34	+21
S6	3.43	1.54	-1.88	25	50	+25
S7	2.51	3.01	0.50	28	45	+17
S8	1.82	0.92	-0.90	8	27	+19
평균	2.44	1.49	-0.95	20.50	38.38	+17.88

위의 자료를 바탕으로 사전, 사후  $\alpha$  값의 변화와 사전, 사후 검사 총점간의 상관관계를 알아보으로써 시선의 변화와 학습 성취도간의 상관관계를 알아보려고 한다. SPSS를 통해 Pearson의 적률상관관계 계수를 구함에 있어 학생7의 자료는 이상치(outlier)<sup>4)</sup>로 간주하여 학생7을 제외<sup>5)</sup>한 자료로 상관계수를 구한 결과는 <표 IV-15>와 같다.

<표 IV-15> 시선의 변화와 증명 학습 성취도 간의 상관분석

시선의 변화	증명 학습 성취도	R	p
사전, 사후 $\alpha$ 값	사전, 사후 검사 총점	-.807	.028

- 3) 소표본이지만 정규성 검증(SPSS 22.0)을 통해 정규분포를 따른다는 것을 확인하여 t-검증의 기본 가정을 충족하였다.
- 4) 사분위수범위(IQR, interquartile range) = 제3사분위수(Q3) - 제1사분위수(Q1)이고 Q1-1.5IQR보다 작거나 Q3+1.5IQR보다 큰 값은 이상치로 판단한다(배영주, 2011). 따라서 학생들의  $\alpha$  값 변화에서 제1사분위수(Q1)는 -1.365이고 제3사분위수(Q3)는 -0.6925이므로 사분위수범위는 IQR=Q3-Q1=(-0.6925)-(-1.365)=0.6725이고,  $0.5 > Q3+1.5IQR=0.31625$ 이므로 0.5는 이상치로 볼 수 있다.
- 5) 두 변수 간의 관계의 경향성에서 매우 동떨어진 이상점이 있을 경우, 그 자료가 의미가 있는 것인지 고려하여 연구의 특성 상 신뢰롭지 못한 자료라면 이를 제거한 후 상관계수를 추정하는 것이 바람직하다(성태제, 2014).

시선의 변화와 증명 학습 성취도 변화 간의 Pearson의 적률상관계수는  $-0.807$ 로 유의수준  $.05$ 에서 유의미한 상관이 있었다. 성태제(2014)에 의하면 상관계수가  $\pm 0.8 \sim 1.0$ 의 범위일 때는 상관이 매우 높다고 해석할 수 있다. 따라서 이 결과는  $\alpha$  값의 변화와 학습 성취도 간의 상관관계가 높다고 할 수 있고, 바꾸어 말하면 학생들의 시선 분배와 증명 학습 성취도간의 상관이 크다고 말할 수 있다.

다. 시선 변화와 증명 학습 간의 상관관계에 대한 사후 면담 내용 분석

앞의 내용에서 양적 자료를 분석한 결과, 시선의 변화와 증명 학습 간의 상관이 크다는 결과가 나왔다. 과연 학생들이 실제로 느끼기에는 어떠하였는지 면담을 통해 알아보았다.

<장면 IV-3> 시선 변화와 증명 학습 간의 상관관계에 대한 학생1의 면담 내용

학생1: 네, 저는 (분석법이) 도움이 되었던 것 같아요. 정확한 방향을 아니까 시간이 더 단축되고 조금 더 헤매지 않게 되면서 더 정확하게 찾을 수 있었던 것 같아요.

....

학생1: 조금씩 분석법으로 자신의 증명 방식을 변하게 해보면 서서히 증명에 대한 자신의 풀이법이 차곡차곡 더 늘어날 것 같아요.

...

학생1: 헤매지 않고 답을 찾을 수 있으니까요. 위에서부터 내려온다고 했을 때는 위에서부터 여러 가지 상황들이 많이 나오면서 여러 가지 생각들이 많이 나오는데 이제 거꾸로 아래에서 생각하면 결론은 하나니까 하나로부터 쪽 타고 가면 경우의 수가 점점 줄어드는 거죠.

...

학생1: 증명을 분석법이라는 방법을 통해 배우니까 평소에 흥미가 있던 증명이 더 호기심이 가고 많은 도움이 된 것 같아요.

학생1은 이전의 학습 방식에 비해 분석법을 적용한 후, 증명 문제에서 고려해야 하는 경우의 수가 줄어들어 헤매지 않고 답을 찾을 수 있다고 하였다. 위에서부터 시선이 내려올 때는 여러 가지 고려해야 할 사항이 많았지만, 분석법을 적용하면 결론은 하나니까 그 결론에서부터 생각을 해나가면 고려해야 하는 경우의 수가 줄어들어 쉽고 빠르게 답을 찾을 수 있다고 하였다. 분석법 수업 이후에 증명해야 하는 결론을 염두에 두고 증명 과정을 추측하면서 증명을 학습하는 방식을 통해 증명 자체에 대한 호기심과 앞으로의 증명 학습에 대한 기대감이 높아진 것을 알 수 있다.

<장면 IV-4> 시선 변화와 증명 학습 간의 상관관계에 대한 학생2의 면담 내용

학생2: 네, 분석법을 통한 증명학습이 확실히 성적 향상에 도움이 되는 것 같고 또 성적 향상을 위한 공부에도 도움이 되는 것 같습니다. 아까도 말씀드렸듯이 다른 문제를 풀 때도 이렇게 푸니까 훨씬 더 잘 풀리더라고요. 이해를 도우니까 그만큼 그 문제에 대해 마스터할 수 있고 증명에 대해 좀 더 잘 이해 할 수 있고 하니까 확실하게 학습 성취도가 높아진 것 같습니다.

학생2는 분석법을 통한 증명 학습 방법의 변화가 증명 학습에 도움이 된다고 확신하고 있었다. 교수 실험에서 적용해 본 과제에 국한되지 않고, 다른 과제에도 확장하여 적용해 본 결과 증명에 대한 이해도가 더 높아진 것을 확인하였다고 답하였다.

## V. 결론 및 제언



## 1. 결론

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 분석법 학습은 학생들의 증명 학습에 대한 거부감을 줄이는 동시에 흥미를 고취시킬 수 있다. 사후 면담 질문 중 증명 학습에 대한 평소 생각을 묻는 문항에서 전체 8명의 학생들 중 4명의 학생이 증명의 중요성은 인지하지만 학습하기에는 너무 어렵다고 하였으며 다른 4명의 학생들은 증명 학습이 재미는 있으나 역시 어렵다고 답하였다. 학생들이 증명 학습을 어려워하는 이유는 증명 과정을 스스로 생각해내기가 매우 힘들다는 것이었다. 하지만 모든 학생들이 이전의 증명 학습과 비교할 때 분석법의 적용으로 인해 증명 학습이 더 쉬워졌다고 답하였고 분석법을 활용하여 증명을 스스로 구성하는 경험을 통해 학생들은 증명 학습에 대한 자신감을 가지게 되었음을 알 수 있었다. 면담에 참여한 한 학생은 ‘평소에 증명을 외우던 것에 비해 자기가 스스로 증명 과정을 도출해낼 수 있어서 좋았어요. 외우지 않아도 풀 수 있다는 것이 마음에 들었어요’라고 답하였다. 또한 새로운 방법에 대한 놀라움과 기대감을 표출하는 학생들도 많았으며 다른 과제에도 적용해 보고 싶다고 답한 학생들도 있었다. 이처럼 분석법의 학습이 학생들에게 증명 학습은 어렵다는 편견을 깨뜨리고 직접 증명을 구성할 수 있다는 자신감을 심어줌과 동시에 이를 통해 수학 자체에 대한 흥미도 고취시킬 수 있을 것으로 생각된다.

둘째, 분석법 학습은 학생들의 증명 학습에 있어서 시선의 변화를 야기한다. 시선의 이동 방향은 사전 검사에서 하향이동이 96%였던 것에 비해 사후 검사에서는 상향이동이 69%로 나타나 확연히 시선 이동 방향에 변화가 생겼음을 알 수 있었다. 이것은 학생들이 분석법 학습 후에 증명의 결론을 먼저 확인하고 결론으로부터 역으로 증명을 구성하려는 학습 경향을 잘 보여준다. 또한 증명 학습 중의 시선 분배 비율을 보면 시선의 증명 아랫부분 점유 비율에 대한 윗부분 점유 비율의 비를 나타내는  $\alpha$  값으로 비교할 때, 사전 검사에 비해 사후 검사에서  $\alpha$  값이 유의미하게 감소하였다. 이를 통해 사후 검사에서 증명의 아랫부분을 보는 비율이 더 높아졌다는 것을 알 수 있다. 이것은 분석법 학습 후에 증명의 결론을 확인하고 결론으로부터 충족되어야 하는 충분조건을 찾는 분석법의 원리를 증명 학습에 잘 적용한 것으로 볼 수 있다. 따라서 시선의 이동 방향과 시선 점유율의 측면에서 분석법 학습은 이전과 비교할 때 확연한 변화를 이끌어 내었다고 할 수 있다.

셋째, 분석법 학습으로 야기된 시선의 변화는 증명 학습 성취도와 상관관계가 있다. 시선의 변화 비율과 증명 학습 성취도의 상승 비율을 토대로 상관분석을 실시한 결과, 유의수준 .05에서 상관계수가  $-0.807$ 이 나와 상관관계가 크다고 할 수 있다. 이와 같은 상관관계가 인과관계를 위한 충분조건이 되는 것은 아니지만 학생들의 사후 면담 내용을 보면 분석법 학습이 학생들의 증명 학습 성취도를 향상시킨 것으로 볼 수 있다. 이를 뒷받침하는 학생들의 의견을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 분석법을 배우고 난 뒤에 결론을 명확히 인지하고 증명 과정을 거꾸로 되짚어 봄으로써 문제를 풀 때 고려해야 하는 경우의 수가 줄어들어 증명 학습 성취도가 높아진 것 같다. 둘째, 증명 과정을 외우지 않고 스스로 생각해 낼 수 있는 것이 학습 성취도를 높이는 중요한 요인이라 생각한다. 셋째, 분석법이 다양한 증명 문제에 적용 가능하여 증명 학습에 많은 도움이 될 것이다. 이처럼 상관분석을 통해 시선의 변화가 증명 학습 성취도와 상관관계가 있다는 것을 알 수 있고 학생들의 면담을 통해 상관관계를 인과관계로 확장할 수 있다. 즉, 분석법의 학습이 시선의 변화를 야기함과 동시에 증명 학습의 성취도를 향상시키는 것으로 볼 수 있다.

본 연구의 제한점은 다음과 같다.

첫째, 시선추적기를 활용하여 학생들의 증명 학습 방법을 검증하기 위해 모니터에 제시되는 빈 칸 넣기 증명 문제를 보고 학생이 대답하는 방식으로 검사를 진행하였다. 하지만 빈 칸 넣기 문제를 통해 증명 학습 성취도를 판단하는 것에 약간의 비약이 있을 수 있다. 증명의 가정과 결론을 보고 증명과정 전체를 구성하는 방식으로 검사가 구성되었다면 더 좋았겠지만 시선추적기의 활용이라는 점에서 한계가 있었다.

둘째, 교수 실험과 사후 검사가 같은 날(2017년 7월 1일) 실시되어 기억 효과가 있을 수 있다. 시간적, 공간적 제약으로 인해 부득이하게 오전에 교수 실험으로 분석법을 통한 증명 구성 실습을 하고 오후에 사후 검사를 실시하였다. 교수 실험과 사후 검사 사이에는 점심시간을 1시간 정도 두었고 사후 검사가 실시된 시각은 첫 학생이 14시 경이었으며 마지막 학생이 18시 경이었다. 교수 실험과 사후 검사 간의 시간적 간격이 며칠 더 있었다 라면 좀 더 정확한 실험이 될 수 있었을 것이라 생각한다.

## 2. 제언

본 연구에서는 중학교 3학년 수학영재 학생들을 대상으로 시선추적기를 활용하여 분석법의 학습이 학생들의 증명 학습에 미치는 영향에 대하여 시선의 변화와 학습 성취도의 변화라는 관점으로 살펴봄으로써 분석법 학습에 대한 교육적 시사점을 도출하고자 하였다. 이러한 연구를 바탕으로 학생들의 증명 학습 개선을 위해서는 보다 많은 후속 연구가 필요할 것이다. 따라서 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 분석법 학습은 본 연구의 대상인 중학교 3학년 수학영재 학생들에게는 유의미한 효과가 있었다. 하지만 수학영재 학생이 아닌 일반 학생들을 대상으로 검사하였을 때도 분석법 학습이 증명 학습에 유의미한 효과가 있는지 확인하는 연구가 필요할 것이다.

둘째, 본 연구에서는 증명 학습의 개선을 위해 분석법이라는 학습 방법을 대안으로 제시하였다. 대다수의 학생들이 증명 학습에 흥미를 느끼지 못할 뿐만 아니라 어려워하고 있으므로 학생들의 증명 학습을 개선할 수 있는 다양한 방법을 제시하고 확인하는 후속 연구가 필요할 것이다.

셋째, 본 연구에서는 시선추적기법을 활용하여 분석법이 증명 학습에 미치는 효과에 대해 알아보았다. 시선추적기법은 객관적인 데이터를 기반으로 하고 있으며 연구 대상의 무식적인 안구 움직임까지 감지하므로 상당한 이점이 있는 연구 방법이다. 하지만 현재 수학교육과 관련하여 시선추적기법을 활용한 연구는 많지 않다. 따라서 수학의 다양한 분야에서 다양한 학습 방법을 검증하는 도구로써 시선추적기법을 활용하는 후속 연구를 기대한다.

## 참 고 문 헌

- 교육부 (2013). 제3차 영재교육진흥종합계획(2013-2017).  
 Ministry of Education (2013). *The third gifted education Comprehensive plan(2013-2017)*.  
 교육부 (2015). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호 [별책8].  
 Ministry of Education (2013). *Mathematics Curriculum*. Ministry of Education #2015 74 [Separate volume 8].  
 강문봉 (1992). 분석법에 관한 고찰. 대한수학교육학회 논문집, **2(2)**, 81-93.  
 Kang, M.B. (1992). An Educational Study on Analysis. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics*, **2(2)**, 81-93.  
 고은성 (2012). 수학영재학급 학생들과 일반학급 학생들의 통계적 사고 수준 비교 연구: 변이성 모델링과 표집분포 이해 능력 중심으로. 영재교육연구, **22(3)**, 503-525.  
 Ko, E.S. (2012). A Comparison of Mathematically Talented Students and Non-Talented Students' Level of Statistical Thinking: Statistical Modeling and Sampling Distribution Understanding. *Journal of Gifted/Talented Education*, **22(3)**, 503-525.  
 김경은 · 서혜애 · 김동화 (2016). 수학영재의 대수적 사고의 특징과 오류 유형. 영재교육연구, **26(1)**, 211-230.

- Kim, K.E., Seo, H.A. & Kim, D.H. (2016). Characteristics of Algebraic Thinking and its Errors by Mathematically Gifted Students. *Journal of Gifted/Talented Education*, **28**(1), 211-230.
- 김소영 · 변정호 · 이일선 · 권용주(2012). 과학 학업성취도 문항 풀이에서 초등학생의 시선추적 연구. 학습자중심 교과교육연구, **12**(1), 65-78.
- Kim, S.Y., Byeon, J.H., Lee, I.S. & Kwon, Y.J. (2012). An Eye tracking Study on Test-Item Solving of Science Scholastic Achievement focused in Elementary School Students. *The Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **12**(1), 65-78.
- 김소영 · 변정호 · 이일선 · 권용주 (2013). 과학영재 판별을 위한 시선추적 기반 과제집착력 측정도구 개발. 생물 교육, **41**(3), 421-434.
- Kim, S.Y., Byeon, J.H., Lee, I.S. & Kwon, Y.J. (2013). Development of an Instrument to Measure Task Commitment using Eye-tracking for Identifying Science Gifted Student. *Biology Education*, **41**(3), 421-434.
- 김원경 외 (2010). 중학교 수학 2, 서울: 비상교육.
- Kim, W.K. et al. (2010). *Middle School Mathematics 2*, Seoul: Visang.
- 김원경 외 (2011). 중학교 수학 3, 서울: 비상교육.
- Kim, W.K. et al. (2011). *Middle School Mathematics 3*, Seoul: Visang.
- 김현진(2015). 시선추적기법을 활용한 한국어 읽기과정 분석 연구. 언어와 문화, **11**(2), 131-159.
- Kim, H.J. (2015). Research for Analysis of Korean Reading Process Using Eye-tracking technology. *The Language and Culture*, **11**(2), 131-159.
- 나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하단원을 중심으로, 서울대학교 박사학위논문.
- Na, G.S. (1998). *Analysis of the nature of proof and practice of proof education : focused on the middle school geometry*. Doctorate thesis, Seoul National University.
- 나귀수 (2009). 분석법을 중심으로 한 기하 증명 지도에 대한 연구. 수학교육학연구, **19**(2), 185-206.
- Na, G.S. (2009). Teaching Geometry Proof with focus on the Analysis. *Journal of Educational Research in Mathematics* **19**(2), 185-206.
- 나귀수 (2011). 수학 영재 학생들의 발견과 증명에 대한 연구. 수학교육학연구, **21**(2), 105-120.
- Na, G.S. (2011). Analysing the Processes of Discovery and Proof of the Mathematically Gifted Students. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **21**(2), 105-120.
- 류성림 (1998). 수학 교육에서 '증명의 의의'에 관한 연구. 학교수학, **37**(1), 73-85.
- Ryu, S. R. (1998). A Study on the Meaning of Proof in Mathematics Education. *The Mathematical Education*, **37**(1), 73-85.
- 류희찬 · 제수연 (2009). 역동적 기하 환경에서 파푸스의 분석법을 이용한 이차곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화. 교원교육, **25**(4), 168-189.
- Ryu, H.C. & Je, S.Y. (2009). Construction of Quadratic Curves Using the Analysis Method on the Dynamic Geometry Environment. *Korean Journal of Teacher Education*, **25**(4), 168-189.
- 류희찬 외 (2013a). 중학교 수학 2, 서울: 천재교과서.
- Ryu, H.C. et al. (2013). *Middle School Mathematics 2*, Seoul: Chunjae.
- 류희찬 외 (2013b). 중학교 수학 3, 서울: 천재교과서.
- Ryu, H.C. et al. (2013). *Middle School Mathematics 3*, Seoul: Chunjae.
- 박승동 (2006). 평면기하의 아이디어, 서산: 도비출판사.
- Park, S.D. (2006). *The Idea of Plane Geometry*, Seosan: Dobi.
- 박효정 · 신동훈 (2015). 안구운동 추적 기법을 활용한 6학년 과학 교과서의 과학 이야기 읽기 과정 분석. 한국과학교육학회지, **35**(3), 383-393.

- Park, H.J. & Shin, D.H. (2015). Analysis of Processes in Reading about Science Stories in 6th Grade Science Textbook Using Eye-tracking. *Journal of the Korean Association for Science Education*, **35(3)**, 383-393.
- 배영주 (2011). 현대통계학의 이해, 서울: 교우사.
- Bae, Y.J. (2011). *The Understanding of Modern Statistics*, Seoul: Kyowoo.
- 변정호 · 이일선 · 권용주 (2011). 시선추적기를 활용한 시선집중 및 배분 교수행동 패턴의 컨설팅 사례연구. 학습자중심교과교육연구, **11(4)**, 173-199.
- Byeon, J.H., Lee, I.S. & Kwon, Y.J. (2011). A Study on Consulting of Teaching Behavior Patterns of Gaze Fixation by using Eye Tracker: The Case Study. *The Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **11(4)**, 173-199.
- 서혁 · 김지희 · 오은하 · 이소라 (2015). 국어교육학: 시선추적장치를 활용한 공무원과 일반인의 공문서 읽기 특성 비교 분석. 새국어교육, **102(0)**, 7-44.
- Seo, H., Kim, J.H., Oh, E.H. & Lee, S.R. (2015). A Experimental Study Using the Eye-tracker on Reading Characteristics of the Public Officials and the Ordinary Adults. *Korean Education*, **102(0)**, 7-44.
- 성태제 (2014). (SPSS/AMOS를 이용한) 알기 쉬운 통계분석(제2판), 서울: 학지사.
- Sung, T.J. (2014). *Easy statistical analysis*, Seoul: Hakjisa.
- 신원섭 (2016). 초등과학 교육연구에서 시선추적 연구방법의 고찰. 초등과학교육, **35(3)**, 288-304.
- Shin, W.S. (2016). A Review of Eye-tracking Method in Elementary Science Education Research. *Journal of Korean Elementary Science Education*, **35(3)**, 288-304.
- 우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판문화원.
- Woo, J.H. (2000). *Principles and Methods of Teaching-Learning Mathematics*, Seoul: Seoul National University Press.
- 이미진 · 이광호 (2015). 시선 추적기를 통해 본, 4학년 학생들의 방정식에 대한 관계적 사고 형성. 학교수학, **17(3)**, 391-405.
- Lee, M.J. & Lee, K.H. (2015). Elementary Students' Formation of Relational Thinking about Equation. *School Mathematics*, **17(3)**, 391-405.
- 이소라 · 서혁 (2013). 시선추적장치를 활용한 읽기 과정 연구의 현황과 가능성 탐색. 국어교육학연구, **46(0)**, 479-503.
- Lee, S.R. & Suh, H. (2013). The Current Status and Perspectives of Research on Reading Process Using Eye-tracker. *Korean language education research*, **46(0)**, 479-503.
- 이소라(2014). 청소년 독자의 인터넷 글 읽기와 눈동자 움직임 특성 분석. 국어교육학연구, **49(2)**, 417-444.
- Lee, S.R. (2014). A Research on Traits of Adolescents' Reading and Eye movement in Internet Reading. *Korean language education research*, **49(2)**, 417-444.
- 이채연 (2009). 분석-종합적 증명방법을 적용한 활동지 개발에 대한 연구. 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- Lee, C.Y. (2009). *A study on the development of the activity worksheet applying the analysis-comprehensive proof methods*. Master's thesis, Korea University.
- 정경우 (2018). 시선추적기를 활용한 수학영재 학생들의 증명 학습 방법 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- Jung, K. W. (2018). *A Study on Proof Learning Method of Mathematically Gifted Students Using Eye Tracker*. Master's thesis, Korea National University of Education.
- 한미향 · 권승혁 · 권용주 (2015). 초등학교 과학영재학생과 일반학생의 시각탐색 과제 수행에서 나타나는 시선 추적 특성. 학습자중심교과교육연구, **15(8)**, 67-81.
- Han, M.H., Kwon, S.H. & Kwon, Y.J. (2015). Eye-tracking Patterns on Visual-Search Task in of Elementary Science-Gifted and General Students. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **15(8)**, 67-81.

- Alcock, L., Hodds, M., Roy, S., & Inglis, M. (2015). Investigating and improving undergraduate proof comprehension. *Notices of the American Mathematical Society*, **62**(7), 742-752.
- Cavanagh, P. (1992). Adaptive changes in saccade amplitude: Aculocentric or orbitocentric mapping? *Vision Research*, **36**, 2087-2098.
- Duchowski, A. (2007). *Eye tracking methodology: Theory and practice*. New York: Springer-Verlag.
- Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. *Proceedings of the sixth international conference for the psychology of mathematics education*, 128-131. Universitaire Instelling Antwerpen Antwerp, Belgium.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 396-428.
- Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & Van de Weijer, J. (2011). *Eye tracking: A comprehensive guide to methods and measures*. New York: Oxford University Press.
- Kaldy, Z., Kraper, C., Carter, A. S., & Blaser, E. (2011). Toddlers with autism spectrum disorder are more successful at visual search than typically developing toddlers. *Developmental science*, **14**(5), 980-988.
- McFadden, S. A., Khan, A., & Wallman, J. (2002). Gain adaptation of exogenous shifts of visual attention. *Vision Research*, **42**(24), 2709-2726.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 표준, 서울: 경문사.
- Polya, G. (1971). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press. 우정호 역 (2002). 어떻게 문제를 풀 것인가, 서울: 교우사.
- Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The mathematics teacher*, **78**(6), 448-456.

## Application of Eye Tracker for Study on the Effect of Analytic Proof Learning of Gifted Students

**Jung, Kyung-Woo**

Miryang High School  
Miryang, Gyeongnam, Korea  
E-mail : sksmssk8@gmail.com

**Yun, Jong-Gug<sup>†</sup>**

Department of Mathematics Education, Korea National University of Education  
Cheongju, Chungbuk, Korea  
E-mail : jgyun69@knue.ac.kr

**Lee, Kwang Ho**

Department of Mathematics Education, Korea National University of Education  
Cheongju, Chungbuk, Korea  
E-mail : paransol@knue.ac.kr

The purpose of this study is to investigate the change of gaze and the change of the proof learning achievement after learning the analytic method for proof to mathematical gifted students using eye tracking technique. In order to complete the purpose of this study, a mixed method research was used, that is a combination of quantitative and qualitative research methods. Quantitative analysis was conducted based on the data obtained through the eye tracker, and qualitative analysis was also done using post interview data to make up for the quantitative analysis. The subjects of this study were 8 mathematical gifted 3rd grade middle school students in the gifted education center. The conclusions of this study are as follows.

First, the learning of analysis leads to a change of gaze in the proof learning of students. The students, after learning the analysis, moved their gaze from the bottom to the top when solving the proof problem, and the occupancy rate of the gaze to the bottom of the proof was higher than the higher part.

Second, the change of gaze caused by the learning of the analysis have a correlation with the achievement of the proof learning and it can be seen that the method learning improves the achievement of the proof learning of the students.

---

\* ZDM Classification : D40, U30

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

\* Key words : proof, analysis, eye tracker

<sup>†</sup> corresponding author