韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2018.32.3.257
제 32집 제 3호, 2018. 9. 257-273

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 32, No. 3, Sep. 2018. 257-273

다각형의 등주문제: Geometer's Sketchpad로 수학적 추론과 정당화하기

최 근 배 (제주대학교 교수)

이 논문에서는, 영재학생들을 위한 학습 자료의 관점에서, 선행연구(최근배, 2009, 2011; 이재운, 최근배, 2015)에서 미비한 점이 있는 짝수 각형의 등주문제를 해결하는 과정을 Geometer's Sketchpad로 추론하고 정당화하는 아이디어를 논의하고 있으며, 주된 아이디어는 두 가지의 변형([그림 III-1]과 [그림 III-3])을 사용하는데 나타나는 수학화의 과정이다. 여기에 사용된 아이디어는 제주대학교 영재교육원 수학반 심화과정 프로그램 (등주문제 또는 디도여왕의 문제, 2004년부터 현재까지) 운영 중에 도출된 것이다.

Ⅰ. 서론

수학교육의 주된 목적 중 하나는 학생들로 하여금 수학자가 연구한 결과물과 관련된 지식의 습득보다는 결과물을 만들어 내는 과정을 경험시키는 것이다. 이것은 학생들에게 이미 만들어진 수학적인 결과물 보다는 수학화(mathematisation; Freudenthal, 1973)의 경험을 줄 수 있는 교수·학습 자료를 제공해야만 한다는 것을 의미한다. 실제로, 수학은 주어진 어떤 현상을 조직하기 위한 수단으로 발생된 것으로 수학적 개념이나 아이디어는 결국 수학화의 과정을 통해서 얻어진다. 또한 수학화의 과정은 한 수준에서의 조직화의 수단인 본질이 그 다음 수준에서는 연구의 대상인 현상으로 되는 불연속의 과정이다(Freudenthal, 1973; 강문봉 외, 2005에서 재인용).

등주문제(isoperimetric problem)는 고대 그리스시대부터 잘 알려진 최적화 문제 중 하나이다(Demjanenko, 2008; Hildebrandt & Tromba 1996; Siegel(preprint); Tapia, 2009; Blasjo, 2005). 오랜 역사를 가진 문제인 만큼 문제해결 방법 또한 다양하다. 특히, 기하적인 증명법(Zenodorus와 Steiner의 증명; Blasjo, 2005, pp. 529-530, 532-537)은 해석학적인 방법(Weierstrass; Blasjo, 2005, pp. 537-544)보다 덜 엄밀[1]하다. 그러나 학생들에게 수학적인 직관, 감각 및 창의성을 강조하는 수학교육의 입장에서 보면 기하적인 증명 방법이 좀 더 교육적이다[2]. 이러한 관점에서 등주문제를 주제로 공간감각과 관련된 분석 연구에는 최근배, 채정림(2014)의 논문이 있는데, 이 논문에서의 교육적 시사점은 직관적이고 감각적인 능력을 요구하는 비정형화된 문제에서 학생들이 많은 약점을 보이고 있다는 것이다. 따라서 기하적인 문제는 우선 기하적인 관점에서 해결하는 것이 학생들의 사고를 좀 더 활발하게 자극할 수 있다.

다각형의 등주문제와 관련된 선행연구(최근배, 2009, 2011; 이재운, 최근배, 2015)에서는 문제해결 전략으로 타원 변형과 대각선길이 같게 만드는 변형을 사용하고 있다. 그러나 증명의 과정 중 짝수 각형의 등주문제 해결에

* 접수일(2018년 4월 25일), 심사(수정)일(1차: 2018년 6월 5일, 2차: 2018년 6월 21일), 게재확정일(2018년 6월 27일)
* ZDM분류 : M19, D59, G19
* MSC2000분류 : 97D50, 97B50
* 주제어 : 등주문제, 다각형, 수학화, 타원
* 이 논문은 2017학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었음

1) 등주문제의 기하적인 증명은 대부분 존재성을 가정하고 있다. 예를 들어, '만약 P가 넓이가 최대인 다각형이라면, P는 정다각형이다.' 실제로, 증명의 과정 속에 존재성이 매우 중요한 역할을 한다(Blasjo, 2005, pp. 532-537).

2) 이와 관련하여 Steiner는 다음과 같은 언급을 한다. "계산은 사고를 대신하지만 기하는 사고를 자극한다." (Treibergs, 2008)

미비한 점을 보이고 있다. 이 논문의 주된 목적은 첫째, 선행논문의 미비점을 해결하는 것이고, 둘째, 해결 과정에서 나타나는 아이디어를 영재학생들을 위한 학습자료의 과점에서 조직화하는 것이다. 이를 위해, 동적 기하 소프트웨어인 Geometer's Sketchpad(이하 GSP)로 추론하고 정당화하는 수학화의 과정을 제공한다. 여기서 말하고 있는 수학화의 과정은 2004년부터 현재까지 긴 시간동안 제주대학교 영재교육원 초등수학 심화반의 영재 학습 프로그램 운영 중에 도출된 것으로, 학생, 영재강사 및 지도교수사이의 상호작용 결과물을 바탕으로 하고 있다.

II. 연구내용 및 방법

1. 연구내용

등주문제는 오랜 역사를 가진 최적화 문제 중 하나이다. 일반적으로 평면에서의 등주문제는 다음과 같이 진술된다. '주어진 둘레의 길이를 가지는 단일폐곡선 중에서 넓이가 가장 큰 도형은 무엇인가?' 이 문제의 답은 '원'이다. 오랜 역사를 가진 문제인 만큼 다양한 풀이방법이 존재한다. 관점을 다각형으로 특수화하면 다각형의 등주문제로 된다.

다각형의 등주문제는 역사적으로 고대 그리스 수학자 Zenodorus(약 200 B.C-약 140 B.C)까지 거슬러 올라간다. 그의 저술은 일부분이 다른 수학자의 문헌을 통해서 전해지고 있다(Tapia, 2009). 그에 의해서 만들어진 다각형의 등주문제와 관련된 명제를 소개하면 다음과 같다.

(1) 같은 둘레의 길이를 가지는 정다각형 중에서 변이 많을수록 넓이가 넓다.
(2) 같은 둘레의 길이와 같은 수의 변을 가지는 다각형 중에서 정다각형이 가장 넓은 넓이를 가진다.

이 논문에서는 (2)에 관심을 두고 등주문제를 고찰하며, 핵심 논제는 3장 3절에 있는 '짝수 다각형의 등주 문제'이다.

2. 연구방법

수학화의 관점에서 다각형의 등주문제 해결방안으로 연구된 선행연구(최근배, 2009, 2011; 이재운, 최근배, 2015)의 '다각형에서 인접한 두 변과 삼각형을 이룰 수 있는 대각선(이하, 주대각선) 길이 같게 만들기 전략'을 사용하여 '짝수 다각형의 등주 문제'를 해결한다. 이를 위해서, 이 전략을 사용한 앞에서 언급한 선행연구의 아이디어를 분석하여 다음과 같은 두 가지의 관점으로 조직화 한 후 짝수 다각형의 등주 문제를 해결한다.

- 타원 변형의 관점으로 선행연구를 분석 조직화 한다. 여기서 언급하고 있는 타원 변형의 의미는 삼각형에서 한 변을 고정한 상태로 나머지 두 변의 길이의 합이 일정한 변화에 따른 삼각형의 넓이 변화를 고찰한다는 것이다.
- 등각의 문제를 해결하기 위한 수단으로 선행연구에서 도입된 대각선의 길이를 등분하는 변형을 고찰하고 이 변형을 짝수 각형 등주문제 해결에 적용할 때 문제점이 없는지 살펴보고, 만일 문제점이 있다면 새로운 해결책을 고찰한다.

또한 추론과 정당화를 위해 동적 기하 소프트웨어인 Geometer's Sketchpad(이하 GSP)를 사용한다.

Ⅲ. 연구의 실제

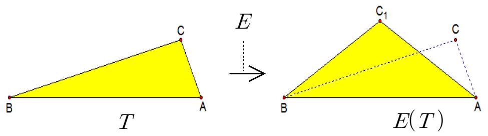
다각형의 등주문제 해결방안으로 연구된 선행연구(최근배, 2009, 2011; 이재운, 최근배, 2015)에 드러난 핵심적인 아이디어는 다음의 기본변형으로 조직화 된다.

1. 기본변형

E-변형

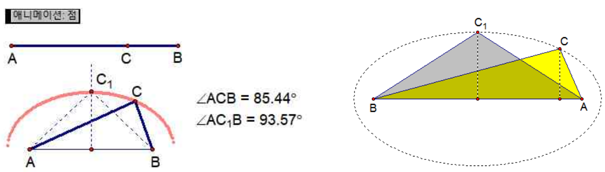
주어진 삼각형에서 한 변의 길이를 고정하고 그 나머지 두변의 길이를 평균화시키는 변형을 생각해 보자. 이와 같은 변형은 Zenodorus의 다각형의 등주문제 증명에 드러나 있다(Blasjo, 2005, Figure 6., p. 529).

편리를 위해서, 이 변형을 E-변형이라 하자([그림 III-1] 참조).



[그림 III-1] E-변형: $BC_1 = C_1A = \dfrac{BC+CA}{2}$

E-변형에서는 $BC + CA = BC_1 + C_1A$가 성립되므로, [그림 III-2]와 같이 두 점 C와 C_1은 초점이 A와 B인 타원 위의 점으로 생각할 수 있다.



[그림 III-2] E-변형 타원에서 보기

따라서 E-변형으로부터 다음을 알 수 있다.

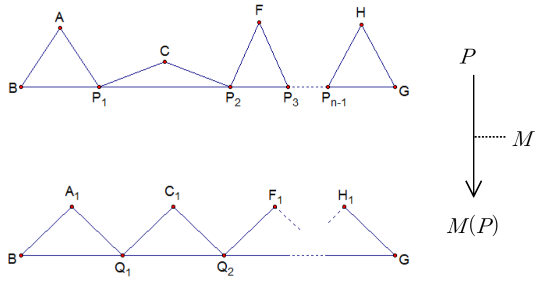
- 둘레의 길이 보존: T의 둘레의 길이= $E(T)$의 둘레의 길이
- 넓이 증가: T의 넓이 $\le$ $E(T)$의 넓이
- 대각의 크기 최대화: 고정된 변($\overline{BA}$)의 대각의 크기 최대, 즉 임의의 타원 위의 점 C에 대해서 $\angle BCA \le \angle BC_1A$

M-변형

주어진 선분의 길이를 등분하는 변형을 생각해보자. [그림 III-3]에서 삼각형들의 밑변($\overline{BG}$상에 놓여 있는 변)을 제외한 모든 변들의 길이가 같다. 즉

$$BA = AP_1 = P_1C = CP_2 = P_2F = \cdots = HG \ = BA_1 = A_1Q_1 = Q_1C_1 = C_1Q_2 = Q_2F_1 = \cdots = H_1G$$

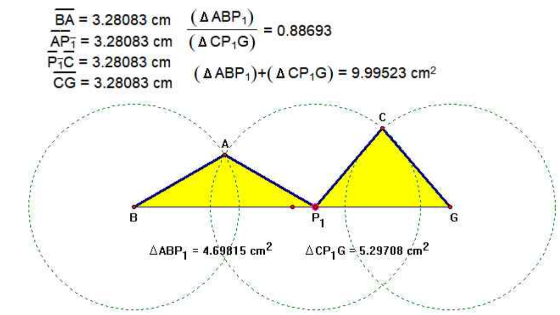
여기서 모든 삼각형이 합동인 이등변 삼각형으로 만드는 변형을 생각해보자. 편의상 이 변형을 M-변형이라고 부르자. 즉, 도형 $M(P)$에서 $\overline{BG}$ 상에 놓여 있는 삼각형들의 변들이 모두 그 길이가 같다.



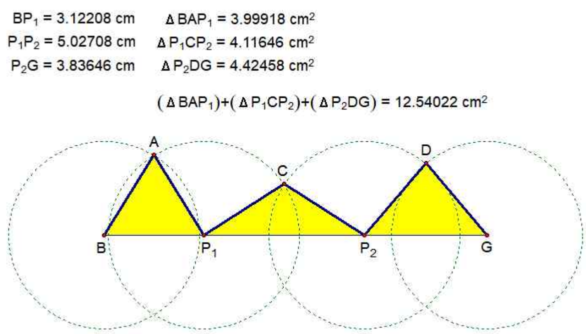
$$BQ_1 = Q_1Q_2 = \cdots = Q_{n-2}Q_{n-1} = Q_{n-1}G = \frac{BG}{n}$$

[그림 III-3] M-변형(이재운, 최근배, 2015)

M-변형의 GSP를 이용한 추론 과정은 [그림 III-4]와 [그림 III-5]와 같다. 실제로, 이 변형은 주대각선의 길이를 같게 만들어 등변 다각형으로부터 등각을 만드는 과정에 유용하게 사용된다.



[그림 III-4] M-변형: $n=2$인 경우의 GSP에 의한 추론



[그림 III-5] M-변형: $n=3$인 경우의 GSP에 의한 추론

M-변형에 의해서 다음을 알 수 있다(이재운, 최근배, 2015 참조).

$$P\text{의 넓이 } \leq M(P)\text{의 넓이}$$

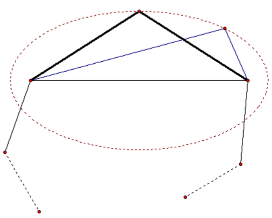
등변다각형에서 '인접한 두 변과 삼각형을 이룰 수 있는 대각선들'을 변으로 가지는 다각형의 E-변형에 따른 인접한 두 변과 삼각형을 이룰 수 있는 대각선들의 등변화는 결국 M-변형을 유도함을 알 수 있다([그림 III-7] 참조).

2. 등변의 문제

'주어진 둘레의 길이를 가지는 n-각형 중에서 넓이가 최대인 도형을 P라고 두자.[3] 그러면 P는 등변다각형이다.' 귀류법을 이용한 증명을 소개하면 다음과 같다.

다각형 P가 등변이 아니라고 가정하자. 그러면 P의 변들 중에서 길이가 다른 두 변이 존재한다. 일관성을 잃지 않고 P에서 서로 다른 길이의 '인접한' 두 변이 있다고 할 수 있다. 그러면 이 인접한 두 변과 대각선으로 구성된 삼각형에 대각선을 고정한 체 E-변형을 적용하면 둘레의 길이는 P와 같고 넓이는 더 넓은 새로운 n-각형 Q를 얻을 수 있다([그림 III-6] 참고). 이것은 모순을 이끈다. 따라서 P는 등변 다각형이어야 한다.

이와 관련된 보다 자세한 논의는 최근배(2011)를 참조하면 된다.



[그림 III-6] 다각형의 변에 E-변형 적용

3. 등각의 문제

등각의 문제를 해결하기 위한 아이디어의 기본적인 바탕은 '주어진 다각형에서 인접한 두 변과 삼각형을 이룰 수 있는 대각선(이하 주대각선)의 길이가 모두 같으면 된다.'는 것이다. 즉, 주대각선의 길이가 모두 같으면 주대각선에 붙어있는 모든 삼각형이 합동이 되고, 따라 다각형의 모든 내각이 등각이 된다는 논리이다. 따라서 우리는 등변다각형에서 주대각선의 길이를 같게 만드는 변형이 넓이를 어떻게 변화시키는 지를 살펴보면 된다.

가) 홀수 각형

3) 이 논문에서는 존재성을 가정한다. 존재성의 문제와 관련하여, 영재교육을 담당하고 있는 강사와의 대화(최근배, 2011, p. 445)에서 보듯이, 존재성의 문제는 등주문제 증명의 수학적인 논리를 전개하는데 중요한 역할을 하고 있음에도 불구하고 당연한 것으로 받아들이는 경향이 있다. 참고로, 등주문제와 관련된 증명은 Spivak(1979, pp. 441-444)에 제시되어 있다.

홀수 각형의 등주문제는 인접한 두 변과 삼각형을 이룰 수 있는 대각선, 즉, 주대각선의 연결 성분(connected component)이 하나이기 때문에, E-변형과 M-변형을 적절히 사용하면 쉽게 해결할 수 있다(이재운, 최근배, 2015 참조).

나) 짝수 각형

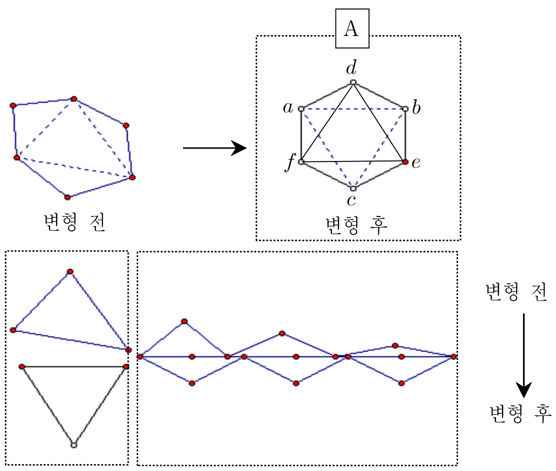
1) 선행 연구의 미비한 점

3장 2절에 의해서, 다각형에서 등각을 문제를 다룰 때 등변을 가정하고 시작하여도 무방하다. 등각의 문제와 관련된 선행연구(최근배, 2009, 2011; 이재운, 최근배, 2015)에서 짝수각형 등주문제에서 등각의 문제를 홀수 각형의 아이디어를 그대로 일반화하여 증명을 하고 있지만, 이러한 생각에는 엄밀하지 못한 점이 존재한다. 실제로, 최근배(2009)의 논문에서 다음과 같은 내용을 볼 수 있다.

> 만일 인접 대각선의 길이가 같지 않다면, 대각선의 변형(이 논문의 용어로 E-변형)으로 둘레(각 변의 길이는 같게 유지)의 길이는 변화시키지 않은 상태로 넓이를 항상 더 크게 만들 수 있다(p. 236).

위와 같은 최근배(2009)의 논문에서의 진술은 '홀수 각형의 아이디어를 그대로 짝수각형으로 일반화'하려는 증명상의 오류를 보여주고 있다. 또한 다각형의 등주문제와 관련된 최근배(2011)과 이재운 · 최근배(2015)의 논문에서 다음과 같은 내용을 찾을 수 있다.

> 홀수 $n(>5)$-각형인 경우는 연결성분이 1개이기 때문에 5각형의 경우와 증명방법이 같다. 그러나 짝수 $n(>5)$-각형인 경우는 주대각선의 연결성분이 2개이다. 이 경우 '두 개의 길이가 다른 주대각선이 있으면 인접한 두 개의 길이가 다른 주대각선이 있다'는 사실을 주장할 수 없다. 따라서 5각형의 경우의 증명방법을 그대로 적용할 수 없다. 실제로, 각각의 연결성분내의 주대각선의 길이가 같아야한다는 사실은 이끌 수 있지만 각 연결성분내에서 주대각선의 길이를 같게 만드는 변형이 서로 간에 영향을 받는다. 따라서 짝수 $n(>5)$-각형인 경우는 [그림 III-7]과 같은 변형을 생각한다(최근배, 2011, p.455; 이재운 · 최근배, 2015, p.453).



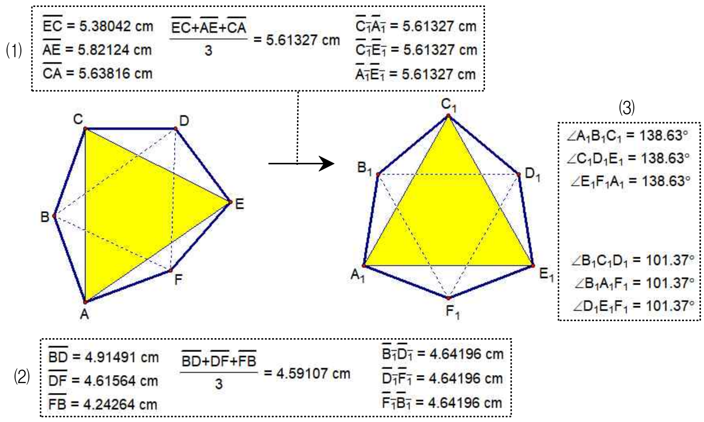
[그림 III-7] 등변 짝수각형의 두 변형

최근배(2011)와 이재운 · 최근배(2015)의 논문에서는 2009년 논문보다는 좀 더 진보된 증명의 과정을 보여주고 있지만 [그림 III-7]에서와 같이 E-변형을 통한 하나의 연결성분을 구성하고 있는 주대각선들의 길이를 같게 만드는 변형으로 논의를 끝내고 있다([그림 III-7]의 A 부분과 그림 III-8]의 오른쪽 그림 비교). 아마도 두 개의 연결성분 각각을 구성하고 있는 주대각선들의 길이를 같게 만드는 변형을 엄밀한 논의 없이 '적절한 조정'을 통해서 정다각형으로 만들면 등각을 만들 수 있다는 것을 함의하고 있는 것처럼 보인다. 그러나 이러한 논의는 [그림 III-7]의 A부분에서

- $\angle a = \angle b = \angle c$ 또한 $\angle d = \angle e = \angle f$ 이지만, 모든 각이 등각이라는 것을 이끌 수는 없다.
- 등각을 만들기 위해서, 점선 정삼각형과 점선 정삼각형으로 변형에 종속적으로 나타난 실선 정삼각형 두 정삼각형을 합동으로 만드는 조정은 두 정삼각형의 선분길이의 변화가 서로 종속되어 있기 때문에, 선분길이의 증 · 감에 따른 넓이변화와 관련된 수학적인 논의가 필요하다. 따라서 A의 상태에서는 주어진 변의 길이를 가지는 정다각형과 넓이비교가 어렵다.

이제, 이재운 · 최근배(2015)의 논문보다 좀 더 진보된 논의를 위해서 GSP로 위에 언급된 문제점을 구체화하여 추론하고 정당화의 아이디어를 찾아보자. [그림 III-8]에서, 등변 6각형 $ABCDEF$의 주대각선의 연결성분은 두 종류가 있다. 하나는 $\triangle ACE$의 변을 이루고 있는 것이고 또 다른 하나는 $\triangle BDF$의 변을 이루고 있는 것이다. 이제 둘 중 어느 하나를 택하여 주대각선들 길이의 평균화 변형을 생각해보자. [그림 III-8]의 (1)과 같이 $\triangle ACE$의 변을 이루고 있는 주대각선들을 선택하고 평균화 변형을 고려하면 다음을 알 수 있다.

$$A_1C_1 = C_1E_1 = E_1A_1 = \frac{AC + CE + EA}{3} \neq B_1D_1 = D_1F_1 = F_1B_1$$



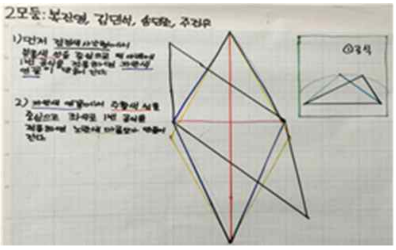
[그림 III-8] $\triangle ACE \to$ 정 $\triangle A_1C_1E_1$, $\angle B_1 = \angle D_1 = \angle F_1$, $\angle A_1 = \angle C_1 = \angle E_1$

이 경우 우리가 주목하여야할 점은 [그림 III-8]과 같이 선택된 주대각선의 평균화변형((1) $\triangle ACE \to$정 $\triangle A_1C_1E_1$)이 또 다른 주대각선의 평균화변형([그림 III-8]에서 (2) 참조)은 아니다. 실제로, [그림 III-8]에서 정 $\triangle B_1D_1F_1$은 $\triangle BDF$ 변의 평균화 변형이 아니다. 따라서 한 대각선 연결성분의 모든 선분의 길이를 같게 만드는 변형($A_1C_1E_1$)과 이에 따라 변화되는 또 다른 대각선 연결성분($B_1D_1F_1$)과의 적절한 조합이 필요하다. 즉, 긴

주대각선은 줄이고, 짧은 주대각선은 늘이는 변형이 필요하다. 물론, 이러한 변형에서 둘레의 길이와 넓이의 변화를 잘 살펴보아야만 한다.

2) 마름모와 정사각형: 추론의 시작

긴 주대각선은 줄이고, 짧은 주대각선은 늘이는 변형의 아이디어 찾기 위해서, 마름모의 두 대각선변형을 생각해보자. 이미 학생들은 전 차시에서 삼각형의 등주문제를 학습하였고, 또한 [그림 III-9]같이 등주문제의 답이 마름모까지 진척되어있는 상태이다.



[그림 III-9] 둘레의 길이를 유지한 상태로 사각형을 마름모로 만들기

다음은 영재수업(2017년 4월 1, 8, 22일) 중의 둘레의 길이가 같은 마름모와 정사각형의 넓이 비교와 관련된 에피소드이다.

지도교수: 정사각형과 이와 둘레의 길이가 같은 마름모의 넓이를 직접비교 할 수 있을까요?[4]

학생들: ⋯

지도교수: 마름모와 정사각형의 다른 점에는 어떤 것이 있을까요?

S_1: 각이 다른데요.

S_2: 마름모는 두 대각선의 길이가 다르고, 정사각형은 두 대각선의 길이가 같아요.

지도교수: 음. 마름모의 두 대각선의 길이를 같게 만들면 정사각형이 되겠지요?

학생들: (개별적으로) 어떻게 같게 만들지⋯

지도교수: 긴 대각선은 줄이고 짧은 대각선은 늘이면 되지 않을까요?

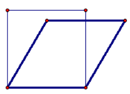
S_2: 두 대각선길이의 평균을 구하면 될 것 같아요.

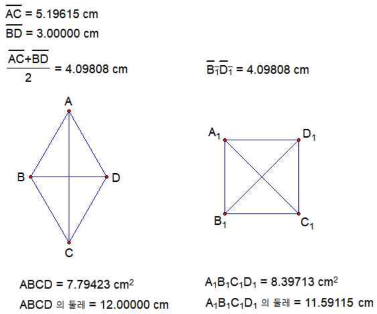
지도교수: 주어진 마름모와 주어진 마름모의 두 대각선 길이의 평균을 대각선으로 가지는 새로운 정사각형을 각각 그리고 넓이를 비교해 보세요.

학생들: 새로운 정사각형의 넓이가 더 큽니다([그림 III-10] 참조).

---

4) 매년 영재반 15명의 학생 중 1, 2명 학생만이 다음과 같은 창의적인 아이디어를 보여 주고 있다.





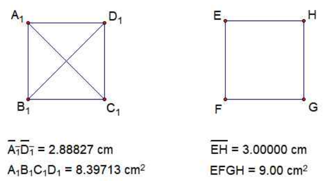
[그림 III-10] 마름모에서 두 대각선의 평균화

지도교수: 그러면 주어진 정사각형과 새로운 정사각형은 어떤 관계가 있나요?

S_2: 새로운 정사각형의 한 변의 길이가 원래의 정사각형의 한 변의 길이보다 작기 때문에 새로운 정사각형이 원래의 정사각형에 포함됩니다.

지도교수: 그러면 새로운 정사각형과 주어진 정사각형 중 어느 것이 넓이가 더 큰가요?

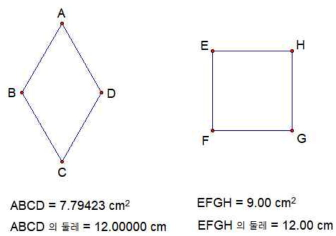
학생들: 원래 정사각형이요([그림 III-11] 참조).



[그림 III-11] 새로운 정사각형과 주어진 정사각형의 넓이비교

지도교수: 주어진 마름모와 주어진 정사각형 중 어느 것이 넓이가 더 큰가요?

학생들: 원래 정사각형이요.



[그림 III-12] 둘레의 길이가 같은 마름모와 정사각형의 넓이비교

지도교수: 이제, 우리가 정당화해야 될 사실은 무엇인가요?

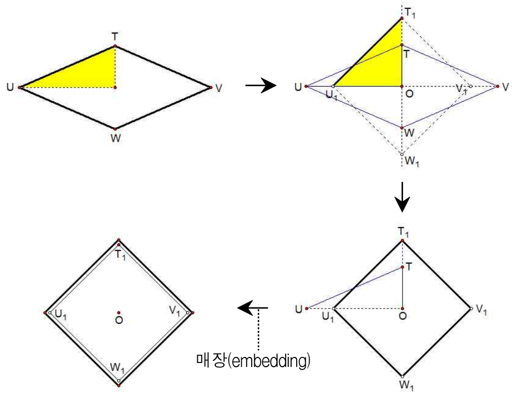
학생들: …

지도교수: 그러니까 주어진 마름모의 두 대각선길이의 평균화 변형이 어떤 결과를 만들고 있나요?

학생들: 둘레의 길이는 짧게, 넓이는 더 크게 만듭니다.

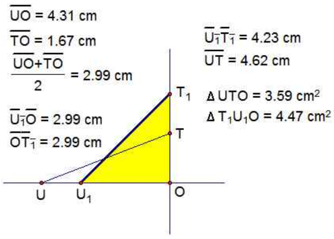
지도교수: 그 이유를 생각해보세요.

위 에피소드에 논의된 학생들의 활동을 조직화하면 [그림 III-13]과 같다.



[그림 III-13] 사각형의 등주문제 조직화(수학화)

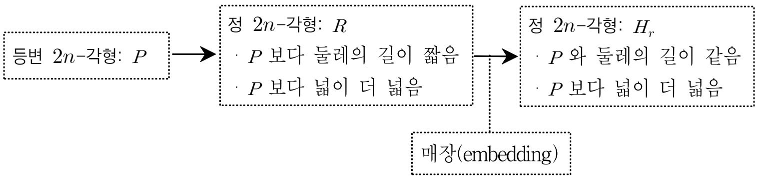
그리고 [그림 III-13]의 증명을 위한 추론과정은 [그림 III-14]와 같다. 몇몇 학생은 초등학생임에도 불구하고 피타고라스의 정리를 사용하여 선분 UT의 길이와 선분 U_1T_1의 길이를 비교하려고 하였다. 이러한 생각은 대각선이 직각으로 만나지 않는 짝수각형의 등주문제를 해결하는 경우에는 초등학생의 입장에서 효과적인 방법이 되지 않는다.



[그림 III-14] Geometer's Sketchpad를 통한 추론

3) 짝수 다각형으로의 일반화: GSP에 의한 추론과 정당화

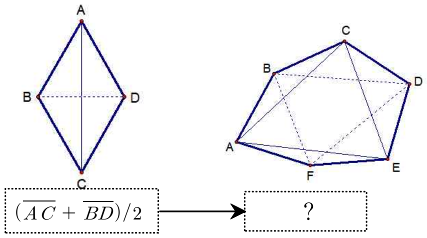
짝수 다각형의 등주문제의 해결방안 중 이 논문에서 우리가 생각하는 방법은, 앞선 학생들과의 에피소드에서 논의된 '주어진 마름모의 넓이 증가 변형 결과로 나타난 새로운 정사각형을 주어진 마름모와 둘레의 길이가 같은 정사각형에 매장'시키는 방법([그림 III-13] 참조)을 일반화하는 것이다. 즉,



[그림 III-15] 일반화 과정

3장 2절에 의해서 일관성을 잃지 않고 등변을 가정하고 시작하여도 무방하다. 사각형의 경우인 2)의 아이디어를 [그림 III-15]와 같이 일반적인 등변 짝수각형으로 일반화하려면, 다음을 고려하여야 한다.

등변사각형(마름모)에서 두 대각선 길이를 평균화하는 개념을 일반적인 등변 짝수각형에서 어떻게 개념화를 하여야할 것인가?



[그림 III-16] 두 주대각선 길이의 평균화

이 논문에서의 증명의 기본적인 아이디어와 과정은 다음과 같다.

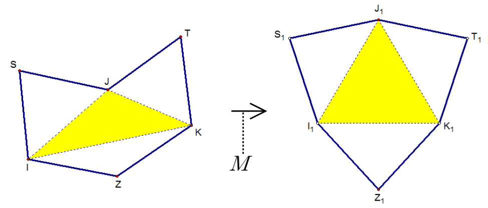
먼저, 등변 $2n$-각형의 두 개의 주대각선 연결성분 중 하나를 택하여, 그 주대각선으로 구성된 n-각형을 둘레의 길이가 같은 정 n-각형으로 변형시킨다. 변형의 결과가 볼록 등변다각형이 되도록, 필요하다면 오목 등변다각형인 경우에는 대칭변환을 이용하여 볼목 등변 다각형으로 변형한 후 주대각선 변형을 시작한다. 이 변형과 관련하여 알 수 있는 사실은 다음과 같다.

- 선택된 주대각선 연결성분에 붙어 있는 삼각형들에 M-변형이 적용된다([그림 III-3] 또는 [그림 III-7] 참조).
- 선택된 주대각선 연결성분에 붙어 있는 삼각형들에 M-변형 적용 결과로 나타난 두 개의 정 n-각형의 변의 길이가 일반적으로 같지 않다. 예를 들어, [그림 III-8]에서 정삼각형 $A_1C_1E_1$과 정삼각형 $B_1D_1F_1$는 일반적으로 합동이 아니다.

둘째, 등변 $2n$-각형의 내부에 있는 정 n-각형의 무게중심과 각 꼭짓점을 연결하는 삼각형에 적절한 변형(E-변형, [그림 III-19] 참고)을 통해서 주어진 등변 $2n$-각형보다 둘레의 길이는 짧고 넓이는 더 넓은 정 $2n$-각형을 만든다([그림 III-18] 참고). 따라서 '임의의 등변 $2n$-각형에 대해서, 자신보다 둘레의 길이가 더 짧고 넓이는 더 넓은 정 $2n$-각형을 만들 수 있다.' 그러므로 임의의 등변 $2n$-각형은 자신과 둘레의 길이가 같은 정 $2n$-각형보다 넓이가 더 작음을 알 수 있다.

여기서 $n=3$인 경우, 즉 등변 6각형으로 위의 과정을 알아보자.

단계 1: 주대각선들로 구성된 다각형을 둘레 길이가 같은 정다각형으로 만들기:



등변 6각형 H 등변 6각형 $J_1T_1K_1Z_1I_1S_1$

[그림 III-17] M-변형

[그림 III-17]에서, 다음이 성립한다.

$$\triangle IJK\text{의 둘레의 길이} = \text{정 } \triangle I_1J_1K_1\text{의 둘레의 길이}$$

이러한 변형은 넓이를 더 크거나 같은 등변 6각형을 만든다. 실제로,

· (**삼각형의 등주문제**)

$$\triangle IJK\text{의 넓이} \le \triangle I_1J_1K_1\text{의 넓이}$$

· (M-**변형**)

$$\triangle ISJ\text{의 넓이} + \triangle JTK\text{의 넓이} + \triangle KZI\text{의 넓이}$$
$$\le \triangle I_1S_1J_1\text{의 넓이} + \triangle J_1T_1K_1\text{의 넓이} + \triangle K_1Z_1I_1\text{의 넓이}$$

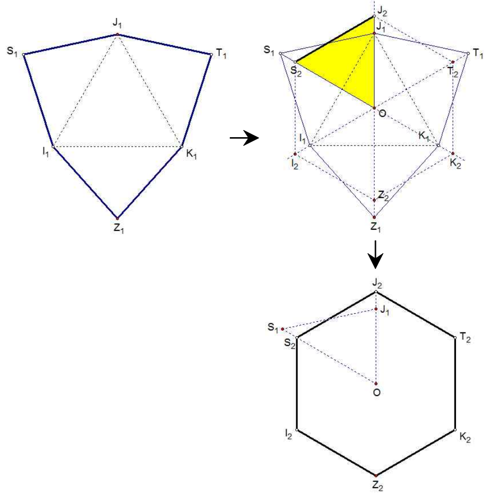
따라서 다음을 알 수 있다.

(1) 등변 6각형 H의 둘레의 길이 $=$ 등변 6각형 $J_1T_1K_1Z_1I_1S_1$의 둘레의 길이
(2) 등변 6각형 H의 넓이 $\le$ 등변 6각형 $J_1T_1K_1Z_1I_1S_1$의 넓이

단계 2: 다각형의 무게중심 O를 이용한 삼각형의 변형(E-변형): 예를 들어, [그림 III-18]에서

$$\triangle S_1J_1O \to \triangle S_2J_2O,\ S_1O+OJ_1 = S_2O+J_2O, S_2O = J_2O$$

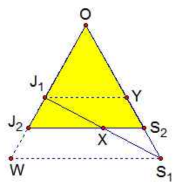
다른 경우도 이와 같은 방법으로 변형한다.



[그림 III-18] E-변형을 이용한 등변다각형의 정다각형화

이제, 이러한 변형에 대해서 둘레의 길이 변화와 넓이의 변화를 생각해보자.

먼저, 넓이의 변화를 살펴보자. 이것을 위해서 [그림 III-18]에서 채색된 부분을 [그림 III-19]와 같이 생각해보자.



[그림 III-19] 넓이의 변화

[그림 III-19]에서

$$S_1O + OJ_1 = S_2O + J_2O,\ S_2O = J_2O$$

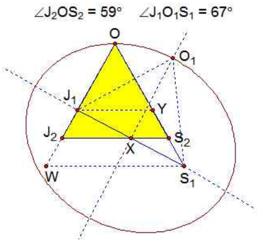
이기 때문에, J_2X는 $\triangle WJ_1S_1$의 중선이고 XS_2는 $\triangle YJ_1S_1$의 중선이다. 그러므로

$$XS_2 = \frac{J_1Y}{2} \le \frac{WS_1}{2} = J_2X$$

이고 따라서 $\triangle J_2J_1X$의 넓이는 $\triangle XS_2S_1$의 넓이보다 크거나 같고, 이에 따라 $\triangle S_2J_2O$의 넓이는 $\triangle S_1J_1O$의 넓이보다 크거나 같다. 즉,

$\triangle S_1J_1O$의 넓이 $\le$ $\triangle S_2J_2O$의 넓이 ·· (a)

이제, 둘레의 길이 변화를 살펴보자. 이를 위해서 [그림 III-20]에서와 같이 J_1와 S_1을 두 초점으로 하고 점 O를 지나는 타원을 생각해보자. 여기서 X는 $\overline{J_1S_1}$의 중점이고 따라서 타원의 중심임을 알 수 있다.

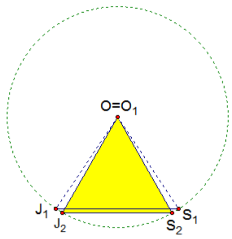


[그림 III-20] E-변형

[그림 III-20]에서 $\triangle S_1J_1O$에 E-변형을 적용하면 결과로 $\triangle J_1O_1S_1$를 얻을 수 있고, 이로부터 $\angle J_2OS_2 = \angle J_1OS_1 \le \angle J_1O_1S_1$이고, 또한 $OJ_2 = OS_2 = O_1S_1 = O_1J_1$가 성립한다.

따라서 다음을 알 수 있다 ([그림 III-21] 참조).

$$J_2S_2 \le J_1S_1 \quad \cdots\cdots \text{(b)}$$



[그림 III-21] 두 선분의 길이 원에서 비교

따라서 (a)과 (b)에 의해서 다음을 얻는다.

(3) 정 6각형 $J_2T_2K_2Z_2I_2S_2$의 둘레 길이 $\le$ 등변 6각형 $J_1T_1K_1Z_1I_1S_1$의 둘레 길이

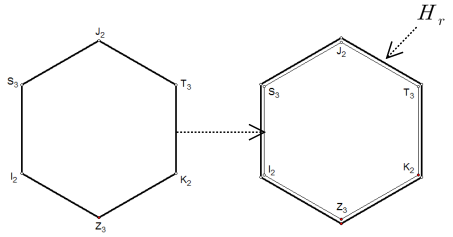
(4) 등변 6각형 $J_1T_1K_1Z_1I_1S_1$의 넓이 $\le$ 정 6각형 $J_2T_2K_2Z_2I_2S_2$의 넓이

단계 3: (1), (3)에 의해서, 다음을 얻는다.

정 6각형 $J_2T_2K_2Z_2I_2S_2$의 둘레의 길이 $\le$ 등변 6각형 H의 둘레의 길이

따라서 정 6각형 $J_2T_2K_2Z_2I_2S_2$은 H와 둘레의 길이가 같은 정 6각형 H_r에 매장(embedding)([그림 III-21] 참조)될 수 있고, 따라서 다음을 알 수 있다.

(5) 정 6각형 $J_2T_2K_2Z_2I_2S_2$의 넓이 $\le$ 정 6각형 H_r의 넓이



[그림 III-22] 정 6각형 $J_2T_2K_2Z_2I_2S_2$ 의 정 6각형 H_r 로의 매장(embedding)

따라서 (2), (4)와 (5)에 의해서, 다음을 얻는다.

$$\text{등변 6각형 } H\text{의 넓이 } \leq \text{정 6각형 } H_r\text{의 넓이}$$

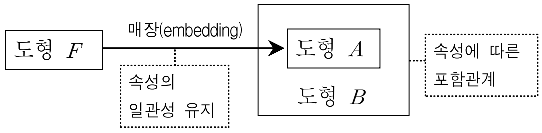
IV. 요약 및 결론

다각형과 관련된 등주문제는 고대 그리스 수학자인 Zenodorus의 저술에 나타나 있지만 그의 증명에서 약간의 오류가 보인다(Blasjo, 2005 p.530). 이러한 오류는 등각의 문제를 증명하는 도중에 나타난다. 이 논문에 언급된 등주문제와 관련된 선행논문들의 주된 논제 또한 등각의 문제와 관련이 깊으며, 이 논문도 등각 문제의 해결책을 좀 더 명확히 하려는 목적으로 연구되었다.

일반적으로 다각형의 등주문제는 주로 원의 내접다각형의 관점으로 해결책을 모색한다(이광연, 1998). 반면, 이 논문은 영재 프로그램의 일환으로 '대각선의 변형을 통한 해결책'에 관심을 두고 이를 수학화하는 것에 초점을 맞추고 있다. 실제로, 제주대학교 영재교육원 수학반 프로그램 중 하나인 등주문제는 이러한 관점으로 조직화되어 있으며, 근 10년간(매년 9시간) 프로그램으로 운영되고 있으며, 이 논문은 프로그램 운영 과정 중에 도출된 결과를 분석 조직화(수학화)하고 정당화에 미비한 점을 보이고 있는 짝수각형의 등주문제 해결 아이디어를 제공하는 것이 목적이다.

등주문제와 관련된 선행 논문(최근배, 2009, 2011; 이재운・최근배,2015)은 문제해결 전략으로 이 논문에서 언급하고 있는 '대각선의 변형을 통한 해결책'을 사용하고 있으며, 이는 주로 E-변형과 M-변형으로 조직화 할 수 있음을 보여 주고 있으며 이 논문의 주된 논제인 짝수 다각형의 등주문제도 두 가지 변형 (E-변형과 M-변형)을 사용하면 해결될 수 있음을 보여 준다.

이 논문에서 얻을 수 있는 교육적인 시사점은 다음과 같다. 첫째, 다각형의 등주문제를 엄밀한 방법인 대수・해석적인 방법으로 해결할 수 있지만, Steiner의 언급 "계산은 사고를 대신하지만 기하는 사고를 자극한다."을 상기하면 기하적인 문제를 기하적인 방법으로 해결하는 것이 도형감각과 직관적인 사고를 중시하는 (초등)수학교육의 입장에서 더 타당하다. 이러한 점에서 이 논문의 목적을 알 수 있다. 실제로, 이 논문에서는 존재성의 문제를 가정하고 두 기하적인 변형인 E-변형과 M-변형만을 이용하여 다각형의 등주문제를 해결할 수 있음을 보여주는 학습 자료를 제공하고 있다. 둘째, 다각형의 등주문제를 해결하는 수학화의 과정에서 이 논문의 기본적인 문제해결 전략은 주어진 두 도형의 넓이를 간접비교 할 수 있는 매개도형을 만들자는 것이다. 일반적으로 두 도형의 넓이는 직접비교가 불가능하지만 매개도형을 만들어 간접비교할 수 있다. 이를 일반적인 문제해결 전략의 관점으로 취급하고 이를 도식화하면 [그림 IV-1]과 같다. [그림 IV-1]에서 도형 F 와 도형 B의 속성을 직접비교가 불가능한 경우, 도형 A가 매개도형이 되어 도형 F 와 도형 B의 속성을 비교할 수 있다.



[그림 IV-1] 간접비교 전략

실제로, 이 논문에서는 등변 짝수 다각형을 일관성을 유지하는 변형을 통해서 정다각형(매개도형)으로 만들고 등주문제의 답으로 예측된 정다각형 속으로 매장하는 전략을 사용하고 있다. 셋 째, 수학화의 과정에서 교구의 활용은 수학적 사고활동에 중요한 역할을 한다. 실제로, 이 논문에서 등주문제 해결을 위한 추론과 정당화 과정의 아이디어 도출을 위한 교구로서 동적 기하 소프트웨어 GSP가 중요한 역할을 하고 있음을 볼 수 있다. 끝으로, 이 논문을 통해서, 등주문제와 동치인 문제를 생각해보고 이를 정당화하는 수학화의 기회를 가질 수 있다. 이를테면, '넓이가 일정한 n-다각형 중에서 둘레의 길이가 가장 짧은 도형은 어떤 모양일까?' 라는 문제를 초등 또는 중학교 수준에서의 기하적인 방법으로 조직화하는 도전적 과제로 경험할 수 있다.

참 고 문 헌

강문봉・강흥규・김수미・박교식・박문환・서동엽・송상헌・유현주・이종영・임재훈・정동권・정은실・정영옥 (2005), 초등수학교육의 이해, 서울: 경문사.

Kang, M. B. et el., Understanding of Elementary Mathematics Education, Kyungmoon Press. Seoul.

이광연 (1998). 등주문제에 관한 연구. 성균관대학교 교육대학원.

Lee, K. Y. (1998). A Study on the Isoperimetric Problems, Graduate School of Education, SungKyunKwan University

이재운・최근배 (2015). A Study on the Equiangular Problem in the Isoperimetric Problem of Polygons, *East Asian Math. J.* 31(4), pp. 447-460.

Lee, Jaeun & Choi, Keunbae. (2015). 다각형의 등주문제에서 등각의 문제 고찰, East Asian Math. J. 31(4), pp. 447-460.

최근배 (2009). 초등수학 영재를 위한 평면에서의 등주문제 고찰(게슈탈트 관점을 중심으로). 학교수학, 11(2), 227-241.

Choi, Keunbae. (2009). A Study on the Isoperimetric Problem in a Plane focused on the Gestalt's View for the mathematically gifted Students in the elementary School, *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 11(2), 227-241.

최근배 (2011). 초등 영재 교수・학습을 위한 평면에서의 등주문제 내용구성 연구-기하적인 방법을 중심으로-. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 50(4), 441-466.

Choi, Keunbae. (2011). A Study on the Teaching Design of the Isoperimetric Problem on a Plane for Mathematically gifted students in the Elementary School -focused on the geometric methods-, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 50(4), 441-466.

최근배・채정림 (2014). 등주문제 분석을 통한 공간감각 계발을 위한 학습자료 추출 연구. 학교수학, 16(4), 677-690.

Choi, Keunbae. & Chae, J. L. A Study on the Abstraction of Learning Materials from the Isoperimetric Problem to Develop a Spatial Sense, *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 16(4), 677-690.

Blasjo, V. (2005). The Evolution of the Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly, 112*, 526-566.

Demjanenko, S. (2008). The Isoperimetric Inequality: A History of the Problem, Proofs and Applications. *http://astrophysicsgeek.files.wordpress.com/2008/04/paper_final.pdf*

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Reidel: Dortrecht.

Hildebrandt, S. & A. Tromba (1996). *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag New York, Inc.

Siegel, A. Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Plane Geometry. preprint. *http://www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf*

Spivak, M. (1979), A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 4, 2nd ed., Publish or Perish, Berkeley, CA.

Tapia, R. A. (2009). The Remarkable Life of the Isoperimetric Problem: The World's Most Influential Mathematics Problem. *http://www.princeton.edu/~wmassey/CAARMS15/PDF/Tapia.pdf*

On the Isoperimetric Problem of Polygons: the mathematical reasoning and proof with the Geometer's Sketchpad

Choi, Keunbae

Dept. of Math. Edu., Teachers College, Jeju National University, Jeju 690-781, Korea

E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr

In this paper, we deal with the isoprimetric problem of polygons from the point of view of learning materials for elementary gifted students. The isoperimetric problem of the polygon of odd degree can be solved by E-transformation(see Figure III-1) and M-transformation(see Figure III-3). But in the case of even degree's polygon, it is quite difficult to solve the problem because of the connected components of diagonals (here we consider the diagonals forming triangle with two adjacent sides of polygon). The primary purpose of this paper is to give an idea to solve the isoperimetric problem of polygons of even degree using the properties of ellipse. This idea is derived from the programs of the Institute of Science Education for Gifted Students in the Jeju National University.

* ZDM Classification : M19, D59, G19

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50, 97B50

* Key words : isoprimetric problem, polygon, mathematisation, ellipse