韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.3.311
2018. 08. 제 57권, 제 3호, 311-328.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2018, Vol. 57, No. 3, 311-328.

수학적 지식으로서의 평균 개념 구성 과정에서 나타난 학생들의 표현에 관한 연구

이동근(문정고등학교)

Ⅰ. 서론

'평균'이라는 용어는 일상에서 자주 사용되는 용어이며 동시에 학교수학에서도 초, 중, 고등학교 전 과정에서 접할 수 있는 용어이기도 하다. 일부 학생들은 초등학교 때부터 자신들이 시험 본 여러 과목들의 평균 점수를 내는 것을 익히게 되며 또한 그러한 과정으로 구한 평균 점수로 자신들의 위치를 비교하기도 한다. 즉, 학생들은 학교수학을 통하여 평균 개념을 학습하기 이전부터 일상의 경험과 필요에 따라 '평균'이라는 용어에 노출되어있다.

그런데 학생들이 학교수학에서 평균 개념 학습 이전에 일상에서 접하게 되는 평균 개념에는 '대표', '균등'과 같은 다양한 의미가 내포되어있으며, 이렇게 학생들의 경험에 의하여 구성된 학생들 개개인의 평균 개념은 오히려 학교에서의 평균 개념 학습에 영향을 줄 수도 있다. 학교 수업에 의하여 평균 개념이 구성되는 것이 아니라, 학생의 경험에 의하여 학교 수업에서의 평균 개념 학습이 이루어질 수 있음을 보여준다.

한편 학교수학에서 평균 개념은 통계단원에만 국한된 개념은 아니다. 특히 고등학생들의 경우 절대부등식을 학습하는 과정에서 산술평균, 기하평균에 대하여 학습하게 되며 미적분 학습에서는 평균변화율 혹은 평균속도 개념을 학습할 때 평균 개념이 관련된다. 이때 산술평균은 학생들이 시험점수의 평균을 구할 때 사용하는 절차와 동일하지만, 기하평균은 구하는 절차가 산술평균의 절차와는 다르다. 또한 산술평균과 기하평균은 이산적인 양을 대상으로 한다면, 평균변화율이나 평균속도의 경우는 연속적인 양을 대상으로 한다는 점에서 차이가 있다. 이처럼 학생들이 학교수학에서 학습하게 되는 평균 개념은 '절차'와 '대상의 양적 속성'에서 차이가 있음에도 불구하고, 학생들이 다양한 평균 개념들을 어떻게 수학적 지식으로 구성하여가는 지에 대한 연구는 드문 편이다. 산술평균, 기하평균, 평균속력 등의 용어들을 한데 아우를 수 있는 평균 개념을 구성하지 못할 경우, 학생들은 각각의 용어들에 대한 학습을 경험할 수는 있으나, 이들 용어 속에 내재되어있는 평균의 속성에 대하여 고민할 수 있는 기회를 놓치게 될 수 있다. 즉, 산술평균, 기하평균, 평균속력에서 평균의 속성에 대하여 고민할 수 있는 기회를 제공하는 것은 각 용어들의 절차를 학습한 학생들이 새로운 개념적 지식을 구성할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 학생들의 지식구성을 절차적 지식과 개념적 지식이 교대로 순환되어 발달되는 과정으로 볼 때, 개념적 지식이 절차적 지식으로 변환되면 다시 개념적 지식으로 발달과정을 거치는데 어려움을 겪을 수 있다 (이동근, 김숙희, 2017). 이는 절차적 지식은 결과를 도출하는데 매우 효율적인 지식이기 때문이다(이동근, 김숙희, 2017). 이러한 이유로 절차적 지식을 구성한 학생들이 다시 개념적 지식을 구성하기 위한 과정을 거치는데 도움이 될 수 있는 정보의 축적은 개념 학습 관련 연구에 중요한 자료가 될 수 있다. 본 연구에서는 산술평균의 절차로 평균을 구하는 학생들을 대상으로, 그러한 절차로 구할 수 없는 기하평균과 평균속력에 대한 용어들에서의 평균 개념에 대하여 고민하는 학생들의 모습을 분석할 것이다. 이러한 연구는 학교수학의 전 시기와 다양한 영역에서 이용되는 평균 개념 학습에 대한 관심을 갖는 기초연구라는 측면에서 수학교육 연구로서 의미를

* 접수일(2018년 8월 4일), 수정일(2018년 8월 23일), 게재확정일(2018년 8월 27일)
* ZDM분류 : C30
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 평균, 산술평균, 확률들의 평균, 기하평균, 평균속력

갖는다. 특히 앞서 언급한 바와 같이 학생의 일상에서의 경험에 의하여 구성된 평균 개념에 의하여 학교 수업에서의 평균 개념 학습이 이루어질 수 있음을 가정할 때, 학생들이 경험에 의하여 구성한 평균 개념을 살펴보고, 이와 같이 학생들이 가지고 있는 평균 개념에서 시작하여 학교수학에서 경험하게 되는 다양한 평균 개념을 어떻게 자신의 수학적 지식으로 구성하여가는 지에 대하여 살펴보는 것은 큰 의미를 지닌다.

보통 평균 개념 관련 연구는 통계 교육과 연계하여 진행된 경우가 많다. 이는 평균 개념이 가지는 속성 중에서 '자료를 요약하여 대표하는 성질'이 통계 교육에서 중요한 역할을 할 수 있기 때문이다(이춘재, 전평국, 2006). Mamich(2008)은 산술평균에 대한 이해를 언급하면서 수학적 지식과 통계적 지식으로서의 산술평균에 대한 지식을 언급하였다. 예를 들어 주어진 수 $'10, 8, 6, 4, 2'$의 평균을 구할 때 $\frac{10+8+6+4+2}{5}$의 절차를 거쳐 값을 구하는 것을 수학적 지식으로 보았고, 주어진 맥락에서 최빈값이나 중앙값이 아닌 '산술평균'을 답으로 제시하는 이유에 대한 고민을 통계적 지식으로 보았다(박미미, 이동환, 이경화, 고은성, 2012). 본 연구에서는 산술평균, 기하평균, 평균속력과 같은 수학적 용어들에서 학생들이 이들 용어에서 공통적으로 사용되고 있는 평균 개념을 어떻게 구성하여가는 지에 대하여 관심을 두고 있으므로, 통계적 지식으로서의 평균 개념보다는 수학적 지식으로서의 평균 개념에 초점을 맞추어 논의를 진행할 것이다.

Mokros와 Russell(1995; 1996)은 초・중등학교 학생들이 가지고 있는 대푯값에 대한 개념을 조사하였다. 그들은 이를 통하여 초등학교 이전에 대푯값에 대한 비형식적 개념 유형이 나타나며, 이를 바탕으로 고학년에서 대푯값의 개념적 이해를 한다고 주장하였다. 그런데 대푯값과 관련된 연구들은 산술평균에 대한 연구와 맞물려 있다. 이는 산술평균 개념에 대한 이해가 대푯값의 개념 관련 연구에 근간이 될 수 있기 때문인 것으로 보인다. 이러한 점을 고려하면 학생들은 평균 개념을 구성할 때, 처음에는 산술평균으로 개념을 구성하는 것으로 볼 수 있다. 그러나 이동근(2017)에 의하면 '평균속력'과 같이 학생들이 생각하는 산술평균 개념의 범위를 벗어나는 상황(연속적인 변화 상황)에 대하여도 평균이라는 용어를 사용하는 것이 관찰되기도 한다. 이러한 두 가지 상황 속에서는 간격이 존재하는바, 본 연구에서는 학생들이 이처럼 다양한 평균 개념을 어떠한 방식으로 상호 연결 지어 구성해 가는지에 대하여 관찰할 것이며, 특히 이 과정에서 학생들이 사용하는 수학적 표현에 집중할 것이다. 예를 들어 Friel(1998)이 평균 개념 학습에 대한 전략으로 '똑같이 나누기'와 '균형' 모형을 제시하였는데, 본 연구에서는 학생들이 어떠한 방식으로 '똑같이 나누기'전략에서 '균형' 모형을 구성하여 가는지와 같이 학생들이 평균 개념을 상호 연결 지어 가는 지에 대하여 학생들의 표현을 중심으로 구성적 관점에서 살펴보고자 한다.

본 연구에서는 이러한 점에 주목하여 과제에 기반 한 총 3회의 면담을 거쳐 학생들의 평균에 대한 표현을 중심으로 살펴보았다. 3회의 면담에 근거하여 학생들의 평균 개념 구성에 대한 논의를 진행하는 것에 대한 제한점은 있으나, 이와 같이 학생들이 드러내는 평균이라는 용어의 표현에 근거하여 학생들의 평균 개념에 대하여 이해하려는 노력은, 추후 평균 개념 학습 관련 연구에 기초 연구가 될 수 있을 것으로 보인다. 또한 학교수학에서 여러 학년에 걸쳐서 연관되는 평균이라는 용어가 어떻게 학생들에게 받아들여지고 있으며 다른 개념을 구성하는데 있어 평균이라는 개념이 어떻게 영향을 미치는지와 같은 다양한 연구에도 도움이 될 수 있다. 본 연구는 3회의 면담을 진행하는 과정에서 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

첫째, '비(rate)로 표현된 값들을 더해서 나누어주는 절차'에 대한 학생들의 표현의 변화는 어떠한가?

둘째, 산술평균, 기하평균, 평균속력에서 평균이라는 용어에 대한 학생들의 표현의 변화는 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. '평균'이라는 용어의 다양한 표현과 그 관계

앞서 언급한 바와 같이 평균이라는 용어는 수학적 용어이면서 동시에 일상에서 자주 사용되는 용어이기도 하다. 또한 학교수학에서도 초등학교에서부터 고등학교까지 사용되며 학습하게 되는 단원 역시 통계 단원에만 국한 되지 않고 미적분 개념에 까지 적용되는 용어이다.

보통 average와 mean을 평균으로 번역하여 사용하는데 arithmatic mean을 산술평균 대신 평균으로 사용하는 경우도 있다. 그러나 일상 혹은 학교수학에서 average와 mean과 같은 용어에 대한 구분을 엄밀하게 하는 경우는 드물다. 이러한 경향은 현재에만 그런 것이 아니라 과거에도 그랬었다. 200년 전 처음으로 중간값 정리를 이야기한 Ampere(1775~1836) 당시에도 average와 mean은 동의어로 사용되었다(Ellis, Gulick, 2000).

Average의 의미는 원시적인 보험에 그 뿌리를 두고 있으며, '배상금'이라는 단어가 현대의 평균의 기원이 되었다고 한다. 과거에 폭풍우로 배가 위험해지면 배의 짐 일부를 바다에 던져서 위험을 벗어난 이후, 무사히 운반된 짐의 주인들과 협의하여 짐을 잃은 주인들의 손해를 보상해주는 것에서 average라는 용어의 기원을 찾아볼 수 있다(Bakker, Gravemeijer, 2006). 그러나 수학에서 평균이라는 용어는 average, 산술평균, 기하평균, 조화평균 등과 같이 다양한 의미와 표현으로 사용되고 있다. 이때 Klein(2016)은 average와 mean을 구분하기는 하였지만, 둘의 관계를 명확하게 하나의 개념이 다른 개념에 포함되는 관계로 설명하지는 않았다. Savage(2014)도 Klein(2016)과 마찬가지로 두 개념을 구분하기는 하였으나 산술평균이라는 개념을 중심으로 average와 mean이 상호 연결되는 것으로 설명하였으며, 이 때문에 두 개념이 서로 혼용될 수 있음을 지적하였다.

학교수학에서는 average와 mean의 구분보다는 산술평균과 산술평균으로 표현할 수 없는 상황에서의 평균이라는 용어의 구분에 관심을 갖는 것으로 보인다. 주홍연 외(2010)의 연구에서는 평균(average)과 산술평균을 구분하여 사용하였는데, 평균(average)은 자료의 중심경향성을 나타내는 대푯값으로 보았고 산술평균은 여러 측도 중 하나로 보았다. 그런데 평균이라는 용어와 '산술평균'이 혼용되어 사용되는 사례들이 관찰된다. 2009 개정 교육과정에서는 초등학교 5, 6학년 군에서 산술평균을 '평균'이라는 용어로 도입하여 설명하고 있으며, 이후 고등학교의 수학Ⅱ 과목의 절대부등식 단원에서 산술평균과 기하평균의 관계를 학습하면서 비로소 '산술평균'이라는 용어를 직접적으로 사용하고 있다.

한편 고등학교 미적분Ⅰ의 미분의 응용 부분에서 '평균속도'라는 용어가 나타나는데, '평균속도'에서의 '평균'의 의미는 이산적인 변수가 아닌 연속적인 변수에 대한 '평균'이므로 '산술평균' 개념으로 소개하기 어려운 부분이 있다. 그런데 이동근(2017)의 연구를 포함하여 거리함수와 속력함수의 관계 속에서 평균속력에 대한 학생들의 인식과 표현을 연구한 연구(이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍, 2016; 이동근, 신재홍, 2017)들을 살펴보면, 학생들은 순간순간 연속적으로 변하는 값들에 대하여 평균이라는 용어를 붙이고 있으며, 해당 연구에 참여한 학생들은 평균이라는 용어를 이용하여 연속적으로 변하는 상황에 대한 물체의 운동을 설명하는 모습을 보여주었다.

2. 교육과정에서의 평균

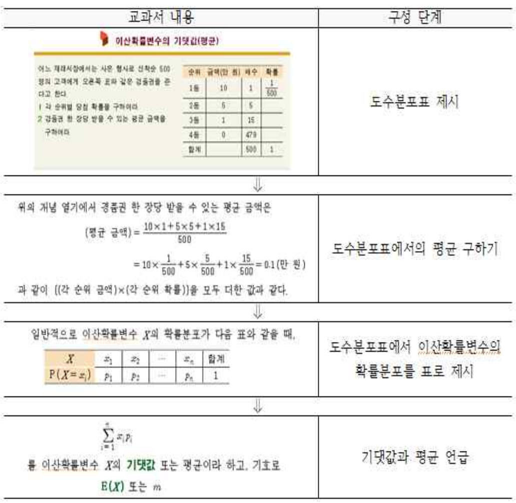
본 연구에서 참고한 문헌들이 우리나라의 7차 교육과정 전후시기의 논의를 담고 있으므로, 본 연구에서는 7차 교육과정과 2007 개정 교육과정, 2009 개정 교육과정, 2015 개정 교육과정에 대하여 살펴보았으며, 이들 중 가장 앞선 시기인 7차 교육과정을 중심으로 조사를 하였다. 7차 교육과정에서 평균 개념은 5학년 나 단계에서 주어진 자료의 합을 구하여 자료의 총 수로 나누는 방식으로 도입되고, 8학년 나 단계에서는 도수분포표에서 평균을 구하도록 하며 평균이 의미 있게 이용되는 여러 실생활 문제 상황을 관찰하는 것으로 되어있다(박영희, 2001). 이에 대하여 박영희(2001)는 학생들이 학습하게 되는 평균 개념이 다양할 수 있음에도 교육과정에서는 '추정'의 의미와 '공평함과 재분배'의 의미만 담고 있다고 지적하였다. 8학년 이후에는 10학년 가 단계에서 대푯값으로서의 평균을 학습하며, 10학년 이후에 선택과목으로 학습하게 되는 확률과 통계 과목에서는 기댓값에 대하여 학습하게 된다.

한편 7차 교육과정 이후 교육과정(2007 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정, 2015 개정 교육과정)에서도 세부적인 학습 시기에서는 차이가 있지만 큰 흐름 속에서는 산술평균으로 평균 개념을 도입하고 도수분포에서 평균을 구한 다음 기댓값에 대하여 학습하는 7차 교육과정에서의 흐름을 동일하게 따르고 있다.

특히 본 연구에서는 연구대상으로 일반계 고등학교 2학년 이과 계열의 학생들을 대상으로 면담을 진행하게 되므로, 고등학교에서의 평균 관련 학습에 대하여 세부적으로 살펴볼 필요가 있다. 2009 개정 교육과정을 기준

으로 고등학교의 ‘확률과 통계’ 과목의 통계 단원에서는 기댓값을 학습하게 되는데, 이때 기댓값과 평균의 관계를 명확하게 구분하기 보다는 오히려 ‘기댓값과 평균은 같은 값’이라는 것을 드러내는 정도로 소개하고 있다. 그런데 이러한 교과서 구성은 기댓값과 같은 값이라고 여겨지는 ‘평균’이 학생들에게 어떻게 받아들여지는 지에 대한 고민은 발견되지 않는다.

교과서 구성[1)]을 예로 들어 살펴보면 [그림 1]과 같다. 2009 개정 교육과정의 9종의 확률과 통계 교과서에서는 도수분포에서 이산확률변수 X의 확률분포를 구성하여 도수분포에서의 산술평균과 이산확률변수 X의 확률분포에서의 기댓값을 ‘같은 값을 가지는 것’으로 도입하고 있다. [그림 1]은 2009 개정 교육과정의 확률과 통계 교과서 중 한 교과서에서의 기댓값 도입 구성을 예로 제시한 것이다.



[그림 1] 기댓값 도입 구성 예시(김원경 외, 2015)
[Fig. 1] Example of the expected value introduction

[그림 1]에서 제시된 구성에서 기댓값과 동일한 값을 가지는 ‘평균’에 대하여 단순하게 산술평균을 ‘평균’이라고 생각하는 학생들은 [표 1]과 같이 ‘이산확률변수 X의 확률분포가 주어진 상황에서 산술평균을 구하는 과제’에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 대신, $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$과 같이 확률변수들의 합을 확률변수의 총 개수로 나누는 방식으로 생각하기도 한다.

[표 1] 이산확률변수 X의 확률분포
[Table 1] Probability distribution of discrete random variables X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

지금까지의 논의는, 연구대상 학생들에게 적용되는 2009 개정 교육과정에서의 교과서 구성에서 평균이라는 용어를 사용함에 있어 ‘학생들의 평균 개념’에 대한 고민이 없이 사용되고 있다는 것을 확인하였다는 점에서 의미가 있다. 이러한 정보는 연구자가 면담을 준비할 때 중요한 자료가 되며 최초 자료 구성이나 학생 반응에 대한 추가 과제를 구성할 때 도움이 될 수 있다.

3. 학생들의 평균 개념에 대한 연구

앞서 언급한 바와 같이 Friel(1998)은 평균 개념의 학습에 대한 전략으로 ‘똑같이 나누기’와 ‘균형’ 모형을 제시하였으며, 학생들의 평균 개념 발달에 두 모형 모두 사용할 것을 주장하였다. 이는 산술평균을 예로 들어서 이해하는 것이 가능하다. 산술평균으로 생각하였을 때 Friel(1998)이 제안한 ‘똑같이 나누기’ 전략은 n개의 자료 $x_i\ (1 \le i \le n)$에 대하여 자료의 총합 $\sum_{i=1}^{n} x_i$를 구한 다음 자료의 총 개수인 n으로 나누어 주어서 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$을 구하는 방식으로 볼 수 있다. 다음으로 ‘균형’ 모형은 자료를 배열할 때 대푯값을 중심으로 좌우의 값을 대칭시켜서 예상하거나, 좌우의 값이 대칭될 수 있는지 확인하여 대푯값을 구하는 것과 관련된 전략이다. 더 나아가서 자료 전체의 합이 ‘대푯값×자료수’를 인식하는 것을 포함한다. 이를 수식으로 표현하면 균형에 해당하는 값 m과 자료의 총 개수n의 곱 $m\times n$의 값이 자료의 총합

1) 교과서 구성 예시에서의 교과서는 연구대상 학생들의 교육과정을 고려하여 2009 개정 교육과정의 교과서를 근거로 제시하였다.

$\sum_{i=1}^{n} x_i$와 같아지는 때를 뜻한다. 즉 $mn = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 일때의 m의 값을 구하는 전략이다. 이러한 Friel(1998)의 '균형' 모형은 박영희(2001)의 연구에서 대푯값을 분류할 때는 '추정'이라는 용어로 설명되고 있다.

박영희(2001)는 산술평균 학습에서 계산식에 대한 학습이 아닌 개념 속에 있는 추정, 상호조정, 균형점, 공평함과 재분배, 오차의 최소화, 가중평균의 여러 의미를 학습할 필요가 있다고 하였으며, 각각의 의미에 대한 사례들을 제시하여 설명하였다. 특히 본 연구와 관련해서 박영희(2001)의 연구에서는 '추정'과 '공평함과 재분배'의 분류 내용에 대하여 살펴볼 필요가 있다. '추정'은 앞서 언급한 Friel(1998)의 '균형' 모형과 유사하고, '공평함과 재분배'는 남는 부분에서 부족한 부분으로 이동하여 같게 만든다는 개념과 연관되어있다. 또한 박영희(2001)의 '공평함과 재분배'는 Groth (2005)의 균등화(Leveling-off)의 전략과도 연결 지어 생각할 수 있다. Groth (2005)의 균등화(Leveling-off)의 전략은 남는 부분을 덜어내어 부족한 부분으로 나누어주어 평평하게 만드는 전략으로 볼 수 있다.

이와 같이 평균 개념의 분류 방식은 학자들의 분류 기준에 따라 다양할 수 있지만, 공통적으로 그들 개념 사이의 연계성을 강조하고 있다. 즉, 분류 기준 항목들은 서로 독립적으로 구분되는 것이 아니라 상호 연결되어있으며, 다양한 과제 상황 속에서 분류 기준 항목들 사이의 관계를 살펴보는 것은 평균 개념의 의미를 더욱 풍부하게 해줄 수 있다. 또한 주홍연 외(2010)은 평균 혹은 산술평균의 개념화에 관련된 연구들을 분석하여 소개하면서, 질적으로 심도 있게 구체화한 연구가 부족함을 지적하고 해당 연구들의 필요성을 주장하였다. 이러한 관점에서 평균 개념의 다양한 속성들에 대하여 학생들이 어떻게 구성하는지에 대한 것은 추후 평균 개념 학습 관련 연구에 매우 중요한 정보를 제공하여줄 것으로 기대된다.

평균 개념 학습 관련 연구로는 평균에 대한 학생들의 이해 발달 과정(Mokros & Russell, 1995; Strauss & Bichler, 1988; Watson & Moritz, 2000)에 대한 연구와 평균을 어떻게 개념화하는지에 대한 연구(주홍연 외, 2010; Mokros & Russell, 1995; Strauss & Bichler) 및 평균을 구성하는 개념들의 관련성에 대한 연구(Marnich, 2008)등이 있었지만, 국내 연구는 상대적으로 드문 편이었다.

이에 따라, 본 연구에서는 평균 개념에 대한 학생들의 인식과 표현을 조사를 바탕으로 선행 연구들에서 구분한 평균 개념이 학생들에게서는 어떻게 구성 되어가는지 그리고 서로 관련성을 맺어가는 지에 대하여 학생들의 표현을 중심으로 확인하고 이를 바탕으로 학생들의 평균 개념에 관한 연구의 필요성을 살펴볼 것이다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 3회의 과제에 기반 한 비구조화된 면담을 거쳐 고등학교 2학년 학생 세 명을 대상으로 평균 개념에 대한 표현을 구성적 관점에서 살펴본 질적 사례연구(qualitative case study)에 해당한다. 과제를 중심으로 면담을 진행하기는 하였으나, 면담에 이용된 과제의 경우 연구자들의 협의 하에 설정한 최초 과제를 제외한 나머지 차시에 제시된 과제들은 연구대상에 해당하는 세 명의 학생들과의 면담 진행 과정에서 학생들로부터 제기된 과제 혹은 연구대상 학생들의 표현에 근거하여 연구자와 연구대상들의 합의에 의하여 결정되었다. 따라서 본 연구에서 진행된 면담 과정은 미리 예견된 계획에 의하여 진행되지 않고 과제에 대한 학생의 반응에 따라 구성되기 때문에 실험적인 성격이 강한 것으로 볼 수 있다. 또한 본 연구에서는 학생들에게서 제시된 과제에 대하여 학생들의 사고가 반영된 것으로 보기 때문에 학생들의 표현에 대한 수학적인 맥락이나 오류 유무에 대한 판단을 하기 보다는 그 속에 담긴 학생들의 사고와 의미에 대하여 고민하였다.

1. 면담법

Johnson(2002)은 연구문제가 다음과 같은 네 가지 속성 중 하나에 해당할 때 심층면담이 적용가능하다고 하였다.

1) 대부분의 구성원이 당연시하기 때문에 쉽게 드러나지 않는 지식을 발견하고자 할 때

2) 복합적인 정서를 동반할 때

3) 개개인 혹은 집단마다 다양한 관점에서 접근하는 문제일 때

4) 문제에 대한 세밀하고 깊이 있는 정보를 얻고 싶을 때

본 연구는 평균에 대한 학생들의 표현 속에서 학생들의 평균 개념과 관련된 깊이 있는 정보를 얻고자 한다는 측면에서 심층면담이 적절한 연구방법이 될 수 있다. 한편 연구자가 면담의 내용과 과정을 통제하는지 여부에 따라 구조화된 면담과 비구조화된 면담으로 구분한다고 할 때, 심층면담은 비구조화된 면담으로 볼 수 있다(신옥순, 2005).

구조화된 면담은 연구자가 사전에 질문할 문항들을 미리 준비하고, 준비된 질문에 근거하여 연구자가 연구대상에게 질문을 하고 연구대상이 답을 기록하는 방식이다(Fontana & Frey, 2000). 따라서 구조화된 면담은 면담의 전반적인 과정에서 연구자에 의하여 진행이 되며, 연구대상은 연구자의 요구에 반응해주는 수동적인 역할을 하게 된다. 또한 연구자 역시 연구자의 개인적 의견이나 선입견이 반영되지 않도록 주의해야하므로, 중립적인 자세를 취해야만 한다(Fontana & Frey, 2000).

반면 1960년대 이후 연구대상을 구성의 주체로 받아들이기 시작하였으며, 1980년대 이후에는 연구대상들의 구성적 방식에 관심을 갖게 되었다(Fontana & Frey, 2000). 이러한 맥락에서 비구조화된 면담을 고려할 때, 비구조화된 면담은 구조화된 면담에 비하여 연구대상에게 상당한 권한을 부여하는 것으로 볼 수 있다(Spradley, 1979). 비구조화된 면담에서는 연구자가 처음에 제시하는 주제나 질문에 대하여 연구대상이 자유롭게 면담의 내용과 질서들을 정해가며, 연구자는 연구대상의 의견을 듣는 학습자의 역할을 하게 된다. 상황에 따라 되묻거나 명료하게 대화를 정리하는 역할을 하기도 하지만, 연구자의 질문들은 연구대상의 생각이나 의견을 보다 심층적으로 듣고자 하는 것에 초점을 맞추게 된다. 물론 연구자가 면담 과정에 구성원이기에 어느 정도의 영향력을 가지고는 있기에 자신의 의견을 이야기할 수도 있고, 이러한 점은 연구대상이 자기표현을 하는데 도움이 될 수 있다(신옥순, 2005). 따라서 심층면담의 결과물은 연구자와 연구대상이 공동으로 산출해낸 사회적 구성물로 보아야한다(Holstein & Gubrium, 1995).

본 연구를 위한 면담은 총 3차시(차시 당 실험 시간은 70분 내외)로 진행되었다. 1차시 면담에서는 답이 $\frac{1}{10}$로 나올 수 있는 문제를 구성하는 과제에 대한 학생들의 반응을 알아보는 방식으로 진행되었고, 2차시와 3차시는 이러한 최초 과제에서 나온 학생들의 반응에 근거하여 연구자와 연구대상 학생들이 합의하에 새로운 과제를 도출하여 면담을 진행하였다. 특히 1차시 면담에서 제시된 [과제1]에 대하여 학생들에게서 ‘확률들의 평균’이라는 표현이 제시된 전후 맥락의 장면을 중심으로 기술하였다. 따라서 본 연구에서는 학생들의 1, 2, 3차시 면담에서 드러난 ‘평균’ 개념에 대한 구성 과정을 자세하게 기술하고 이 과정에 학생들의 표현에 대한 변화를 세밀하게 분석할 것이다. 이때 학생들이 가지고 있는 ‘평균’ 개념은 수학적인 average 혹은 mean의 의미와는 또 다른 학생만의 독특한 개념을 포함할 것으로 예상된다. 이러한 학생만의 독특한 평균 개념을 이해하는데 있어, 앞서 살펴본 선행연구들이 도움을 줄 것으로 보인다. Average와 mean에 대한 연구에서 제시하였던 것과 같이 ‘남는 것을 부족한 부분으로 돌려주는 행위’나 ‘더해서 나누어주는 행위’ 등이 자연스럽게 학생들의 ‘평균’ 개념 구성 과정에서도 드러날 것으로 보이며, 본 연구에서는 학생들의 구성과정에서 보여주는 자연스러운 행위와 표현들에 대하여 관심을 가지고 분석할 것이다.

본 연구에서 진행하고 있는 면담에서 차시 당 면담 시간은 사전에 정하고 시작하는 것은 아니었으나 보통 학생들에게 다음 과제를 제시하기 위하여 연구자가 고민할 필요가 있을 때 종료하였다. 본 연구에서의 면담 자료는 2017년 7월 말 경의 방학 기간 중에 수합하였으며, 면담은 연구자[2]와 연구대상이 이틀에 걸쳐 하루에 1회 혹은 2회의 만남을 통하여 교실이 아닌 별도의 공간에서 이루어졌다. 면담이 진행된 공간은 연구대상들의 반응을 기록으로 남길 수 있는 카메라와 오디오 녹음기가 설치되어있는 곳이며, 연구자와 연구대상이 활동을 진행하는 장소와 연구보조교사가 대기하면서 면담을 관찰할 수 있는 별도의 공간으로 구성된 장소였다.

연구자(교직경력 15년차)는 면담 진행을 담당하였으며, 진행자가 학생들의 반응을 잘못 이해하거나 놓치는 부분에 대한 부분을 보완하기 위하여 1명의 다른 연구보조교사가 관찰자로 참여하였다. 연구보조교사는 면담이

2) 본 연구에서 면담을 진행한 교사는 연구자를 의미한다.

진행되는 장소의 가벽 바깥의 교무실에서 대기하면서 연구자와 연구대상인 세 명 학생들의 대화를 통하여 면담을 관찰하였다. 회의실에서 면담을 진행하는 연구자가 진행 도중 논의할 것이 있다고 판단이 되면 학생들이 과제를 수행하는 시간에 가벽 바깥의 교무실에 대기하고 있는 연구보조교사와의 논의를 거쳐 면담 진행에 대한 도움을 얻기도 하였다. 이때 면담이 진행되는 회의실 내부에서는 교무실 바깥이 보이지 않기 때문에 연구대상자들은 바깥에서 연구보조교사가 면담을 관찰하고 있다는 것을 인식하지는 못하였다.

매 차시 면담 종료 이후 연구자와 연구보조교사는 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 공동으로 분석하고 학생들과 합의한 다음 면담에서의 과제에 대한 준비를 하였다. 이와 같이 연구자들(연구자와 연구보조교사)의 협의를 거쳐 다음 차시에 대한 면담이 준비되면, 연구자는 이를 반영하여 최종 투입과제를 선정하여 다음 차시 면담을 진행하는 과정을 반복하였다. 면담 진행은 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 필요에 따라 연구자가 다른 학생들의 의견을 정리하여 전체 학생들에게 다시 확인시키거나 혹은 다음 단계로 넘어가기 위한 발문을 하는 정도의 수준에서 개입하기도 하였다.

본 연구와 관련된 면담은 앞서 언급한 바와 같이 학생들에게 '$\frac{1}{10}$을 평균값으로 가지는 문제를 구성하는 과제'에서 세 명의 연구대상 중 두 명의 연구대상 학생들이 '확률의 평균'이라는 용어를 사용한 것에서 시작하고 있다. 특히 본 연구는 학생들이 '확률의 평균'이라는 표현을 사용한 이후 교사가 제시하는 과제 상황에 대한 학생들의 반응을 통하여 최종적으로는 평균속력에 대한 논의까지를 포함하고 있다. 이 과정에서 연구대상 학생들의 평균 개념을 구성해가는 과정과 표현에 대하여 다루고 있다.

2. 연구대상자의 특성과 과제

연구대상자인 학생A, 학생B, 학생C는 연구자가 1년 동안 담임교사로서 지켜본 학생들이며, 수학 과목 학업 성취 수준은 상이하지만, 자신의 의견을 밝히는 것에 적극적이고 다른 학생들과 의사소통에 적극적인 학생들이었다. 연구자는 학생들의 연구 참여 의사를 확인하여 최종 선정하였다. 참고로 연구대상들의 학업 성취 수준은 2017년 4월에 실시한 전국연합학력평가의 수학 성적 등급을 기준으로 학생A는 2등급, 학생B는 3등급, 학생C는 6등급[3]으로 서로 상이한 학생들이다. 이러한 의도적인 표집은 면담에서 연구자가 더 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다(이동근, 2017; Merriam, 1997). 연구대상들의 수학 성적은 참고자료일 뿐이며, 면담에서 학생들에 의하여 구성되는 수학 개념의 질적 차이와는 관련이 없다. 즉, 본 연구에서의 면담에서는 학생 반응에 대하여 어느 반응이 우수하다는 식의 평가를 하지 않는다.

연구대상 학생들은 서울 소재 일반계 고등학교 2학년 이과 계열에 재학 중인 학생들로서 면담을 진행하기 이전 사전 지식에 대한 확인을 하였다. 연구자는 학생들에게 '평균'과 관련된 다음과 같은 두 가지 질문을 가지고 면담을 시행하였다.

1) '평균'이 무엇인지 알고 있는가?

2) 선행학습은 어디까지 하였는가?

이러한 두 가지 물음에 대하여 연구대상 학생들 모두는 '평균'을 산술평균 개념으로 인식하고 있음을 보여주었고, 확률과 통계 과목에 대한 선행학습을 확인한 결과 통계단원에 대한 학습 경험이 없는 것으로 답을 하였다. 이를 통하여 학생들이 '평균'과 관련하여 '기댓값'이라는 용어에 대하여 학습한 경험은 없는 것으로 볼 수 있다.

면담에서 제시된 주요 과제는 '답이 $\frac{1}{10}$이 되도록 학생들이 문제 상황을 구성하는 [과제1]'과 [과제1]의 상황에서 학생들이 사용한 '확률들의 평균'이라는 표현에 대하여 교사가 학생들에게 제시한 'A, B, C 세 명이 한 팀일 때, A의 적중률이 0.7, B의 적중률이 0.5, C의 적중률이 0.3이라고 하자. 이때 팀 적중률을 구하여라.'라는 [과제2]이다. [표 2]는 면담에서 제시된 주요 과제를 표로 정리한 것이다.

해당 과제에 대한 교사와 학생의 활동 과정을 담은 1차시와 2차시 및 3차시의 면담 분석 결과는 Ⅳ장 '연구결과' 부분에서 자세히 제시할 것이다.

3) 전국연합학력평가의 성적은 구간척도(Stanine)에 따라 1등급부터 9등급으로 구분되며 작은 값의 등급일수록 상위권 학생에 해당한다.

[표 2] 면담에서 제시된 주요 과제
[Table 2] Key tasks presented in the interview

과제	내용
[과제1]	$\frac{1}{10}$이 답이 될 수 있는 문제 상황을 만들어보시오.
[과제2]	A, B, C 세 명이 한 팀일 때, A의 적중률이 0.7, B의 적중률이 0.5, C의 적중률이 0.3이라고 하자. 이때 팀 적중률을 구하여라.

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구는 3차시의 면담 자료를 집중적으로 분석한 것으로서, 비디오카메라 1대로 연구대상 학생 세 명에 대한 수학적 활동을 촬영하였으며, 이 외에도 별도로 녹음된 오디오자료의 전사과정을 통하여 분석에 활용하였다.

또한 면담 과정에서 학생들이 작성한 활동지와 연구자들이 작성한 현장노트 및 다음 면담 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지를 수합하여 면담 과정 중 일어나는 교수학적 결정 과정과 변화의 양상을 살펴보고, 이러한 자료들을 기초로 면담 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 ‘Ⅳ. 결과분석 및 논의’ 부분에 함께 기술하였다.

Ⅳ. 결과분석 및 논의

1. 학생들의 ‘$\frac{1}{10}$이 답이 되는 문제 상황’에 대한 구성

연구자는 선행연구들에 근거하여 학생들의 평균 개념이 산술평균이라고 가정하면, 학생들은 평균을 구하기 위하여 자료의 값을 모두 더한 다음 자료의 개수로 나누어주는 방식을 취할 것으로 예상하였다. 그럴 경우 자연스럽게 평균은 분수 형태로 제시될 수 있으므로, 연구자는 [과제1]과 같이 분수 형태의 답이 나올 수 있는 문제 상황을 만들어보라는 과제를 제시하였다.

[과제1]은 선행 연구(이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍, 2016)에서 학생들의 비 개념과 비율 개념에 대한 인식을 드러낼 때 사용한 과제였다. 교사는 [과제1]을 제시할 때, “$\frac{1}{10}$이라는 값이 어떨 때는 농도로 표현되기도 하고, 어떨 때는 확률과 평균으로 표현하기도 하죠. 어떤 경우는 밀도도 이렇게 표현할 수도 있고.”와 같이 예를 함께 제시하였는데, 이는 비로 표현된 양의 속성을 학생들이 다양한 관점에서 고려될 수 있을 것이라 생각하였기 때문이다. 농도와 밀도는 양적 속성으로 볼 때 서로 속성이 다른 두 외연량의 비로 표현된 내포량으로 볼 수 있다.[4] 확률의 경우는 분모와 분자가 같은 속성의 외연량이므로 속성이 다른 두 외연량의 비로 표현된 내포량으로 볼 수는 없으나, 확률에서 분모의 경우의 수를 헤아리는 방식과 분자의 경우의 수를 헤아리는 방식이 다르기 때문에 일반적인 외연량과도 미묘한 차이가 있다. 평균 역시 확률에서의 양적 속성과 비슷한 맥락에서 이해할 수 있다.

[과제1]을 제시하여 학생들의 표현들을 확인한 이후 교사는 [과제1]을 변형하여 “평균이 $\frac{1}{10}$이 될 수 있는 문제 상황을 만들어보시오.”라고 제시하였다. ‘평균’에 대한 문제 상황 구성에서 학생A와 다른 두 학생 사이에 차이가 있었다. 학생A는 네 변의 길이의 합이 $\frac{2}{5}$인 사각형의 한 변 길이의 평균을 구하는 문제를 구성하였다. 이는 길이라는 한 종류의 외연량에 대한 평균을 구하는 문제로 볼 수 있으며, 네 변의 길이를 직접 준 것은 아니지만 미지의 네 값을 더하면 $\frac{2}{5}$가 나오고 이를 4로 나누어주면 평균이 $\frac{1}{10}$이 되는 문제 상황이다. 반면 학생B와 학생C는 확률을 값으로 평균을 구해야할 값들을 제시하였다. 학생B와 학생C가 제시한 문제 상황에서는 주어진 확률 값들을 모두 더한 다음 확률 값들의 총 개

---

4) $\frac{1}{10}$은 분모와 분자의 비로 이루어져있기 때문에 이러한 값에 대한 학생들의 인식은 양적 속성을 어떻게 인식하느냐에 따라 외연량과 내포량의 관점에서 이해하는 것이 가능하다. 정은실(2010)은 내포량에 해당하는 양은 속성이 다른 두 외연량의 비에 해당하는 값으로 설명하였다. 이에 따르면, ‘거리가 $\frac{1}{10}km$이다.’라고 표현했을 때는 $\frac{1}{10}$이라는 양을 외연량으로 본 것이고, ‘시간에 따른 이동 거리가 $\frac{1}{10}km$이다.’라고 표현한 것은 속력을 뜻하며 $\frac{1}{10}$이라는 양을 내포량으로 본 것이 된다.

수로 나누어주어서 평균을 구하는 방식이다. 학생A가 구성한 방식과 비교해보면,

1) 학생A는 네 변의 길이 각각을 제시하지 않았지만, 학생B와 학생C는 '더해야할 값'들을 직접적인 값으로 제시하였다는 점

2) 학생A는 더해야하는 값으로 제시한 양이 '네 변의 길이'라는 동일한 속성의 외연량이었다면, 학생B와 학생C는 외연량과는 양적 속성이 구분되는 확률을 값으로 제시하였다는 점

에서 구분된다. 세 학생이 구성한 문제 상황은 다음 [표 3]과 같다.

[표 3] 학생들이 구성한 평균이 $\frac{1}{10}$인 문제 상황

[Table 3] Problem situations in which the student's average is 1/10

학생	학생들이 구성한 문제
학생A	네 변의 길이의 합이 $\frac{2}{5}$인 사각형의 한 변 길이의 평균
학생B	세 사람이 제비뽑기에서 당첨될 확률이 각각 $\frac{9}{100}, \frac{11}{100}, \frac{10}{100}$일 때 당첨될 확률의 평균
학생C	두 사람이 화살을 쏴서 과녁을 맞출 때, 첫 번째 사람이 20발 중 1발을 못 맞추고 두 번째 사람도 20발 중 1발을 못 맞추었을 때 못 맞출 확률

학생들이 자신들이 구성한 문제에 대하여 설명을 할 때, 교사는 학생C에게 '평균을 구하는 것인데 문제 말미에 확률이라고 되어있는 부분'에 대하여 물어보았다. 이에 학생C는 "두 사람이 각각 20발 씩 쐈을 때 못 맞출 확률들의 평균"이라는 표현으로 수정하여 제시하였다. 학생C가 사용한 '확률들의 평균'이라는 용어는 학생B가 구성한 문제 상황에서도 동일하게 적용되며 학생B도 학생C가 사용한 '확률들의 평균'이라는 용어로 자신이 구성한 문제 상황을 표현하는 것에 동의하였다.

교사는 학생C에게 "20발 씩 쐈을 때 과녁을 적중하지 못할 확률들의 평균?"이라는 질문을 통하여 그 의미에 대하여 설명을 요구하였고, 학생C는 "합의 평균이요."라고 답을 하였다. 이에 대하여 교사는 다시 학생에게 '합의 평균'이 무엇을 뜻하는지 확인하였다. 교사가 다시 질문을 한 것은 학생C가 실제 자신이 구성한 문제에 대하여 어떻게 평균을 구하는지 확인하기 위해서였다. 교사는 처음 학생C가 구성한 문제를 보았을 때, 과녁을 못 맞출 확률 $\frac{1}{20}$과 $\frac{1}{20}$이므로 이 두 값을 더해서 확률의 총 개수 2로 나누어주는 방식으로 $\frac{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}}{2}=\frac{1}{10}$과 같이 구한 것으로 생각하였다. 그러나 학생C가 "합의 평균"이라고 하였을 때, 합이 무엇의 합을 뜻하는 것인지가 명확하지 않다는 생각을 하였다. 교사의 질문에 대하여 학생C는 "두 사람이 각각 20발씩 총 40발을 쏘았고 이 때 각각 1발씩 총 2발을 맞추었기 때문에 합의 평균이라는 표현을 사용했다."고 하였다. 이를 식으로 표현하면 $\frac{1+1}{20+20}$이 된다. 교사는 그렇게 할 경우 결과가 $\frac{1+1}{20+20}=\frac{1}{20}$이 되어 $\frac{1}{10}$이 나오지 않는다는 점을 지적하자, 학생C는 자신이 계산을 잘못 맞추었다고 하면서 문제를 10발 중 1발로 수정하였다. 이후 학생C는 수정한 문제에 대하여 $\frac{1+1}{10+10}=\frac{1}{10}$이라고 적어서 자신만의 문제 풀이를 적고 나서 고민하는 모습을 보였다.

2. 학생들의 '확률들의 평균'이라는 용어에 대한 인식과 표현[5)]

교사는 학생B와 학생C가 $\frac{1}{10}$을 답으로 가지는 문제를 구성한 것에 대하여 두 학생 모두 자신들이 구성한 문제를 '확률들의 평균'이라는 용어로 표현하였지만 실제 문제를 해결하는 방식에서는 차이가 있음을 확인하였다. 그래서 교사는 두 학생에게 '학생C의 문제'에 대하여 두

5) 본 연구를 진행하는 과정에서 학생들이 확률들의 평균을 구하는 과제에 대하여 수학적인 맥락에서 심슨의 역설(Simpson's Paradox)과 같이 다른 수학적인 개념들과 연결하기에는 적절하지만 평균 개념을 확인하는 과제로 적절한지에 대한 문제가 제기되었다. 그러나 본 연구에서는 '확률들의 평균'이라는 용어가 면담 과정에서 학생들이 구성한 결과라는 점에 초점을 맞추었다. 즉, 연구자는 수학적 맥락을 고려하여 학생들의 표현에 대하여 오류 유무를 판단하기 보다는 학생들의 표현을 받아들여서 다음 면담을 진행하는 것이 학생들의 평균 개념에 대한 인식과 의미를 파악하는데 도움이 될 것이라 판단하였다.

가지 풀이 방식으로 해결한다고 하였을 때 두 가지 방식의 차이를 물어보았다. 교사의 질문에 대하여 학생B는 "두 방법이 같은 것 같은데요."라고 답을 하였다. 그러나 교사가 학생B의 방식은 $\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}{2}$이고 학생C의 방식은 $\frac{1+1}{10+10}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$으로 표현을 구분해주자 두 방식에 차이가 있다는 것을 이해하였다는 표현을 하였다. [대화1]은 학생C의 문제에서 두 학생의 풀이 방식에 대한 교사와 학생들의 대화이다.

[대화1] 학생C의 문제에서 두 학생의 풀이 방식에 대한 교사와 학생들의 대화

교사 : 우선 학생B의 계산하고 학생C의 계산 방식이 달라... 학생C하고 학생B가 왜 다르냐면, 학생B 방식으로 학생C 것을 하면 $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$을 한 다음에 2로 나누어 주어야하죠?

학생B : 같은 거 같은데요.

교사 : 아... 두 방법은 같은 건가? 아니야... 학생C는 $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$을 한 다음에 2로 나눈 것이 아니야. 학생C는 그냥 $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$을 $\frac{1+1}{10+10}$ 해서 $\frac{1}{10}$이 나온 거야. 학생B의 방법과 같은 것은 아니야.

학생B : 네...네.

그런데 [대화1] 이후 학생B는 "분수끼리 계산을 그렇게(학생C가 $\frac{1+1}{10+10}=\frac{1}{10}$와 같이 적은 표현) 하면 안되잖아요?"라고 질문을 하였다. 이에 교사가 "학생C도 분수끼리 계산을 그렇게 한 건 아니야. 과제 상황에 대한 의미를 고려해서 총 20발 중 2발이라는 표현을 그렇게 한 거지."라고 이야기해주자 학생B는 그 때야 비로소 이해하였다는 반응을 보였다.

교사가 학생B와 대화를 하는 동안 학생C는 자신의 방식과 학생B의 풀이를 보면서 고민을 하다가 교사에게 "문제를 $\frac{1}{20}$하고 $\frac{4}{20}$으로 바꾸면 안돼요."라고 말하였다. 학생C는 $\frac{1}{10}$과 $\frac{1}{10}$인 상황에서는 $\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}{2}$과 $\frac{1+1}{10+10}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$의 두 방식이 의미는 달라도 값은 같게 나왔지만, $\frac{1}{20}$하고 $\frac{4}{20}$인 상황에서는 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$가 되어 $\frac{\frac{1}{20}+\frac{4}{20}}{2}=\frac{1}{8}$과 $\frac{1+1}{20+5}=\frac{2}{25}\left(\neq\frac{1}{8}\right)$로 두 값이 서로 다르게 나오는 것을 지적한 것이라고 설명하였다.

교사는 학생C가 자신의 방식과 학생B의 방식이 의미만 다른 것이 아니라 값도 다르게 나올 수 있다는 것을 지적한 이후, 학생B와 학생C에게 어떤 방식을 자신의 방식으로 할 것인지를 물어보았다. 이에 대하여 학생B는 자신의 방식을 고수하였고, 학생C는 자신의 방식대로 하고 싶기는 하지만 식을 표현하는 것에 있어서 학생B의 지적과 같이 분수 덧셈에서 허용되지 않는 방식으로 계산을 하게 되는 것이 부담스럽다는 이야기를 하였다.

학생A는 두 학생의 대화를 다 듣고 나서 학생B와 학생C가 사용하는 '확률들의 평균'이라는 용어에 대하여 해당 용어가 의미를 갖지 못한다는 점을 지적하면서 용어 사용의 문제점을 제기하였다. 학생A의 '확률들의 평균'이라는 용어 사용의 문제제기에 대하여 학생B는 처음에는 '확률들의 평균'이라는 용어를 사용할 수 있다고 주장하였으나 뚜렷한 근거를 제시하지 못하였다. 오히려 대화 말미에서 학생B는 학생A의 지적과 같이 '확률들의 평균'이라는 용어에서 의미를 찾을 수 없다고 하면서 자신의 최초 의견을 수정하는 모습을 보여주었다. 학생C는 교사와 다른 학생들의 대화를 듣고 나서, 학생B의 방식과 자신의 방식에 대하여 굳이 이름을 붙인다면 둘 다 '확률들의 평균'을 구하는 것이 맞는 것 같다고 하였다. 단지 학생B의 방식이 자신의 방식보다 구하는데 '좀 더 복잡'하다고 하였다. 학생C가 학생B의 방식을 '더 복잡하다.'고 표현한 것에 대하여는 자신(학생C)의 방식이 의미가 있으며 어떤 경우에는 학생B의 방식보다 더 적절할 수 있다고 생각하기 때문이라고 설명하였다. [대화2]는 '확률들의 평균'에 대한 교사와 학생들의 대화이다.

[대화2] '확률들의 평균'에 대한 교사와 학생들의 대화

학생A : 확률들의 평균을 구할 수 있어요? 좀 그런데

요...

교사 : 확률을 평균 낸다는 것이 좀 그렇다고? 왜? 본인들(학생B, 학생C)이 만들어낸 말인데...

학생B : 괜찮지 않아요? 어차피 같은 상황이니까... 상황이 같은 상황에 대한 확률이고 그런 같은 상황에서는 할 수 있는 거 아니에요?

학생A : 그런데 그런 확률의 평균이라는 것이 의미하는 바가 없잖아?

교사 : 학생C는 어떻게 생각해?

학생C : (학생B 방식이) 더 복잡한 것 같아요. 확률들의 평균을 내는 것이 좀 복잡하게 표현한 것 같아요.

교사 : 본인의 것도 확률들의 평균이라고 보는 거야? 아니면 본인 것은 확률들의 평균이 아니고 학생B 것만을 확률의 평균이라고 보는 거야?

학생C : 네... 둘 다 확률들의 평균이에요.

교사 : 그 방식(학생B의 방식)도 확률들의 평균이다...? 이것(학생C의 방식)도 저것(학생B의 방식)도 확률의 평균인데, 저게(학생B의 방식) 좀 더 복잡하다는 거야?

학생C : 그러니까 둘 다 확률의 평균인데 저게(학생B의 방식) 좀 더 복잡하게 표현된 것 같아요.

교사 : '확률들의 평균'이라는 것이 뭐에요?

학생B : 학생A 말대로 '확률들의 평균'은 의미하는 것이 없는 것 같아요. 학생A 말대로 써먹을 곳이 없는 것 같아요.

학생C : 복잡하다는 것이... 오히려 제가 한 거는 의미가 있을 것 같아요. 학생B 것은 상황이 달라지면 쓸 수 없을 수도 있을 것 같은데 제거는 다 쓸 수 있을 것 같아요.

또한 학생C는 교사와의 대화를 통하여 자신의 방식에 대한 의미를 '확률들의 평균' 대신 '팀 적중률'이라는 표현으로 바꾸었다. 교사와 학생C의 대화를 통하여 '팀 적중률'이라는 표현을 듣고 나서 학생B는 '확률들의 평균'이 의미가 없다고 하였던 자신의 생각을 바꾸어서 자신(학생B)이 생각하기에도 '확률들의 평균'을 구하는 방식이 '팀 적중률'의 의미를 갖는다고 표현하였다.

3. 학생들의 '팀 적중률'이라는 용어에 대한 인식과 표현

교사는 학생들과의 대화를 통하여 학생B와 학생C의 '확률의 평균'이라는 용어의 의미에 대하여 '팀 적중률'이라는 표현을 이용하여 의미를 부여하는 과정을 확인하였다. 이에 교사는 [과제2]를 제시하여 학생들과의 대화에서 표현된 '팀 적중률'에 대한 학생들의 인식과 표현에 대하여 더 자세히 살펴보고자 하였다. [과제2]는 학생C가 '확률들의 평균'에서 '팀 적중률'이라는 표현을 사용하는 과정에서 $\frac{4}{20}$를 $\frac{1}{5}$로 보았던 점을 고려하여, 교사가 학생들에게 제시한 것이었다. 이에 따라 [과제2]에서는 '확률'이라는 표현 대신 '적중률'이라는 표현을 사용하였으며, 제시된 적중률의 값들 중 약분이 가능한 '0.5'라는 값이 포함되어있다. 0.5는 학생들 입장에서 $\frac{5}{10}$으로 생각할 수 있지만 약분하면 $\frac{1}{2}$으로 볼 수도 있기 때문이다.

이에 학생B는 세 사람의 적중률을 모두 더하여 사람의 총 수인 3으로 나누어 주는 $\frac{0.7+0.5+0.3}{3}$의 방식으로 팀 적중률을 구하면 된다고 하였다. 학생B의 말을 듣고 나서 학생A는 학생B의 방식에 문제가 있다고 지적하였다. 학생A는 예를 들어 A라는 선수의 적중률 0.7은 100발 중에 70발이라 하고, B라는 선수의 적중률 0.5에 대하여는 2발 중 1발, C라는 선수의 적중률 0.3은 10발 중 3발이라고 하면 이때 평균은 학생B의 방식이 아니라 학생C의 방식으로 구해야 평균이 된다고 설명하였다. 이에 학생B는 동일한 상황으로 보아야한다고 하였으며, 학생B가 표현한 '동일한 상황'이라는 것은 세 선수가 동일한 수로 발사하였을 때를 의미한 것으로 볼 수 있다. 이에 교사와 학생들은 발사한 수를 10발로 고정하여서 계산하였을 때로 제한하였을 때는 두 방식(학생B의 방식과 학생C의 방식)의 결과가 동일하게 나오지만, 발사한 수를 다르게 하였을 때는 결과가 다를 수도 있으며, 이러한 결과에 따라 두 방식은 '결과적으로 다르다.'는 것으로 정리하였다. [대화3]은 '팀 적중률'에 대한 교사와 학생들의 대화이다.

[대화3] ‘팀 적중률’에 대한 교사와 학생들의 대화

학생A : 아니죠. 만약 100발 중에 70발 일 수 있고, 2발 중에 1발, 10발 중에 3발이라고 할 수도 있는데, 그걸 평균내면 분모끼리 다 더한 것 분에 분자끼리 다 더한 거 아니에요?

학생B : 같은 상황이니까 분모가 다 같다고 봐야하는 거 아니에요?

교사 : 만약 쏘는 발 수는 다 같다면?

학생B : 분모가 맞춰지니까...

학생A, 학생C : ...

교사 : 10발로 맞춰서 조정합시다. 그러면 두 방식대로 계산을 각각해보면 $\frac{7+5+3}{10+10+10}$이니까 $\frac{1}{2}$이고, $\frac{7}{10}+\frac{5}{10}+\frac{3}{10}$을 해서 3으로 나누면 $\frac{1}{2}$로 결과가 같죠?

학생들 : 네

교사 : 그런데 개념적으로는 다르죠. 결과는 같아도. 학생C는 학생A 쪽으로 한 거죠? 그죠?

학생A, 학생C : 네

교사는 학생들과의 대화에서 학생들의 의견이 갈리게 된 원인에 대하여 고민한 결과 학생들이 적중률 0.5에 대한 의미에 대하여 $\frac{50}{100}$으로 볼 수도 있고 $\frac{1}{2}$로 볼 수도 있다는 것을 지적한 이후부터라고 생각하였다. 100발 중 50발을 맞춘 상황을 적중률 0.5로 표현하는 것은 비의 개념으로 표현한 것이다. 그러나 100발 중 50발 혹은 2발 중 1발의 적중률이 모두 0.5로 동일하다고 인식하는 것은 비율 개념으로 표현한 것으로 볼 수 있다. 이러한 고민을 통하여 교사는 [과제2]에 대한 학생들의 반응을 통하여, 확률 $\frac{50}{100}$을 약분을 할 수 있느냐 없느냐에 대한 학생들의 반응을 확인할 필요가 있다고 생각하였다.

그래서 교사는 학생들에게 [과제2]의 상황에서 이전과 다르게 선수 세 사람의 발사한 수를 다르게 하여 ‘팀 적중률’을 물어보았다. 즉, A 선수는 1000발을 발사하고, B 선수는 100발을 발사하고, C 선수는 10발을 발사하였을 때 팀 적중률이 계산 되는지 물어보았다.

이에 학생B는 “계산 결과는 나오죠. 근데 의미가 안 맞는 거죠. 1000발 중에서 700발, 100발 중에서 50발, 10발 중에서 3발로 하면 다른 아이들 방식으로 하면 $\frac{753}{1110}$ 이 되는데, 제 방식대로 하면 $\frac{1}{2}$이 되죠.”라고 답을 하였다. 이렇게 답을 하고 나서 학생B는 바로 이어서 “근데 제 방법이 더 불 확실한 것 같아요. 1000발로 맞추어주는 가정이 들어가니까. 100발 중 50발을 1000발 중 500발이라는 것으로 되겠다고 추정해서 하는 거니까 좀 더 불확실할 것 같아요.”라고 말하였다.

학생B의 말을 다 듣고 나서 교사는 학생B에게 ‘확률들의 평균’이라는 문제 상황 속에서는 산술평균을 구하는 방법과 같이 각각의 확률들을 모두 더해서 더한 확률들의 총 개수로 나누어주는 방식으로 구하면 안 되는 것인지를 확인하였다. 학생B는 교사의 물음에 대하여 “상황이 다 같으면 가능한데 아니라면 저 방법(학생C의 방법)으로 해야 할 것 같아요.”라는 답을 하면서 자신의 방법과 같이 확률을 약분하면 안 된다고 표현하였다.

이어서 교사는 학생들에게 학생C의 방식으로 구한 방법의 의미가 ‘평균’이 맞는 지에 대하여 물어보았다. 학생C의 방식은 학생B가 주장하였던 산술평균의 방식과는 차이가 있었기 때문에, 교사는 이 질문을 통하여 학생들의 평균 개념에 대한 표현의 차이를 살펴볼 수 있을 것이라 생각하였다. 교사의 물음에 대하여 학생B는 “평균은 더한 걸 나누어야 평균 아니에요?”라고 답하면서 학생C의 방식은 평균을 구한 것이 아니라 또 다른 확률이라고 표현하였다. 학생B의 지적에 대하여 다른 두 학생(학생A와 학생C)도 동의하였으며, 학생들은 학생C의 방식으로 얻어진 값을 ‘팀 확률’이라는 용어로 표현하였다.

또한 학생들은 ‘팀 확률’이라는 용어를 사용하는 문제 상황에서는 확률 값을 약분하면 안 된다는 것도 언급하였는데, 특히 학생B는 “2발 중 1발과 4발 중 2발은 상황이 다른 거 아니에요?”라고 하면서 확률 $\frac{2}{4}$를 약분해서 $\frac{1}{2}$로 보면 팀 확률을 구할 수 없다고 주장하였다.

이러한 대화를 통하여 교사는 학생들에게 “그러면 너희들이 사용했던 ‘확률들의 평균’은 평균이 아닌 거야?” 라고 물어보면서 동시에 “평균의 정의는 뭐야?”라고 물어보았다. 교사의 물음에 대하여 학생들은 ‘확률들의 평균’은 평균은 아닌 것에는 모두 같은 의견임을 밝혔으나,

평균의 정의에 대하여는 학생A와 다른 두 학생 사이에 차이가 발견되었다. 학생B와 학생C는 “더해서 나누어 주는 것”이라고 하였고, 학생A는 다른 두 학생의 표현을 듣고 나서 “평균의 정의가 무언지는 잘 모르겠지만, 학생B가 말한 것이 평균의 정의는 아닌 것 같아요.”라고 답하였다.

4. 학생들의 ‘평균’ 개념에 대한 표현

교사가 평균의 값이 $\frac{1}{10}$이 나오는 문제를 만들어 보라는 [과제1]을 제시한 이후 학생들은 ‘확률들의 평균’이라는 용어의 사용에서 시작하여, ‘팀 적중률’을 거쳐 ‘팀 확률’이라는 표현으로 용어 사용의 변화를 보여주었다. 교사는 학생들은 자신들이 [과제1]의 상황을 설명하기 위하여 스스로 구성하여 사용하였던 ‘확률들의 평균’이라는 용어에서 ‘팀 적중률’ 혹은 ‘팀 확률’이라는 용어로 표현의 변화가 이루어진 것에 주목하였다. 특히 이러한 변화 속에서 학생들이 ‘평균’이라는 용어를 사용하지 않았다는 것에 주목하였다. 교사는 이러한 일련의 흐름 이후에 ‘그렇다면 학생들의 평균에 대한 인식은 어떠한가?’를 살펴보기로 하였다. 이러한 문제의식에 따라 교사는 학생들에게 직접적으로 학생들이 생각하는 ‘평균’ 개념에 대하여 물어보았고, 학생C는 ‘더해서 나누어주는 것’이라고 표현을 하였으며 학생B도 학생C의 의견에 동의하였다. 그러나 학생A는 다른 두 학생이 “더해서 나누어 주는 것”이라고 표현한 평균 개념에 대하여 그것이 평균의 정의는 아닌 것 같다고 답하였다. 교사가 그 이유에 대하여 물어보자, 학생A는 “평균 종류가 한 가지가 아닌 것 같아서요. 기하평균 같은 거요.”라고 답하였다. 교사가 기하평균이 무엇인지 확인하는 질문을 하자, 학생A는 기하평균에 대하여, 가로의 길이가 a이고 세로의 길이가 b인 직사각형의 넓이 ab와 동일한 넓이를 가지는 정사각형의 한 변의 길이로 답을 하였다. 학생A가 기하평균이 무엇인지 말하고 난 다음 교사는 왜 기하평균이 평균으로 불리는지에 대하여 물어보았는데, 학생A는 교사의 질문에 대하여 “같은 넓이를 갖는 모든 사각형들의 대표가 되니까...”라고 답을 하였다.

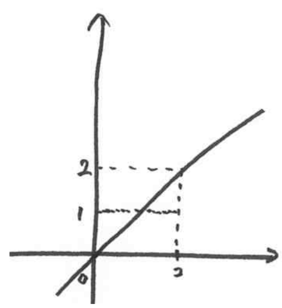
교사는 학생A의 표현 중에서 ‘대표’라는 용어를 사용한 것에 대하여 주목하였다. 교사가 학생A의 ‘대표’라는 표현에 주목한 이유는 이전까지는 학생들이 ‘평균’에 대하여 ‘더해서 나누어준 값’으로 산술평균의 절차적인 지식으로 인식하고 표현하였다면, 학생A의 ‘대표’라는 표현에서는 그러한 절차적 지식의 산술평균 개념과 구분되는 ‘평균’의 속성 혹은 의미를 고민하기 시작한 것으로 보였기 때문이었다. 교사는 학생A에게 ‘대표’의 의미가 무엇인지 물어보았고, 학생A는 그 의미까지는 고민하지 않고 사용한 말이라고 하였으나 교사와 학생A의 대화 중간에 학생B는 “같게 만드는 것 아니에요?”라고 의견을 표현하였다. 이어서 학생B는 “만약에 7, 8, 9 이거 평균이 8이잖아요. 이게 다 같게 만든 거잖아요. 더한 값을 같게 한 상황에서 하나하나를 같게 하는 거요.”라고 말하였다.

교사는 학생B의 표현에서 이전에 보여주었던 ‘평균’ 개념에서 변화된 표현임을 확인할 수 있었다. 이전에는 학생B가 ‘더해서 나누어준 값’으로 표현하였다면 이번 표현에서는 ‘같게 만드는 것’이라는 것으로 변화하였으며, 학생B가 제시한 예를 통하여 그 의미를 더 자세히 이해하는 것이 가능하였다. 학생B는 7, 8, 9의 세 개 숫자에 대하여 평균이 8이라는 것의 의미에 대하여 평균을 8로 보면 세 개의 숫자 하나하나를 같게 만들어 준 결과가 된다는 것을 언급하면서 평균값 8을 세 개의 숫자 7, 8, 9를 대표하는 값으로 설명하였다.

학생B의 설명을 듣고 나서 교사는 “그러면 기하평균에 대해서는 어떻게 설명할 수 있어?”라고 물어보았고, 교사의 물음에 대하여 학생B는 “넓이가 다 같은 거에 대해서 이거 변들을 다 같게 한 거 아니에요?”라고 답을 하였다. 기하평균에 대한 학생B의 설명에서 주목할 것은 학생B가 ‘같게 만들어 주는 것’에서 ‘같다.’는 것의 의미가 ‘합이 같다.’는 것을 의미하는 것이 아니라는 점이다. 이전에 학생B가 7, 8, 9를 가지고 예를 들었을 때 ‘같다.’의 의미는 7, 8, 9의 합과 이들 세 수의 평균값을 세 번 더해준 값이 서로 같다($7+8+9=8+8+8$)는 것을 표현한 것으로 볼 수 있지만, 기하평균에서는 ‘더해준 값’이 같은 것이 아니라 두 수의 곱이 같은 것을 언급한 것으로 볼 수 있다. 즉, 학생B의 ‘같게 만드는 것’이라는 의미에서는 산술평균의 절차적인 지식(더해서 나누어주는 것)에서 벗어나 여러 값들의 균형점을 인식한 것으로 볼 수 있다.

이후 3차시 면담에서 학생B는 ‘평균’ 개념에서 ‘같게

만드는 것'의 예로 속력함수 $y=x$에서 0초에서 2초까지의 평균속력에도 적용을 하였는데, 여기서 학생B가 언급한 상황은 평균속력을 총 이동거리를 총 시간으로 나누어주는 것으로 보고, 속력함수 $y=x$의 구간 $[0,2]$에서의 그래프 아래 넓이에 해당하는 값과 동일한 넓이를 가지면서 밑변의 길이는 구간 $[0,2]$의 길이로 가지는 직사각형의 높이로 보는 것이다. 학생B는 순간순간 변하는 속력들에 대하여 그 속력들을 다 같게 만들어 주는 작업의 결과가 평균속력 값이라고 하였다. 이는 학생B가 속력함수의 그래프 아래의 넓이가 거리라는 것을 아는 것을 고려하면, 평균속력을 '변하는 속력들에 의하여 결정되는 거리라는 양과 같은 값을 가지면서 그러한 상황에서 순간순간의 속력들을 다 같게 만들어준 결과'로 설명한 것으로 보인다. 이렇게 설명을 하면 학생B가 속력함수의 $y=x$의 그래프에서 평균속력의 그래프를 x축과 평행한 직선 $y=1$로 그린 것에 대하여도 이해가 가능하다. 특히 학생B는 이 그림에서 $y=1$에 해당하는 직선을 여러 개의 점을 반복해서 찍었는데, 이는 속력함수 $y=x$에서 순간순간 변하는 속력의 값들을 모두 1로 같은 값을 가지는 것으로 표현하려한 것임을 알 수 있다. [그림 2]는 학생B가 속력함수 $y=x$에서 평균속력을 나타낸 그래프이다. 학생A와 학생C도 학생B의 견해에 동의하는 모습을 보여주었으며, 학생A는 평균속력에 대하여 "속력 1로 계속 가는 거"라는 표현을 하였는데, 이 역시 평균속력에서의 평균 개념에 대하여 "다 더해서 나누어준 값"의 의미 보다는 '이동한 총 거리=평균에 해당하는 속력×이동시간'으로 인식하고 있음을 보여준다.



[그림 2] 학생B의 속력함수 $y=x$에서 평균속력을 나타낸 그래프

[Fig. 2] Graph showing average speed in Student B's speed function

한편 학생C는 학생A와 학생B의 대화를 열심히 듣는 모습을 보여주었는데, 학생B의 '같게 만들어주는 것'이라는 표현을 듣고 나서 처음에는 이해가 가지 않는 표정으로 "잘 모르겠다. 그렇게 생각하면 안될 것 같다."라고 말하며 고민하는 모습을 보여주었다. 그러나 학생B가 기하평균의 상황과 속력함수에서 평균속력에 대한 상황을 '같게 만들어 주는 것'이라는 표현으로 설명하는 과정을 들으면서 학생B의 의견에 동의한다고 답하였다. 즉, 학생C도 학생B와 마찬가지로 처음에 '더해서 나누어주는 것'으로 표현하였던 '평균' 개념에 대하여 '같게 만들어 주는 것'에 공감하는 것으로 보였다.

V. 결론 및 제언

1. '비(rate)로 표현된 값들을 더해서 나누어주는 절차'에 대한 학생들의 표현의 변화

평균이 $\frac{1}{10}$인 문제 상황을 구성하는 [과제1]에서, '$\frac{1}{10}$'에 대한 학생들의 인식은 다양할 수 있다. 양적인 속성으로 구분을 할 때는 '속도'와 같은 내포량과 '물(water)의 양'과 같은 외연량으로 구분할 수도 있다. 또한 비와 비율 개념의 구분으로 볼 때는 비의 개념으로 인식할 수도 있고, $\frac{1}{10}, \frac{2}{20}, \cdots, \frac{k}{10k}$를 모두 같은 값으로 보는 비율 개념으로 인식할 수도 있다. 그런데 본 연구에서 학생들은 활동 과정에서 $\frac{1}{10}$을 '확률들의 평균'으로 인식하는 모습을 보여주었다. 확률 값으로서의 $\frac{1}{10}$은 동일한 양적 속성을 가지는 외연량의 비로 볼 수도 있으나, 전사건에 대한 경우의 수를 구할 때와 기대하는 사건의 경우의 수를 구하는 방법상의 차이가 존재할 수 있기 때문에 이러한 점을 고려하면 확률로 인식한 $\frac{1}{10}$은 외연량이나 내포량의 구분을 명확하게 하는 것이 어렵다. 비와 비율 개념으로 보는 것에 있어서도 학생들이 '4번 중에 2번'과 '2번 중에 1번'을 어떻게 보느냐에 따라 달라질 수 있다. 학생들이 표현한 '확률들의 평균'은 학생들에게 있어 다양하게 인식될 수 있는 양들의 평균이라는 표현이고, 구성과정에서 자연스럽게 학생들의 합의

하에 사용된 표현이었기 때문에 본 연구에서는 수학적 오류 유무를 판단하지 않고, 학생들의 '확률들의 평균'이라는 표현에 대하여 자세하게 소개하였다.

학생들은 평균이 $\frac{1}{10}$인 상황을 농도, 밀도, 확률 등으로 다양하게 표현하기도 하였지만, 확률 값들의 평균이 $\frac{1}{10}$인 상황도 구성하여 제시하였다. 이는 분수로 표현된 $\frac{1}{10}$을 분모와 분자에 해당하는 양의 관계로 인식하지 않고 $\frac{1}{10}$을 하나의 값으로 인식한 것으로 볼 수 있다. 학생들이 $\frac{1}{10}$을 하나의 값으로 인식하는 모습은 Byerley, Hatfield와 Thompson(2012)이 평균속도를 비교하는 과제를 통하여 '양적 속성이 다른 두 양들의 비를 하나의 값으로 인식할 경우, 새롭게 값으로 인식한 양을 가지고 변화를 표현할 때 공변관점에서 변화를 인식하는 것에 어려움을 겪을 수도 있다.'는 것을 지적할 때도 제기되었던 현상이다. 그런데 값으로 인식한 확률들에 대한 평균을 구성하는 과정에서는 학생들의 차이가 발생하였다. 학생들은 '적중률이 $\frac{1}{10}$로 동일한 두 사람의 적중률의 평균'이라는 문제 상황을 구성하였는데, 이 상황에 대하여 학생B는 '확률 값들을 모두 더해서 확률 값들의 총 개수로 나누어 주는 방식'으로 평균을 구하였다면, 학생C는 '확률 값들에 대하여, 분자는 분자끼리 더하여 주고 분모는 분모끼리 더하여 준 다음 이들을 비로 표현하는 방식'으로 평균을 구하였다. 즉, 결과에 해당하는 값은 동일하게 나오지만 구성하는 방식에서는 학생B의 $\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}{2}$ 방식과 학생C의 $\frac{1+1}{10+10}$ 방식과 같이 분명한 차이가 관찰되었다. 서로의 방식에 대하여 논의를 하는 과정에서 학생C는 자신의 방식을 포기하지는 않았지만 혼란스러워하는 모습을 보인 반면, 학생B는 자신의 방식에 더 확신을 가지는 모습을 보여주었다. 이후 학생들은 자신들이 표현한 '확률들의 평균'에 대한 의미를 찾아가는 과정을 경험하였고, 이 과정에서 '확률들의 평균'을 '팀 적중률'이라는 표현으로 바꾸어 사용하였다. '팀 적중률'로 표현이 바뀐 다음에는 [과제2]에서와 같이 확률이 0.7, 0.5, 0.3인 상황을 1000발 중 700발, 100발 중 50발, 10발 중 3발이라는 문제 상황을 구성하여 '팀 적중률'을 고민하는 과제가 제시되었다. 이에 대하여 학생B와 학생C는 각자의 방식대로 각각 $\dfrac{\frac{7}{10}+\frac{5}{10}+\frac{3}{10}}{3}$ 방식과 $\frac{700+50+3}{1000+100+10}$ 방식으로 평균을 구하였다. 이는 방식에서도 차이가 있지만 구한 결과에서도 차이가 발생하는 장면으로 볼 수 있다. 이에 대한 논의과정에서 학생B는 '팀 적중률'을 표현하는 것으로는 자신의 방식보다 학생C의 방식이 적절한 것 같다고 하였다. 그러나 학생C의 방식으로 '팀 적중률'을 구하였을 때, 그 결과를 평균으로 보는 것은 아니라고 하였으며, 학생B가 생각하는 평균은 '더한 것들을 나누어 주는 것'이라고 하였다. 이에 학생C도 자신이 사용한 '팀 적중률'이라는 표현은 평균으로 볼 수 없으며, 또 다른 확률에 해당하는 개념이라고 하였다.

이상의 논의에서 학생들은 평균이 $\frac{1}{10}$인 문제 상황을 구성하는 과정에서 '확률들의 평균'이라는 표현을 최초 사용한 이후 '팀 적중률'이라는 표현상의 변화를 거쳐서 결과적으로 자신들이 구성한 결과가 평균이 아니라고 하는 일련의 흐름을 보여주었다. 또한 이러한 흐름 속에서 학생들은 확률들의 평균을 구한다는 것에 대한 의미를 고민하게 되었고, 자신들이 생각하는 평균 개념이 '더한 값을 나누어 주는 것'이라고 표현하게 되었다. 즉, 본 연구에서는 학생들이 평균을 구해야하는 대상의 양적 속성에 대한 고민 없이 '더해서 나누어주는 것'이라는 절차적 지식을 구성한 것에서 시작하여, 평균을 구해야하는 대상의 양적 속성에 대한 고민을 하게 되는 장면을 드러내었다는 점에서 의미가 있다.

2. 평균 개념 구성과정에서 산술평균, 기하평균, 평균 속력에서의 평균에 대한 학생들의 표현

Friel(1998)은 average의 학습 전략으로 '똑같이 나누기'와 '균형' 모형을 강조하였는데, 본 연구에서 [과제1]과 [과제2]를 통하여, 교사는 학생들의 평균에 대한 인식이 '더해서 나누어 주는 것'이라는 것을 확인할 수 있었다. 연구자는 이러한 학생들의 평균에 대한 인식이 Friel(1998)이 주장한 전략 중 '똑같이 나누기' 전략과 완

전하게 동일하다고 볼 수는 없지만 매우 유사한 전략으로 판단하였다. 이에 연구자는 이러한 학생들의 최초 전략에서 학생들의 평균에 대한 인식의 변화가 발생하는지 관찰하였다. 특히 학생B와 학생C가 [과제2]에 대하여 '팀 적중률'에 대한 의미에 대하여 논의를 하는 과정에 학생A가 '확률들의 평균'이라는 것이 무슨 의미가 있는지 질문하였던 것이 실험을 이어가는데 중요한 역할을 하였다. 교사는 학생B가 평균 개념을 '더해서 나누어주는 것'이라고 한 것에 동의하는지에 대하여 학생들에게 물어보았고, 교사의 물음에 대하여 학생C는 동의하였지만 학생A는 동의하지 않는다고 표현하였다. 그 이유에 대하여 기하평균의 경우 더해서 나누어주는 것이 아닌데 평균이라는 용어를 사용하기 때문이라고 답하였다.

이어서 학생A는 기하평균이 평균이라 불리는 이유에 대하여 자신의 견해를 표현하였는데, '같은 넓이를 가지는 사각형들의 대표'라는 표현을 사용하였다. 학생A의 표현은 학생B로 하여금 그동안 평균 개념을 '더해서 나누어주는 것'이라고 표현하는 것에 대하여 고민하게 한 계기가 된 것으로 보인다. 학생B는 학생A의 말을 듣고 서나서 한동안 고민한 다음 "다 같게 만드는 것 아니에요?"라는 표현을 통하여 이전에 자신이 표현하였던 '다 더해서 나누어주는 것'이라는 것과 다르게 표현하였다. 특히 $7, 8, 9$라는 세 값에 대한 평균을 8이라고 이야기하면서 이전에는 $\frac{7+8+9}{3}$의 값이 8이라고 답하고 끝났던 것과 달리, 이번에는 평균에 해당하는 8의 의미에 대하여 '다 같게 만든 거잖아요.'라고 표현하였다. 학생B의 '다 같게 만든 것'이라는 표현은 세 수 $7, 8, 9$에 대하여 세 값을 더한 값은 24가 되는데, 이와 같이 세 수를 더해서 24가 나오는 여러 경우들에 대하여, $8, 8, 8$이라는 경우가 이들 여러 경우를 대표한다고 이야기한 것으로 보인다. 또한 학생B의 표현은 이러한 $8, 8, 8$이라는 경우는 세 수를 모두 같게 만들어 준 것이라는 점을 강조한 것으로 볼 수 있다.

학생B는 이러한 방식으로 기하평균에 대하여도 두 수의 곱이 같은 여러 경우들 중에서 두 수를 같게 만들어 주는 것이 기하평균의 의미라고 설명하였으며, 속력함수 $y=x$의 그래프에서 0초에서 2초까지 변하는 속력들의 평균에 해당하는 값 역시 자신이 표현한 평균 개념('다 같게 만들어 주는 것')을 이용하여 설명하였다.

이는 학생B의 표현 자체로만 보았을 때, 평균 개념을 표현하는 방식이 '더해서 나누어주는 것'에서 '다 같게 만들어 주는 것'으로 변한 것으로 볼 수 있지만, 개념적으로는 '똑같이 나누기' 전략에서 '균형' 모형을 구성하는 과정으로 볼 수도 있다. 이는 Friel(1998)을 포함하여 다양한 학자들이 평균이 가지고 있는 여러 속성들을 경험하도록 해야 한다는 주장에 대하여, 학생을 대상으로 실제적인 사례를 제시하였다는 점에서 의미를 찾을 수 있다. 또한 면담 자료를 통하여 학생들이 산술평균 개념에서 기하평균과 평균속력과 같은 용어 속에 내재되어있는 평균 개념의 속성들을 어떻게 구성해나갈 수 있는지에 대하여 고민할 수 있는 계기를 제공하였다는 점에서 의미가 있다.

참 고 문 헌

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].

Ministry of Education (2015). *Mathematics courses*. Ministry of Education Notice #2015-74 [Separately 8].

김원경, 조민식, 방금성, 윤종국, 조정길, 이근주, 김기탁, 박수연, 박정숙, 박진호, 윤요섭, 정상일 (2014). 확률과 통계. 서울: 비상교육.

Kim, W.K., Joe, M.S., Bang, K.S., Youn, J.K., Joe, J.K., Lee, G.J., Kim, G.T., Park, S.Y., Park, J.S., Park, J.H., Youn, Y.S. & Jung, S.I. (2014). *Probability and Statistics*. Seoul: Vi Sang Edu.

박미미, 이동환, 이경화, 고은성 (2012). 유추에 의한 문제제기 활동을 통해 본 통계적 개념 이해, 수학교육학연구 22(1), 101-115.

Park, M.M., Lee, D.H., Lee, K.H. & Kho, E.S. (2012). Understanding of Statistical concepts Examined through Problem Posing by Analogy, *The Journal of Educational Research in Mathematics. 22*(1), 101-115.

박영희 (2001). 통계 영역에서 대푯값의 의미와 지도에 관한 고찰, 학교수학 3(2), 281-294.

Park, Y.H. (2001). A Study on the Meaning of Average Values and Its Teaching in Statistics Area, *School Mathematics. 3*(2), 281-294.

신옥순 (2005). 교육 연구를 위한 심층면접법의 의의와 활용, 교육논총 25(1), 121-139.

Shin, O.S. (2005). The significance and use of in-depth interviewing for educational research, *The Journal of Education. 25*(1), 121-140.

이동근 (2017). 고등학교 1학년 학생들의 시간, 속력, 거리의 관계에서 평균속력에 대한 인식과 평균속력 함수 구성에 대한 연구. 박사학위 논문, 한국교원대학교.

Lee, D. G. (2017). *A Study on 1st Year High School Students' Construction of Average Speed Concept and Average Speed Functions in Relation to Time, Speed, and Distance.* Unpublished doctoral dissertaion. Korea National University of Education.

이동근, 김숙희 (2017). 지수함수 형태의 거리함수에서 미분계수의 절차적 지식 구성과 표현의 변화에 대한 사례연구, 학교수학 19(4), 639-661.

Lee, D.G., & Kim, S.H. (2017). A Case Study on the Change of Procedural Knowledge Composition and Expression of Derivative Coefficient in Exponential Function Type Distance, *School Mathematics. 19*(4), 639-661.

이춘재, 전평국 (2006). 5, 6학년 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 개념 분석. 수학교육 45(3). 319-343.

Lee, C.J., Jeon, P.K. (2006). Series A : An Analysis of Informal Concepts of Average Found in Fifth and Sixth Graders, *School Mathematics. 45*(3), 319-343.

장혜원 (2002). 초등학교 수학에서의 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의, 학교수학 4(4), 633-642.

Jang, H.W. (2002). A Discussion on the Distinction between 'The Value of Ratio' and 'The Rate' in Elementary School Mathematics, *School Mathematics. 4*(4), 633-642.

정은실 (2010). 초등학교 수학교과서에서의 양의 계산에 대한 연구, 수학교육학연구 20(4), 445-458.

Jeong, E.S. (2010). A Study on Quantity Calculus in Elementary Mathematics Textbooks, *The journal of educational research in mathematics. 20*(4), 445-458.

주홍연, 김경미, 황우형 (2010). 산술 평균에 대한 예비교사들의 개념화 분석, 수학교육 49(2), 199-221.

Joo, H.Y., Kim, K.M., & Whang, W.H. (2010). Pre-service Teachers' Conceptualization of Arithmetic Mean, *School Mathematics. 49*(2), 199-221.

Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median, *Educational Studies in Mathematics. 62,* 149-168.

Ellis, R. & Gulick, D. (2000). *Calculus with Analytic Geometry.* (5th ed.). (수학교재편찬위원회 역), 서울: 청문각.

Fontana, A. & Frey, J. H. (2000). The interview: from structured questions to negotiated text. in N.K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research(2nd ed.)* (645-672), Thousand Oaks, CA: Sage.

Friel. S. N. (1998). Teaching statistics what's average?. In L. J. Morrow (Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998. Yearbook of National Council of Teachers of Mathematics*(208-217). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures,* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Groth, R. E. (2005). An investigation of statistical thinking in two different context: Detecting a signal in anoisy process and determining a typical value, *Journal of Mathematical Behavior 24.* 109-124.

Holstein, J. A. & Gubrium, J. F. (1995). *The active interview,* Thousand Oaks, CA: Sage.

Johnson, J. M. (2002). In-depth interviewing. in J. F. Gubrium & J. A. Holstein (Eds.), *Handbook of interview research (*103-119). Thousand Oaks, Sage.

Klein, M. (2016). 수학자가 아닌 사람들을 위한 수학. (노태복 역), 서울: 승산. (원저 1967년 출판)

Marnich, M. A. (2008). *A Knowledge Structure for the Arithmetic Mean: Relationships between Statistical Conceptualization and Mathematical Concepts.* Unpublished Doctoral dissertation, University of Pittsburgh.

Merriam, S. B. (1994). 질적 사례연구법. (허미화 역), 서울: 양서원. (원저 1988년 출판)

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). 'Children's concepts of average and representativeness', *Journal for Research in Mathematics Education* 26. 20 - 39.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1996). What do children understand about average?. *Teaching Children*

Mathematics, 2(6). 360-364.

Savage, S. L. (2014). 평균의 함정. (김규태 역), 서울: 경문사. (원저 2012년 출판)

Spradley, J. P. (1979). The ethnographic interview, New York: Holt, Rinehart & Winston.

Watson, J. M. & Morits, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning* 2(1-2, 11-50.

A study on expression of students in the process of constructing average concept as mathematical knowledge

Lee, Dong Gun
MunJung High School, Republic of Korea
E-mail : jakin7@hanmail.net

In school mathematics, the concept of an average is not a concept that is limited to a unit of statistics. In particular, high school students will learn about arithmetic mean and geometric mean in the process of learning absolute inequality. In calculus learning, the concept of average is involved when learning the concept of average speed. The arithmetic mean is the same as the procedure used when students mean the test scores. However, the procedure for obtaining the geometric mean differs from the procedure for the arithmetic mean. In addition, if the arithmetic mean and the geometric mean are the discrete quantity, then the mean rate of change or the average speed is different in that it considers continuous quantities. The average concept that students learn in school mathematics differs in the quantitative nature of procedures and objects. Nevertheless, it is not uncommon to find out how students construct various mathematical concepts into mathematical knowledge. This study focuses on this point and conducted the interviews of the students(three) in the second grade of high school. And the expression of students in the process of average concept formation in arithmetic mean, geometric mean, average speed.

This study can be meaningful because it suggests practical examples to students about the assertion that various scholars should experience various properties possessed by the average. It is also meaningful that students are able to think about how to construct the mean conceptual properties inherent in terms such as geometric mean and mean speed in arithmetic mean concept through interview data.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : Average, Mean, Arithmetic Mean, Average of Probabilities, Geometric Mean, Average Speed