East Asian Math. J.
Vol. 34 (2018), No. 4, pp. 403-427
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2018.028

삼차방정식의 기하적 해법에 대한 재조명과 시각화

The reinterpretation and visualization for geometric methods of solving the cubic equation

김 향 숙[1] · 김 양 · 박 시 은

ABSTRACT. The purpose of this paper is to reinterpret and visualize the medieval Arab's studies on the geometric methods of solving the cubic equation by utilizing Apollonius' symptom of the parabola.

In particular, we investigate the results of Kamāl al-Dīn ibn Yūnus, Alhazen, Umar al-Khayyām and Al-Tūsī by 4 steps(analysis, construction, proof and examination) which are called the complete solution in the constructions. This paper is available in the current middle school curriculum through dynamic geometry program(Geogebra).

Ⅰ. 연구의 필요성 및 목적

최근 교육현장에서는 학생들의 수학적 문제 해결력을 키우기 위해 흥미 • 관심을 끄는 소재나 실제 생활에서 일어나는 사건과 관련된 주제를 다루는 교재 개발, 수학적인 활동과 감성적 체험을 강조하는 수업전개 등 다양한 시도가 이루어지고 있다. 그 중에서도 특히 수학사 활용과 학생들의 체험활동을 도입한 다양한 형태의 수업 운영이 늘어나고 있는 추세이다. 수학사는 수학 내 지식의 연결과 관련된 Coxford([10])의 연결성 유형과 함께, 학교 수학에서 적용 가능한 수학적 지식 연결의 맥락을 제공한다고 볼 수 있다[6].

고대 그리스인들은 정오각형 작도에 이어 정다각형 작도에 힘을 쏟은 것으로

Received July 5, 2018; Revised August 14, 2018; Accepted August 28, 2018.
2010 Mathematics Subject Classification: 14A20, 35M10.
Key words: the cubic equation, geometric methods of solving, reinterpretation, visualization, conics, dynamic geometric program(Geogebra).
1) Corresponding author.

©2018 The Youngnam Mathematical Society
(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

보이며, 그 과정에서 입방 배적 문제와 각의 3등분 문제에 대한 증명([3, 7, 13])에서 삼차방정식이 활용되었다는 사실은 문헌 연구를 통하여 알 수 있으며 삼차방정식과 관련된 매우 중요한 수학사적 가치를 확인할 수 있다[17, 19].

16세기의 가장 극적인 수학적 성취는 아마도 중세 아랍 수학자들에 의한 삼차방정식의 대수적 해법의 발견일 것이다. 이 발견과 관련된 이야기로 1515년경에 Ferro[2]가 $x^3+mx+n=0$ 꼴인 삼차방정식을 대수적으로 해결하였다고 전해지지만, 그 해법은 전혀 알려져 있지 않다. 이는 비밀주의의 영향이 아닐까라고 추측된다[4].

현행 중학교 및 고등학교 수학과 교육과정에서는 대부분의 방정식 해법을 대수적으로 풀이하고 있으며, 원뿔곡선을 이용한 기하적인 방법으로 다루지는 않고 있다. 특히, 삼차방정식의 원뿔곡선을 이용한 해법은 찾아보기 어렵다. 현행 교육과정에서 다루는 원뿔곡선은 좌표가 설정된 평면 즉, 좌표평면을 먼저 생각하게 한다. 물론 활용도가 높은 원뿔곡선의 기본성질은 원뿔곡선의 표준형을 이용하여 간결하면서도 손쉽게 얻을 수 있다. 그러나 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 symptoms([2, 3, 12])를 이용하여 좌표를 도입하지 않고서도 원뿔곡선을 평면위에 구현할 수 있음을 이해하면 삼차방정식의 해법뿐만이 아니라 사차, 오차방정식의 문제해결에도 도움이 될 것으로 생각한다.

본 논문의 목적은 중세 아랍인들이 연구한 원뿔곡선을 이용한 삼차방정식의 해법들 중 Kamāl al-Dīn ibn Yūnus[3], Alhazen[4], Umar al-Khayyām[5], Al-Tūsī[6]의 내용을 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)을 이용하여 간결하면서도 다채로운 접근 방법으로 재조명하고 시각화하는 것이다. 특히, 삼차방정식의 해를 구하는 방법을 대수적이 아닌 기하적 방법으로, 너무나도 획기적인 표현 방법, 즉 '현대적인 음의 부호 표현이 없던 당시 선분의 길이'로 방정식의 해를 구하였던 것을 고찰할 것이다. 이는 오늘날 '기하학이 대수학 발전 모태의 기반 학문이 아닌가?' 하는 의구심을 자아 낼 정도이다. 본 논문에서는 서로 만나는 두 개의 원뿔곡선 중 쌍곡선과 포물선의 교점에 의해 만들어지는 선분을 이용한 중세 이슬람인들의 방법을 탐구하고, 이를 동적기하프로그램(Geogebra)을 활용하여 중등수학에서 다루고 있는 초등기하의 기본적인 성질과 용어만을 사용

2) 본명 : Ferro (1465? - 1526?), 이탈리아출신, 볼로냐(Bologna)대학교에서 산술과 기하학의 교수로 지냈음.
3) 본명 : Kamāl al-Dīn ibn Yūnus (? - 1242), 이슬람권의 수학자, 과학자.
4) 본명 : Hasan Ibn al-Haytham (965 - 1040), 이슬람권의 수학자, 천문학자.
5) 본명 : Umar al-Khayyām (1048 - 1131), 페르시아, 수학자, Omar Khayyam으로 불리기도 함, 저서 Algebra, On the division of the quarter circle.
6) 본명 : Sharaf al-Din al-Tūsī (1201 - 1274), 페르시아, 수학자 및 천문학자, 「Algebra」를 저술함.

하여 설명하고 시각화하고자 한다.

실제로 수학 교육현장에서 공학적 도구인 동적기하프로그램의 사용은 학생들에게 수학적인 원리, 개념 및 내용을 도형으로 그려보고 그 도형에서 조건을 바꾸어 다양한 장면으로 구현하는 탐구 및 조작 활동을 가능하게 함으로써, 어려워하는 추상적인 수학내용을 구체화시켜 이해하도록 하는데 도움을 줄 것이다. 따라서 본 논문에서 소개한 원뿔곡선을 이용한 기하적 해법은 수학 교실 내에서 공학적 도구를 사용한 자기 주도적 체험 활동의 필요성에 대한 한 사례가 될 수 있으며, 이 기하적 해법이 삼차방정식뿐만 아니라 사차 및 오차 등의 방정식에서도 적용가능한지에 대한 답을 학생들에게 남겨놓음으로써 독자적인 수학 탐구 활동의 계기가 될 수 있을 것이다. 또한, 학생들 스스로 새로운 지식을 발견하고 구체적이고 체계적인 수학적 내용을 이해해 가는 과정은 수학 교과 역량을 함양하는데 도움을 줄뿐만 아니라 '2015 개정 수학과 교육과정'에서 요구하는 수학적 문제해결, 추론, 창의 • 융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천의 6가지 수학교과 역량을 기를 수 있는 한 장을 제공할 것이라 기대한다.

Ⅱ. 연구 내용

본 논문에서는 중세 아랍인들이 연구한 것 중에서 삼차방정식의 풀이로 귀착된 특별한 문제 4가지를 고찰하고, 또 그 해를 구하는 방법을 원뿔곡선으로 어떻게 해결 하였는지 살펴보고자 한다. 즉 삼차방정식의 해법들 중 원뿔곡선을 활용한 방법들에 대해 고찰 및 재해석하고, 그것의 작도하는 과정을 동적기하프로그램을 활용하여 시각화해봄으로써 현행 교육과정과의 연관성을 표현하고자 한다.

삼차방정식의 기하적 해법에 관한 언급은 Archimedes[7]의 저서 「On the Sphere and Cylinder Ⅱ」에 실려 있는 'Proposition 4'에 관한 Al-Māhānī[8]의 연구에서 처음으로 보인다. 이외에도 정구각형의 작도와 일반각의 3등분문제에 관련된 여러 가지 삼차방정식의 연구결과가 소개되고 있다. 이후 중세시대 아랍 수학자들이 유클리드기하와 원뿔곡선의 개념을 이용하여 삼차방정식을 기하적으로 해결할 수 있는 방법을 모색하였는데, 이 과정에서 두 원뿔곡선의 교점을 활용하였다[8, 11, 20]. 현대적인 의미에서 삼차방정식은 실근과 허근을 모두 가질 수 있지만, 중세 아랍 수학자들은 음의 개념을 사용하지 않았기 때문에 양의 실근만을 구할 수밖에 없었다[5]. 양의 실근을 갖는 모든 형태의 삼차방정식과 이를 기하적으로 해결하기 위한 원뿔곡선의 조합은 아래의 [표 Ⅱ-1][9]과 같다[9, 15, 16].

---

7) 국적 : 고대 그리스 (B.C. 287? - B.C. 212?), 철학자, 수학자, 천문학자.
8) 국적 : 페르시아 (? - ?), 수학자, 천문학자, 일생이 잘 알려져 있지 않음.
9) 여기서 사용된 계수 및 상수항 a, b, c는 모두 양수이다.

Francois Viete[10]는 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$에 $y=x+\frac{b}{3a}$를 대입하여 이차항이 없는 방정식으로 정리하여 $y^3+my+n=0$ 꼴인 삼차방정식으로 고쳤다[4].

순서	삼차방정식	원뿔곡선의 조합
<1>	$x^3+c=ax^2+bx$	포물선과 쌍곡선
<2>	$x^3+bx=c$	
<3>	$x^3+c=ax^2$	
<4>	$x^3+ax^2=c$	
<5>	$x^3=bx+c$	
<6>	$x^3=ax^2+c$	
<7>	$x^3+c=bx$	
<8>	$x^3+ax^2+bx=c$	쌍곡선과 반원
<9>	$x^3+ax^2+c=bx$	쌍곡선과 쌍곡선
<10>	$x^3+bx+c=ax^2$	원과 쌍곡선
<11>	$x^3=ax^2+bx+c$	쌍곡선과 쌍곡선
<12>	$x^3+ax^2=bx+c$	
<13>	$x^3+bx=ax^2+c$	원과 쌍곡선

[표 Ⅱ-1] 삼차방정식의 기하적 해법을 위한 원뿔곡선의 조합

Francois Viete의 변형식[11]을 토대로 위 [표 Ⅱ-1] <6>의 삼차방정식에서 $x=y+\frac{a}{3}$로 두면 이차항이 제거된 <5>의 형태 삼차방정식을 얻을 수 있다. 또한 <7>의 삼차방정식에서 $x=-y$라 하면 <5>의 형태 삼차방정식이 된다. 마찬가지로 <5>의 삼차방정식에서 $x=y+\sqrt{\frac{b}{3}}$로 두면 <4>와 같은 형태의 삼차방정식이 되므로 사실상 [표 Ⅱ-1]에 제시된 <5>, <6>, <7>의 삼차방정식의 실근을 구한다는 것은 <4>에 제시된 삼차방정식의 실근을 구하는 것으로 충분하다.

따라서 포물선과 쌍곡선을 이용하여 풀 수 있는 삼차방정식의 형태는 총 네 가지로 분류되며, 각 형태에 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)을 활용한 기하적 해법들을 탐구하기 위한 네 가지 형태 즉,

---

10) 국적 : 프랑스 (1540 - 1603), 수학자.

11) $x^3+px^2+qx+r=0$에서 $x=y-\frac{p}{3}$로 치환하면, 이차항이 제거된 $x^3+mx+n=0$ 형태를 얻을 수 있다.

(1) Kamāl al-Dīn ibn Yūnus의 대칭축과 매개변수를 이용한 $x^3+p=qx^2+rx$ $(p,\ q,\ r>0)$ 형태,
(2) Alhazen의 주어진 수 k를 두 수의 합으로 분리하되 한쪽이 다른 쪽의 세제곱이 되도록 분리하는 문제, 즉 $x^3+x=k$ $(k>0)$[12] 형태,
(3) Umar al-Khayyām의 Archimedes' problem에 보이는 일명 al-Māhānī의 문제로도 알려진 $x^3+c=ax^2$ $(a,\ c>0)$ 형태([18, p.81]),
(4) Al-Tūsī의 원뿔곡선의 기본적인 성질을 이용하여 그 교점의 존재성을 엄밀히 따진 다음 비로소 해의 존재성을 밝힌 $x^3+ax^2=c$ $(a,\ c>0)$ 형태

를 연구한다. 더욱이 본 논문에서는
첫째, 수학사의 역사발생학적 원리에 따라 교수학적인 활용을 고려하여 원뿔곡선을 이용한 삼차방정식의 해결 방법을 문헌 연구를 통하여 고찰하고,
둘째, 현행 교육과정에서 요구하는 창의적이고 융합적인 수학 교과 역량을 기르고자 가급적 중등수학에서 다루고 있는 초등기하적인 기본성질과 용어를 사용하여 고찰한 내용들을 재조명 하며,
셋째, 동적기하프로그램을 활용하여 중세 아랍인들의 다채롭고 획기적인 아이디어를 시각화하여 나타냄에 있어서 그 작도 방법 및 과정을 교수-학습 자료로 이용이 가능하도록 보다 체계적이고 구체적으로 제시한다.
특히, 본 논문에 제시된 작도 방법은 동적기하프로그램 중 하나인 Geogebra를 사용하였으나, 이는 다른 동적기하환경에서도 적용이 가능하다.

Ⅲ. 연구 결과

본 연구의 결과는 중세 아랍인들이 연구한 삼차방정식의 해법에 관한 내용 중
첫째, Kamāl al-Dīn ibn Yūnus의 $x^3+p=qx^2+rx$ $(p,\ q,\ r>0)$의 해 x의 기하적 구성,
둘째, Alhazen의 주어진 수 k를 두 수의 합으로 분리하여 한쪽이 다른 쪽의 세제곱이 되도록 분리하는 문제, 즉 $x^3+x=k$의 원뿔곡선을 이용한 해법,
셋째, Archimedes' problem에 보이는 일명 al-Māhānī의 문제로도 알려진 $x^3+c=ax^2$에 관한 al-Khayyām의 해법,

---

12) [표 Ⅱ-1]의 삼차방정식 $x^3+bx=c$에서 $x=\sqrt{b}y$라 하면 x^3의 계수와 x의 계수가 1인 $y^3+y=k$ $(k>0)$ 형태의 삼차방정식을 얻을 수 있다.

넷째, 원뿔곡선의 기본적인 성질을 이용하여 그 교점의 존재성을 엄밀히 따진 다음 비로소 해의 존재성을 밝혔다는 Al-Tūsī의 $x^3+ax^2=c$의 해법에 대하여 고찰, 재해석 및 시각화 방법을 제시한다.

특히, 수학에서 '**작도의 완전해**'라 알려져 있는 4단계, 즉

(1)해석[13], **(2)작도**, **(3)증명**, **(4)음미**

의 순서로 나누어 위 네 가지 해법을 재해석하고 시각화할 것이다. 해석 단계에서는 두 개의 원뿔곡선의 교점에 의해 만들어지는 선분을 이용하여 삼차방정식의 해 x를 기하적으로 구성하였으며, 이를 위해 필요한 포물선 및 쌍곡선을 작도 단계에서 Geogebra를 이용하여 시각화하였다. 증명 단계에서 포물선에 관한 Apollonius의 sypmtom([2, p.3] 참조)을 사용하여 해석단계에서 구성한 해 x가 실제로 주어진 삼차방정식의 해가 되는지에 대한 엄밀한 증명을 하였으며, 음미 단계에서는 선분의 길이로 나타낼 수 없는, 즉 기하적으로 구성이 불가능한 음의 실근 및 또 다른 교점으로부터 얻어지는 나머지 근에 대한 논의를 제시하였다.

본 논문은 중세 아랍인들이 연구한 삼차방정식의 기하적 해법문제 네 가지를 네 단계에 걸쳐 간결하면서도 명료하게 재해석하고 시각화한 새로운 교수-학습 자료를 제시한다.

1. Kamāl al-Dīn ibn Yūnus이 제시한 $x^3+p=qx^2+rx$ $(p,\ q,\ r>0)$의 해법

(1) 해석

먼저 $\overline{AB}=q,\ s=\frac{p}{q^2},\ \overline{AG}=\frac{r}{s}$로 둔다. 또 점 G를 지나는 $\overline{AG}$의 수선위에서[14] $\overline{GE}=\overline{AB}$를 만족하는 점 E를 잡아 $\overline{AG}$와 $\overline{GE}$를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형과 $\overline{BD}//\overline{GE}$이고 $\overline{ED}=\overline{GB}$인 $\overline{BD}$를 아래의 [그림1.1]과 같이 그린다[15].

이 때 점 A를 꼭짓점, 직선 AB를 (대칭)축으로, 매개변수가 s인 포물선 Σ를 그린다. 그리고 점 B를 지나고 직선 EG와 직선 ED를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ를 그려, 포물선과 쌍곡선의 교점을 H라 한다. 여기서 $\overline{AG}$의 수선 THK와

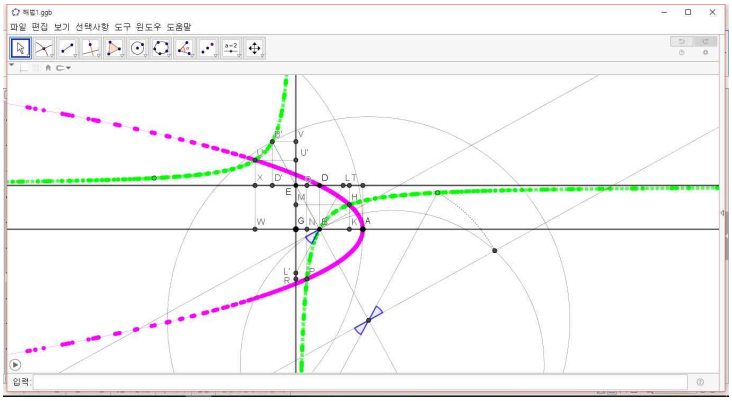
---

13) 고대 그리스인들의 문제해법의 상습적인 수단으로, 문제가 풀렸다고 가정해서 그 해법을 탐구하는 의미의 것이며, 이를 '해석'이라 불렀다. 그러나 Euclid의 『원론』에는 이 '해석' 부분은 없고 '작도'와 '증명'만 보이고 있는 것으로 알려져 있다.

14) Kamāl al-Dīn의 용어로는 p는 solid, r은 rectangle, $q,\ s,\ \overline{AG}$는 line segment이다([14, p.240]).

15) [그림1.1]에서는 점 G를 점 B의 왼쪽에서 택했지만, $rq<p$이면 점 G는 점 B와 A 사이에 놓이게 된다. 이 경우에 대해서는 (4)음미 단계에서 별도로 다루기로 한다.

$\overline{EG}$의 수선 MH를 그었을 때 $\overline{HK}=x$, 다시 말해서 삼차방정식의 해이다.

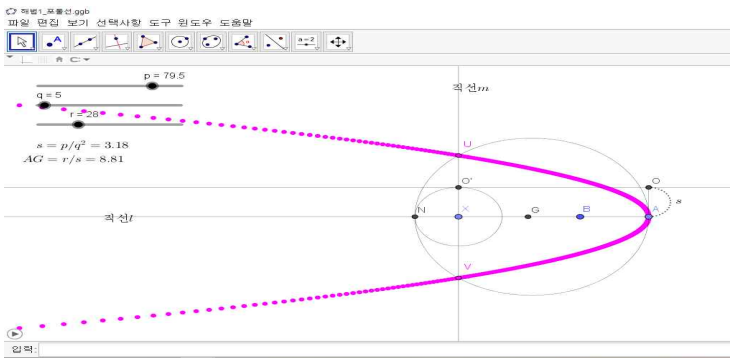


[그림1.1]

(2) 작도

① 포물선 Σ의 작도

점 A를 꼭짓점, 직선 AB를 (대칭)축, s를 매개변수로 하는 포물선 Σ는 다음과 같이 작도할 수 있다. 먼저 직선 AB에 수직이면서 길이가 $\delta=s$인 선분 $\overline{AO}$를 작도한다.[16] 점 A에서 $\overline{AO}$에 수직인 직선 l을 긋고 l 위의 임의의 점 X를 선택한다. 점 X에서 l에 수직인 직선을 긋는다. 이 직선을 m이라 하자. 점 O에서 직선 m에 내린 수선의 발을 O'라 하자. 점 X를 중심으로 반지름이 $\overline{XO'}=\delta$인 원을 작도하고 직선 l과 만나는 점을 N이라 하자. 선분 AN을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 m과의 교점을 U, V라 하자. 점 U, 점 V에 『자취 보이기』를 설정한 후 점 X에 『애니메이션 시작』을 실행 시키면 [그림1.2] 같은 포물선 Σ을 얻을 수 있다. ····· (1.1)

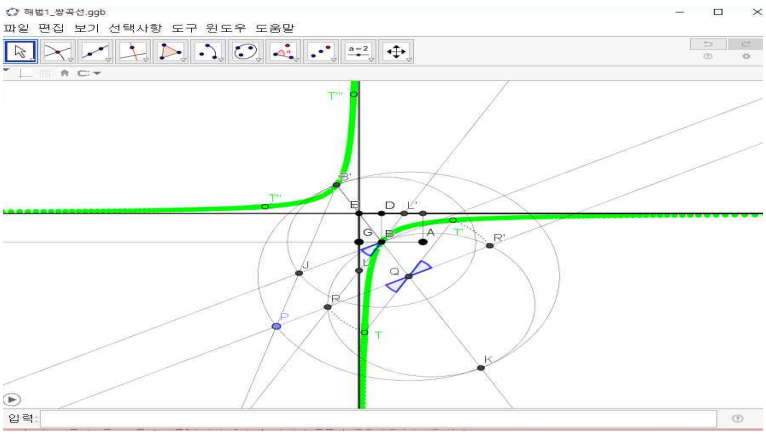


[그림1.2]

16) 본 논문에서는 작도 가능한 선분의 길이만을 다룬다.

② 쌍곡선 Γ의 작도

점 B를 지나고 직선 EG와 직선 ED를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ는 다음과 같이 작도할 수 있다. 먼저 점 E를 중심으로 점 B를 대칭 이동시킨 점 B'을 잡는다. 다음으로 점 B를 지나는 대각선 GD의 평행선이 반직선 EG, ED와 만나는 점을 차례로 L, L'이라 한다. 이 때 $\overline{LL'}^2 = \delta \cdot \overline{BB'}$을 만족하는 상수 δ를 찾는다. 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리에 의해 $\delta = \overline{BB'}$임을 알 수 있다. 이제 점 B에서 세운 직선 EB의 수선 위에서 $\delta = \overline{BJ}$를 만족하는 점 J를 잡은 후, 반직선 $B'J$ 위에 놓여있는 점 P를 임의로 택한다. 다시 점 P에서 반직선 $B'B$에 내린 수선의 발을 점 Q라 하여 점 Q를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$인 원과 반직선 BQ가 만나는 점을 K라 한다. 또 다시 $\overline{BK}$를 지름으로 하는 원을 그려 수선 $\overline{PQ}$와의 교점 R, R'을 잡는다. 여기서 점 Q를 중심으로 점 R, 점 R'을 $-\angle JBL$만큼 각각 회전시킨 점 T, T'을 잡는다. 두 점 T, T'을 점 E에 대해 대칭 시킨 점을 각각 T'', T''이라 하자. 이제 점 T, T', T'', T'''에 『자취 보이기』를 명령하고, 점 P에 『애니메이션 시작』을 실행시키면, [그림1.3]과 같이 우리가 찾는 쌍곡선 Γ를 얻을 수 있다. ····· (1.2)



[그림1.3]

(3) 증명

먼저 $\overline{AK} = z$라 한다. 점 B, 점 H가 둘 다 쌍곡선 위에 놓여 있으므로 직사각형 $BDEG$와 직사각형 $HTEM$의 넓이가 같다([12, Proposition 34, p.59] 참조). 따라서

$$(q-x)(\frac{r}{s}-z) = q(\frac{r}{s}-q), \text{ 즉 } rx+qzs = q^2s+zxs$$

가 성립한다. 그런데 $p = q^2s$이며, 점 H가 포물선 위에 놓여있으므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 $x^2 = zs$임을 알 수 있다. 이

상의 사실로부터 $rx+qx^2=p+x^3$을 얻을 수 있다. 다시 말해서 $\overline{HK}$는 삼차방정식의 해임을 알 수 있다.

(4) 음미

음미과정에서는 $x=\overline{HK}$ 외의 삼차방정식의 나머지 두 근에 대한 논의를 하고자 한다.

① Hogendijk([14])은 언급하고 있지 않지만 위의 [그림1.1]에서 $x=-\overline{NP}$도 주어진 삼차방정식의 해이다.

실제로 점 B, P가 모두 쌍곡선 위에 놓여 있으므로 직사각형 $BDEG$와 직사각형 $PQER$의 넓이가 같다([12, Proposition 34, p.59] 참조). 따라서

$$(q-x)z=q(\frac{r}{s}-q),\ \text{즉}\ qzs-xzs=qr-q^2s\ (\text{단},\ z=\overline{RP})$$

가 성립한다. 그런데 $p=q^2s$이며, 더욱이 점 H가 포물선 위에 놓여 있으므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 $x^2=r-zs$임을 알 수 있다. 따라서 $x^3+p=rx+qx^2$이 성립하므로 $x=-\overline{NP}$도 삼차방정식의 해임을 알 수 있다.

② 중세 아랍인은 쌍곡선으로 오늘날과는 달리 잎이 1개인 것만을 취급한 것으로 알려져 있다([14, 18]). 쌍곡선의 포물선의 제 3의 교점 U에서 선분 AG의 연장선에 내린 수선의 발을 점 W라 하면 $x=\overline{UW}$도 삼차방정식의 해이다.

먼저 수선 UW와 선분 DE의 연장선이 만나는 교점을 X라 한다. 이 때 점 B', 점 U는 모두 쌍곡선 위에 놓여 있으므로 직사각형 $B'D'EV$와 $UXEU'$의 넓이가 같다([12, Proposition 34, p.59] 참조). 따라서

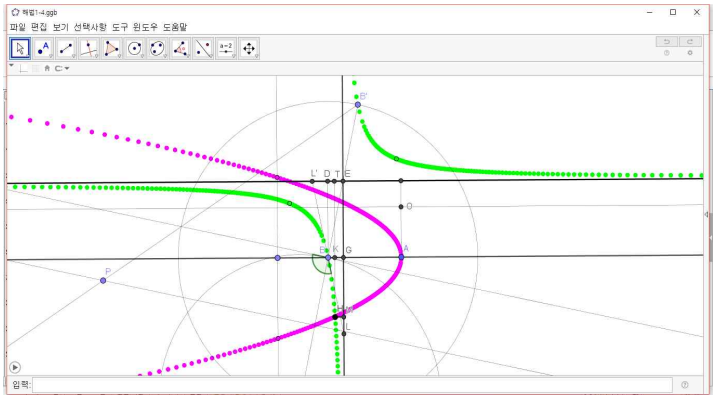
$$(x-q)z=q(\frac{r}{s}-q),\ \text{즉}\ xzs-qzs=qr-p\ (\text{단},\ \overline{UU'}=z)$$

가 성립한다. 그런데 점 U는 포물선 위에도 놓여있으므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 $x^2=r+zs$임을 알 수 있다. 이상으로부터 $x^3+p=rx+qx^2$이 성립함을 알 수 있다. 따라서 $x=\overline{UW}$도 삼차방정식의 해임을 알 수 있다.

③ 한편 $rq<p$인 경우에는 [그림1.4]와 같이 점 G가 점 A와 점 B 사이에 놓인다. 이 경우에도 앞서와 같은 방법으로 Kamāl al-Dīn 의 포물선과 쌍곡선을 그려 그 교점을 H라 한다. 이 때 점 B와 점 H는 모두 쌍곡선위에 놓여있으므로 직사각형 $BGED$와 직사각형 $HMET$의 넓이는 같다. 따라서 $-\overline{KH}=x$라 두면

$$\left(q-\frac{r}{s}\right)q=z(q-x),\ \text{즉}\ q^2s-rq=qzs-xzs\ (\text{단},\ z=\overline{HM})$$

가 성립한다. 점 H는 포물선위에도 놓여있으므로 $x^2 = r + zs$이다. 이상으로부터 $x^3 + p = rx + qx^2$이 성립하므로 $-\overline{KH}$는 주어진 삼차방정식의 해임을 알 수 있다.



[그림1.4]

2. Alhazen이 제시한 $x^3 + x = k$의 해법

Alhazen은 주어진 수 k를 두 수의 합으로 분리하되 한쪽이 다른 쪽의 세제곱이 되도록 분리하는 문제, 다시 말해서 삼차방정식 $x^3 + x = k$를 원뿔곡선을 이용하여 다음과 같이 해결했다([18, p.72]).

(1) 해석

선분AB가 주어졌다고 하자. $\overline{AB}$에 수직인 선분 BG를 그려 $\overline{AB}:\overline{BD} = k^3 : k$를 만족하는 점 D를 선분 BG 위에서 찾아 $\overline{AB}$에 평행인 선분 DE를 그은 다음 직사각형 $AEDB$를 만든다([그림2.1] 참조). 여기서 직선 BA와 직선 BG를 점근선으로 하고 점 E를 지나는 쌍곡선 Γ를 그린다. 또, 직선 GB의 연장선 위에 놓여있는 점 N으로서 $\overline{BN} = \overline{BD}$를 만족하는 것을 지나고, 직선 AB에 평행인 직선이 직선 EA와 만나는 점을 Q라 한다. 다시 점 N을 꼭짓점, 직선 NQ를 (대칭)축, $\overline{NB}$를 매개변수로 하는 포물선 Σ를 그려 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 교점[17]을 점 Z라 하고, $\overline{AB}$에 평행인 선분 ZT와 선분 GBN에 평행인 선분 ZKM을 [그림2.1]처럼 각각 그린다. 이제 직선 QN의 연장선 위에서 $\overline{ZT} = \overline{NU}$를 만족하는 점 U를 택하자.

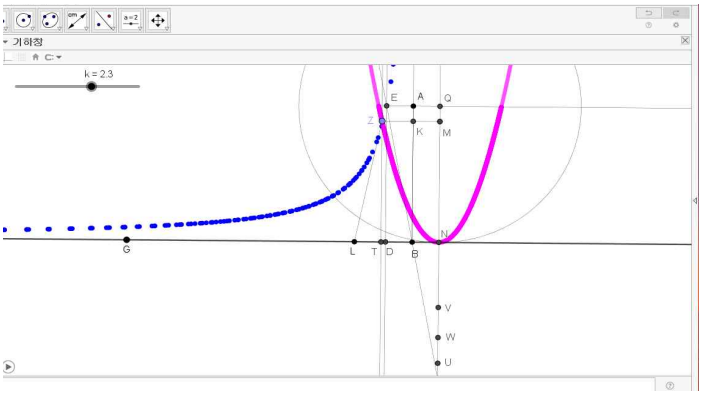
또 선분 NU위에서 $\overline{UV} = \overline{MZ}$를 만족하는 점 V를 잡고, 또 선분 UV 위에서

17) Alhazen은 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ가 반드시 만남을 설명하고 있으나, 우리는 Alhazen의 설명을 [그림2.1]으로 대신하기로 한다.

$\overline{UW} = \overline{MK}$를 만족하는 점 W를 잡자. 이 때 $\overline{XY}$ 위에서

$$\frac{\overline{X\theta}}{\overline{Y\theta}} = \frac{\overline{QU} - \overline{NU}}{\overline{WU}}$$

를 만족하도록 점 θ를 잡는다면[18] $x = \overline{Y\theta}$가 주어진 삼차방정식의 해이다.



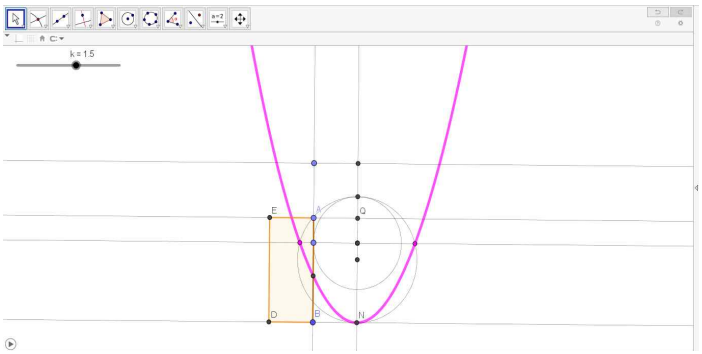
[그림2.1]

(2) 작도

작도과정은 (1.1), (1.2)와 동일하다.

① 포물선 Σ의 작도

점 N을 꼭짓점, 직선 NQ를 (대칭)축으로, 매개변수가 $\overline{NB}$인 포물선 Σ

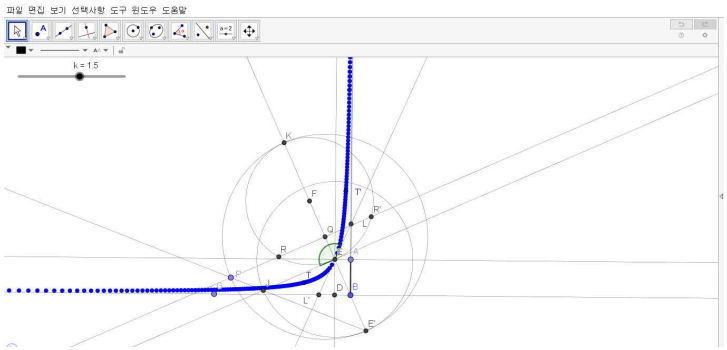


[그림2.2]

18) θ의 존재성에 대한 증명은 (3) 증명 과정에서 다루었다.

② 쌍곡선 Γ의 작도

점 E를 지나고 직선 BA와 직선 BG를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ



[그림2.3]

(3) 증명

임의의 실수 k에 대해, 다음과 같은 두 조건을 동시에 만족하는 수 $a > b > c > d$를 찾는 문제로부터 시작한다.

(1) $a : b = b : c = c : d$	(2) $(a-b) : d = k^3 : k$

먼저, 교점 Z는 쌍곡선 Γ 위에 놓여있으므로

$$\overline{TZ} \cdot \overline{ZK} = \overline{DE} \cdot \overline{EA} \quad ([12,\ \text{Proposition 34, p.59}]\ \text{참조})$$

가 성립한다. 따라서 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{ZT}} = \dfrac{\overline{ZK}}{\overline{BD}}$이므로,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ZT}} = \frac{\overline{ZK}}{\overline{KM}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

또한 직선 QN의 연장선 위에서 $\overline{ZT} = \overline{NU}$를 만족하도록 점 U를 잡았으므로,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ZT}} = \frac{\overline{QN}}{\overline{NU}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.2)$$

(2.1)과 (2.2)로부터

$$\frac{\overline{QN}}{\overline{NU}} = \frac{\overline{ZK}}{\overline{KM}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.3)$$

를 얻을 수 있다.

한편 점 Z는 포물선 Σ 위에도 놓여있으므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 $\overline{MZ}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{MK}$이므로,

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{ZM}}{\overline{KM}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.4)$$

이 성립한다. 따라서 (2.3), (2.4)로부터 $\frac{\overline{QU}}{\overline{NU}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{ZM}}{\overline{KM}}$을 얻을 수 있다. 이제 선분 NU 위에서 $\overline{UV} = \overline{MZ}$를 만족하는 점 V를 잡고, 또 선분 UV 위에서 $\overline{UW} = \overline{MK}$를 만족하는 점 W를 잡으면 $\overline{QU}$, $\overline{NU}$, $\overline{VU}$, $\overline{WU}$가 위의 조건 (1)을 만족함을 알 수 있다. 또한 $\overline{QN} = \overline{AB}$, $\overline{WU} = \overline{KM} = \overline{BN} = \overline{BD}$이므로 $\frac{\overline{QN}}{\overline{WU}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$를 만족한다. 그런데 $\overline{QN} = \overline{QU} - \overline{NU}$이므로

$$(\overline{QU} - \overline{NU}) : \overline{WU} = k^3 : k$$

이 되어 위의 조건 (2)도 만족한다.

조건 (1)과 (2)를 만족하는 수 $\overline{QU}$, $\overline{NU}$, $\overline{VU}$, $\overline{WU}$를 찾은 것은 주어진 수 k를 두 수의 합으로 분리하되 한쪽이 다른 쪽의 세제곱이 되도록 분리할 수 있음을 의미한다. 따라서 $k = \overline{XY}$를

$$\frac{\overline{X\theta}}{\overline{Y\theta}} = \frac{\overline{QU} - \overline{NU}}{\overline{WU}}$$

만족하도록 점 θ로 나누었다면 $\overline{X\theta} = \overline{Y\theta}^3$이 되므로 $\overline{Y\theta} + \overline{Y\theta}^3 = \overline{XY}$이고 $x = \overline{Y\theta}$는 $x^3 + x = k$의 해가 된다.

(4) 음미

쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 교점은 점 Z가 유일하므로 $x = \overline{Y\theta}$만이 삼차방정식 $x^3 + x = k$의 해가 된다.

3. Umar al-Khayyām이 제시한 $x^3 + c = ax^2$의 해법

일명 al-Māhānī의 문제로도 알려진 삼차방정식

$$x^3 + c = ax^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.1)$$

에 대한 al-Māhānī의 해법에 대해서 알아보자. 여기서는 a와 c에 의하여 만들어진 선분의 대소 관계에 따라 $x^3 + c = ax^2$의 해에 관해 논의하고 있으므로 전개상의 편의를 위해 증명과 음미 단계를 함께 다루도록 한다.

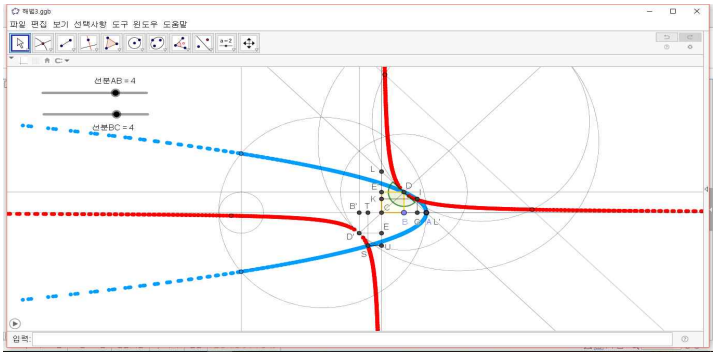
(1) 해석

먼저 $a = \overline{AC}$라 하고 $c = \overline{BC}^3$이라 하자. 이 때 여기서 다음과 같이 3가지 경우로 나누어 생각하도록 한다.

① $\overline{BC} = \overline{AB}$인 경우

[그림3.1]과 같이 정사각형 $BDEC$를 만들어 점 D를 지나고 직선 CA와 직선

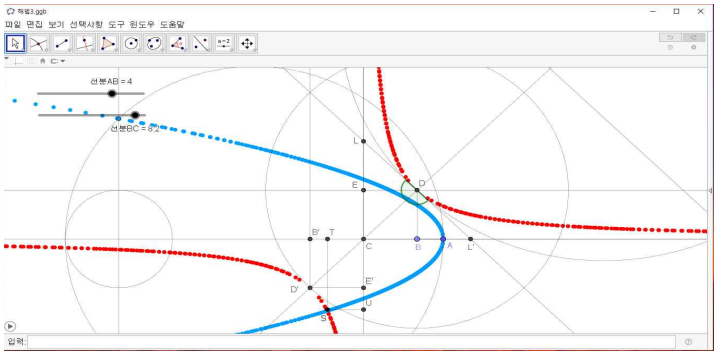
CE를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ와 점 A를 꼭짓점, 직선 AC를 (대칭)축, $\overline{BC}$를 매개변수로 하는 포물선 Σ를 [그림3.1]처럼 그린다. 이 때 $x = \overline{BC}$는 삼차방정식 (3.1)을 만족한다. 다음으로 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 교점 I에서 직선 AC와 직선 CE에 각각 내린 수선의 발을 차례로 점 G, 점 K라 하면 $x = \overline{GC}$가 주어진 삼차방정식의 해가 된다. 한편 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 또 다른 교점 S에서 직선 AC와 직선 CE에 각각 내린 수선의 발을 차례로 점 T, 점 U라 하면 $x = -\overline{TC}$ 역시 삼차방정식 (3.1)의 해이다.



[그림3.1]

② $\overline{BC} > \overline{AB}$인 경우

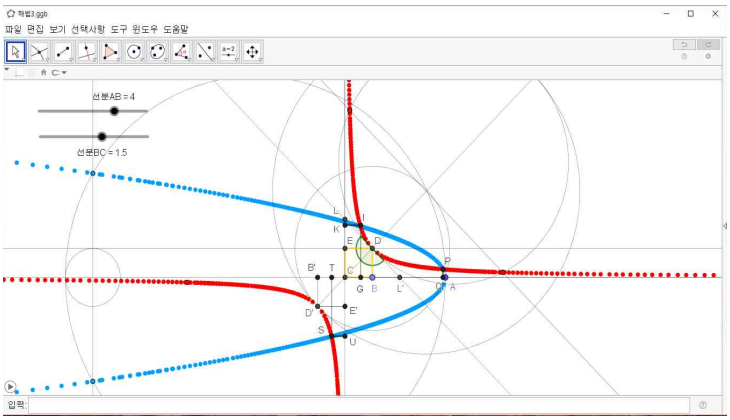
쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 제 1사분면에서의 교점은 존재하지 않는다. 그러나 [그림3.2]에서처럼 제 3사분면에서는 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ가 만나므로 그 교점을 S라 하고, 점 S에서 선분 BC의 연장선 위에 내린 수선의 발을 점 T라 할 때, $x = -\overline{TC}$는 삼차방정식 (3.1)의 해가 된다.



[그림3.2]

③ $\overline{BC} < \overline{AB}$인 경우

쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 교점은 [그림3.3]에서처럼 제 1사분면에서 점 I와 점 P 두 개, 제 3사분면에서 점 S 한 개가 생긴다. 이 때 각 교점에서 선분 BC의 연장선 위에 내린 수선의 발을 차례로 점 G, 점 Q, 점 T라 하면 $x = \overline{GC}$, $\overline{QC}$, $-\overline{TC}$는 모두 삼차방정식 (3.1)의 해이다.



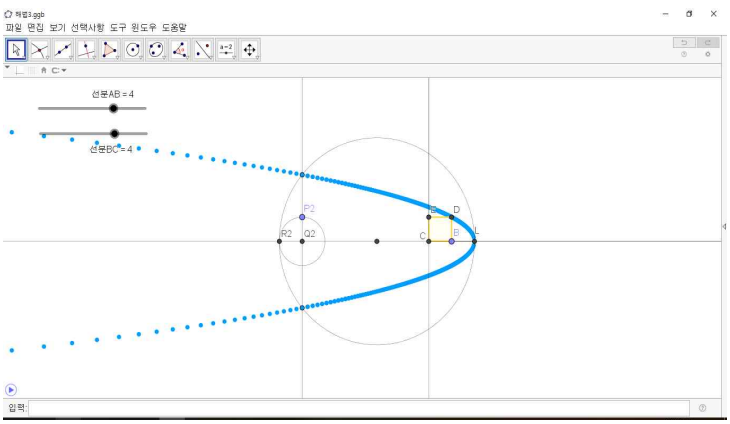
[그림3.3]

(2) 작도

작도과정은 (1.1), (1.2)와 동일하다.

① 포물선 Σ의 작도

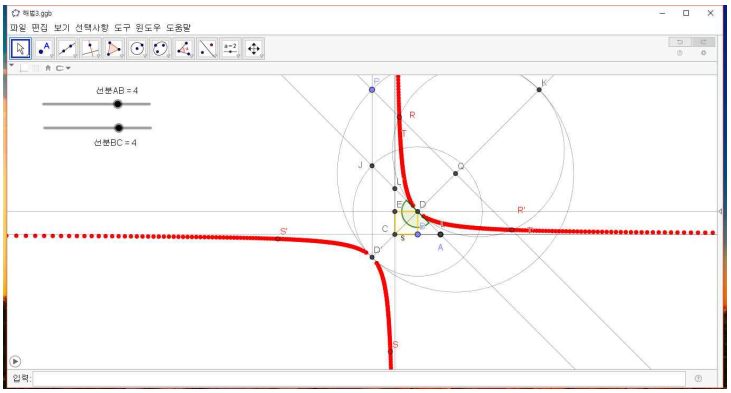
점 A를 꼭짓점, 직선 AC를 (대칭)축, $\overline{BC}$를 매개변수로 하는 포물선 Σ



[그림3.4]

② 쌍곡선 Γ의 작도

점 D를 지나고 직선 CA와 직선 CE를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ



[그림3.5]

(3) 증명, 음미

① $\overline{BC} = \overline{AB}$인 경우

$\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$이므로 점 D는 포물선 Σ 위에도 놓여있으며, $a = 2\overline{BC}$이므로 $x = \overline{BC}$는 주어진 삼차방정식 (3.1)을 만족한다. 또한 또 다른 교점 I에 대하여 $\overline{IG} \cdot \overline{IK} = \overline{DB} \cdot \overline{DE}$([12, Proposition 34, p.59] 참조)가 성립하므로

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IG}}$$

이다. 한편 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 $\overline{IG}^2 = \overline{AG} \cdot \overline{BC}$이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{IG}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{GA}}$$

를 얻을 수 있다. 따라서

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IG}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{GA}}$$

이므로

$$\frac{\overline{GC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{GA}}, \quad \text{또는} \quad \overline{BC}^3 = \overline{GC}^2 \cdot \overline{GA}$$

를 만족한다. 이 식의 양변에 $\overline{GC}^3$을 더하면 $\overline{GC}^3 + \overline{BC}^3 = \overline{AC} \cdot \overline{GC}^2$이 얻어지며, 이로부터 $x = \overline{GC}$도 삼차방정식 (3.1)의 해 임을 알 수 있다.

끝으로, 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 또 다른 교점 S에 대하여 $\overline{ST} \cdot \overline{SU} = \overline{D'B'} \cdot \overline{D'E'}$([12, Proposition 34, p.59] 참조)이 성립한다. 그러므로

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{ST}}$$

이다. 한편 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터

$$\overline{ST}^2 = \overline{AT} \cdot \overline{BC} = \overline{AT} \cdot \overline{B'C}$$

이다. 즉

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{AT}}$$

를 얻을 수 있다. 따라서

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{AT}}$$

이므로

$$\frac{\overline{TC}^2}{\overline{B'C}^2} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{AT}}, \text{ 또는 } \overline{B'C}^3 = \overline{TC}^2 \cdot \overline{AT}$$

이다. 이 식의 양변에 $\overline{TC}^3$을 빼면 $(-\overline{TC})^3 + \overline{BC}^3 = \overline{AC} \cdot (-\overline{TC})^2$이 얻어지며, 이로부터 $x = -\overline{TC}$가 삼차방정식 (3.1)의 해임을 알 수 있다.

② $\overline{BC} > \overline{AB}$인 경우

$\overline{BD}^2 > \overline{AB} \cdot \overline{BC}$이므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 점 D는 포물선 Σ의 바깥쪽에 놓여있음을 알 수 있다. 그러므로 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 제 1사분면에서의 교점은 존재하지 않는다. 그러나 $x = -\overline{TC}$가 삼차방정식 (3.1)의 해임을 앞서 ①의 마지막 부분에서 보인 것과 똑같은 방법으로 증명할 수 있다.

③ $\overline{BC} < \overline{AB}$인 경우

$\overline{BD}^2 < \overline{AB} \cdot \overline{BC}$이므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 점 D는 포물선 Σ의 안쪽에 놓여있음을 알 수 있다. 따라서 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ의 교점은 [그림3.3]에서처럼 제 1사분면에서 점 I와 점 P 두 개, 제 3사분면에서 S 한 개가 생긴다. 이 때 각 교점에서 선분 BC의 연장선 위에 내린 수선의 발을 차례로 점 G, 점 Q, 점 T라 하면 $x = \overline{GC}$, $\overline{QC}$, $-\overline{TC}$는 모두 삼차방정식 (3.1)의 해임을 ① 에서 보인 것과 똑같은 방법으로 증명할 수 있다.

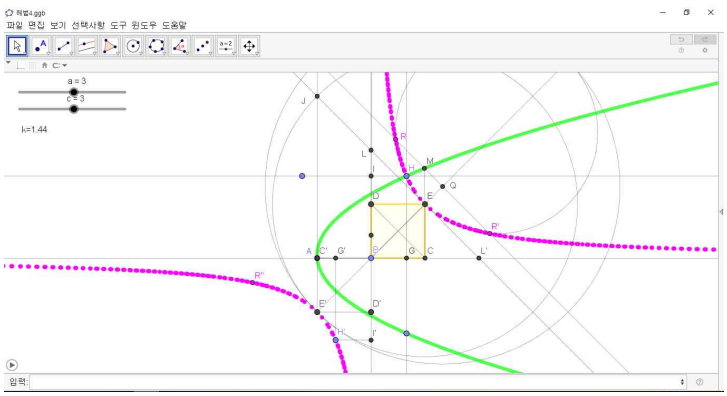
4. Al-Tūsī이 제시한 $x^3+ax^2=c$의 해법

Al-Tusi는 원뿔곡선의 기본적인 성질을 이용하여 그 교점의 존재성을 엄밀히 따진 다음 삼차방정식의 해의 존재성을 밝혔다. 이와 같은 관점에서 삼차방정식

$$x^3+ax^2=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.1)$$

는 항상 해를 가짐을 Al-Tusi는 어떻게 보였는지 구체적으로 살펴보자.

(1) 해석



[그림4.1]

먼저 $k^3=c$를 만족하는 k를 찾아, $\overline{AB}=a$인 선분 AB의 연장선 위에서 $\overline{BC}=k$를 만족하는 점 C를 잡는다. 이제 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형 $BCED$를 만들어 점 E를 지나고 직선 BC와 직선 BD를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ와 점 A를 꼭짓점, 직선 AB를 (대칭)축, $\overline{BC}$를 매개변수로 하는 포물선 Σ를 [그림4.1]처럼 그린다.

변 CE의 연장선이 포물선 Σ와 만나는 점을 M이라 하면 점 M은 쌍곡선 Γ상의 점 E 보다 위쪽에 놓여있으므로 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ는 반드시 만난다. ····· (4.2)

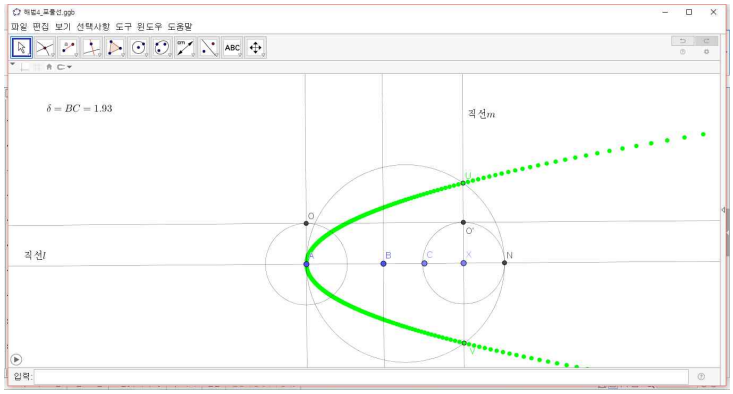
[그림4.1]에서처럼 그 교점을 H라 하고, 이 점에서 직선 BC와 직선 BD에 내린 수선의 발을 차례로 점 G, 점 I라 하면 $\overline{BG}$는 주어진 삼차방정식 (4.1)의 해이다. ····· (4.3)

(2) 작도

작도과정은 (1.1), (1.2)와 동일하다.

① 포물선 Σ의 작도

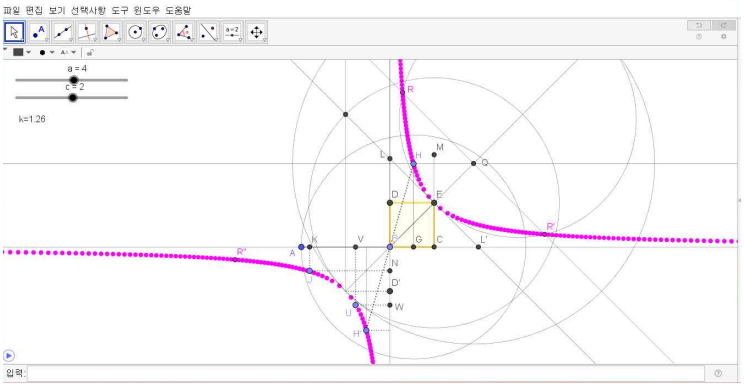
점 A를 꼭짓점, 직선 AB를 (대칭)축, $\overline{BC}$를 매개변수로 하는 포물선 Σ



[그림4.2]

② 쌍곡선 Γ의 작도

점 E를 지나고 직선 BC와 직선 BD를 점근선으로 하는 쌍곡선 Γ



[그림4.3]

(3) 증명

① (4.2)에 대한 증명

변 CE의 연장선이 포물선 Σ와 만나는 점을 M이라 하면 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터 $\overline{CM}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$임을 알 수 있다. 한편 $\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2$이며 $\overline{AC} > \overline{BC}$이므로 $\overline{CM}^2 > \overline{CE}^2$, 즉 $\overline{CM} > \overline{CE}$이다.

그러므로 포물선 Σ상의 점 M은 쌍곡선 Γ상의 점 E보다 위쪽에 놓여있으므로 쌍곡선 Γ와 포물선 Σ는 반드시 만난다.

② (4.3)에 대한 증명

[그림4.1]에서처럼 그 교점을 H라 하고, 이 점에서 직선 BC와 직선 BD에 내린 수선의 발을 차례로 점 G, 점 I라 하면 포물선에 관한 Apollonius의 Symptom ([2, p.3] 참조)으로부터

$$\overline{HG}^2 = \overline{AG} \cdot \overline{BC}, \quad \text{즉} \ \frac{\overline{AG}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{BC}}$$

를 얻을 수 있다.

한편 점 H는 쌍곡선 Γ 위에도 놓여있으므로

$$\overline{HG} \cdot \overline{HI} = \overline{EC} \cdot \overline{ED} = \overline{BC}^2, \quad \text{즉} \ \frac{\overline{HG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BG}}$$

([12, Proposition 34, p.59] 참조)가 성립하므로 $\frac{\overline{AG}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BG}}$이다.

$\overline{BC}^3 = \overline{BG}^2 \cdot \overline{AG}$이고 $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG}$이므로 $\overline{BC}^3 = \overline{BG}^3 + \overline{BG}^2 \cdot \overline{AB}$, 즉 $c = \overline{BG}^3 + a \cdot \overline{BG}^2$이 성립한다. 그러므로 $\overline{BG}$는 주어진 삼차방정식 (4.1)의 해이다.

(4) 음미

$\overline{AB} \geqq 2\overline{BC}$인 경우에는 [그림4.4]에서처럼 포물선 Σ와 쌍곡선 Γ의 교점이 3개이다. 교점 H에 대해서는 al-Tūsī 의 방법을 따라 $\overline{BG}$가 주어진 삼차방정식의 해임을 보일 수 있다. 그렇다면 남은 교점, 이를테면 점 J에 대해서도 al-Tūsī 의 방법을 따르기로 해보자.

먼저 점 J에서 직선 AB와 직선 DB의 연장선에 각각 내린 수선의 발을 차례로 점 K, 점 N이라 하면 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)으로부터

$$\overline{KJ}^2 = \overline{AK} \cdot \overline{BC'}, \ \text{즉} \ \frac{\overline{AK}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{KJ}}{\overline{BC'}}$$

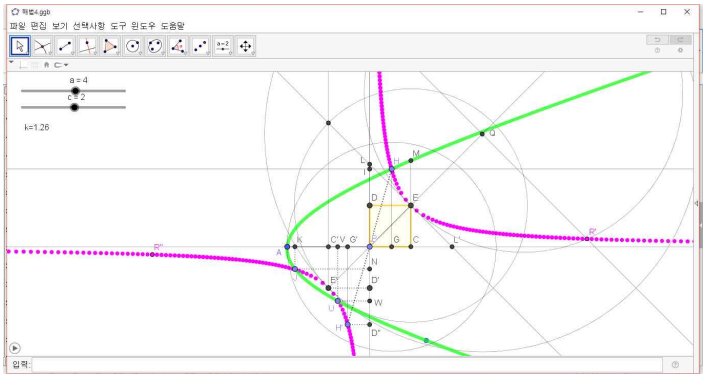
를 얻을 수 있다. 단, 점 C'은 점 C의 직선 DB에 관한 대칭점이다. 한편 점 J는 쌍곡선 Γ 위에도 놓여있으므로

$$\overline{KJ} \cdot \overline{KB} = \overline{BC'}^2, \ \text{즉} \ \frac{\overline{KJ}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{KB}}$$

([12, Proposition 34, p.59] 참조)가 성립하므로 $\frac{\overline{AK}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{KJ}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{KB}}$이다.

따라서 $\overline{BC'}^{\,3} = \overline{KB}^{\,2} \cdot \overline{AK}$이며, 더욱이 $\overline{AK} = \overline{AB} - \overline{KB}$이므로 $\overline{BC'}^{\,3} = (-\overline{KB})^{3} + (-\overline{KB})^{2} \cdot \overline{AB}$, 즉 $c = (-\overline{KB})^{3} + a \cdot (-\overline{KB})^{2}$이 성립한다. 그러므로 $-\overline{KB}$도 주어진 삼차방정식의 해임을 알 수 있다.

끝으로 교점 U에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 점 V라 하면 $-\overline{VB}$도 주어진 삼차방정식의 해임을 똑같은 방법으로 보일 수 있다.



[그림4.4]

Ⅳ. 결론 및 제언

본 논문에 소개한 중세 아랍인들의 삼차방정식의 기하적 해법에 관한 연구들은 그들의 일부 업적에 지나지 않으며, 그 중 간명하면서도 효율적이고 효과성이 높다고 생각되는 원뿔곡선을 이용한 네 가지 방법을 엄선하여 고찰하였다. 동시에 초등기하적인 성질을 활용하여 가급적 중등수학에서 소개하고 있는 용어로 설명하고 작도방법을 보인 바, 교과내용과 수학사적 고찰의 필연성을 강조하는 한 사례라고 생각한다.

현행 교육과정에서 삼차방정식과 연립방정식에 관한 내용은 고등학교 1학년 교육과정에서 다루고 있음에도 삼차방정식을 더 낮은 차수의 연립방정식으로 해석하는 과정이 생략되어 있으며, 원뿔곡선의 내용을 다룬 후에도 삼차방정식의 해와 원뿔곡선의 교점을 상호 연관시켜 다루고 있는 연구는 찾아보기 어렵다.

본 연구에서는 중세 아랍 네 명의 수학자 Kamāl al-Dīn ibn Yūnus, Alhazen, Umar al-Khayyām, Al-Tūsī들이 시도했던 삼차방정식에 대한 기하적 해법을 고찰하였고, 좌표평면에서의 수학적 연관성을 기본적인 틀로 하고 있는 해석기하의 관점으로 삼차방정식의 기하적 해법을 해석하고 시각화 하였다. 또한 중세 이슬

람 기하학자들이 사용한 화려한 수학적 지식과 기능을 효과적으로 전달하고, 추론 과정의 정당성을 보이기 위해

첫째, '해석'이라는 단계로 해결전략을 탐색하였고,

둘째, 그 과정에서 최적의 해결방안으로 '작도'방법을 찾고,

셋째, 그 해석 과정이 옳음을 '증명'이라는 단계에서 확인하고,

넷째, 그 증명 과정에서 기하적으로 구성 불가능한 음의 해를 찾는 '음미'

의 4단계 과정을 사용하였다.

'2015 개정 수학과 교육과정'의 수학과제 탐구 능력에서는 학생들의 수학 신장을 위해 6가지 수학 교과 역량 즉,

'문제 해결, 추론, 창의 • 융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천'

을 길러야 한다고 제시하고 있다[1]. 중세 이슬람 기하학자들이 보인 삼차방정식 해결 과정은 현행 교육과정이 강조하는 6가지 수학교과 역량이 잘 분포된 수학적 모델링으로서 역량 중심 교육과정 개발에 의미 있는 시사점 도출이 기대된다. 즉 문제 해결을 위해 먼저 올바른 '해석(추론)'을 하고, 다음으로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom([2, p.3] 참조)을 이용하여 '작도(정보처리)'하고, 기존의 여러 정리를 적절히 이용하여 '증명(의사소통)'함과 동시에 마지막으로 그 방법에서 불가능한 해를 찾는 '음미(창의 • 융합)'를 한다. 더욱이 이 같은 방법을 Archimedes의 저서 「On the Sphere and Cylinder II」, 'Proposition 4'에서 확인할 수 있다(실천 및 태도).

본 논문에서 연구한 결과를 요약하면

첫째, 일반각의 3등분문제 등에 직 • 간접적인 해결 방법을 제시하고 있는 삼차방정식의 기하적 해법문제를 역사 발생학적 원리에 따라 수 천년의 세월이 지난 오늘날 동적기하프로그램을 이용하여 시각화 및 의사소통을 시도하였으며,

둘째, 지금까지 학교수학은 그 해결방법이 간단하거나 해를 구하는 계산 및 작도 과정이 비교적 복잡하지 않은 문제만을 다루어 온바, 그 적용 범위가 좁고 현실과 동떨어진 수학을 다루었으나, 공학적 도구를 활용하여 학생들은 문제 해결의 아이디어에만 집중하고 이를 위해 부합되어지는 복잡한 과정은 신속하게 처리함으로써 수학문제를 다룰 수 있는 영역을 확대하고자 하였고,

셋째, 동적기하프로그램을 이용한 쌍곡선과 포물선의 작도를 구체적이고 체계적으로 활용하였으며, Apollonius의 Symptoms라는 아이디어를 이용하여 기하적으로 구성된 복잡한 작도과정을 체계적이고 구체적으로 표현하였다.

이러한 시도는 중세 아랍 기하학자들이 제시한 해법을 확인하는 과정도 중요하지만, 구체적 조작과 활동을 통해 학생들이 직접 동적기하프로그램을 사용해 보

고, 알아야만 하는 초등기하적인 기본성질의 중요성과 아름다움을 스스로 체험할 수 있게 하는 것의 중요함을 강조하고 있다. 이것은 학생들이 미래 사회 구성원으로서 그들의 역할을 성공적으로 수행할 수 있게 하고 자신들의 재능과 소질을 개발하고 잠재력을 발현하여 수학에 대한 자신감과 흥미를 가지고 수학교과 역량을 기를 수 있다는 점에서 의미가 있다.

끝으로 수학 교육에서의 교수-학습을 위한 후속 연구에 대한 제언으로 방정식을 다루는 교수-학습 상황에서 대수방정식과 함수의 그래프를 연계하여 다룰 필요가 있으며, 중세 아랍의 삼차방정식의 기하적 해법은 수학사적으로 교과내용지식을 보다 풍부하게 할 수 있으며, 학교 교육현장에서 동적기하프로그램을 통한 탐구 활동은 삼차방정식의 기하적 해결을 위해 학생들의 도전적인 과제가 될 수 있음을 언급한다.

본 논문은 수학적 지식의 연계성과 관련된 구체적인 교수-학습 방법을 다루었다기보다는 수학사를 통하여 삼차방정식을 대수적인 관점이 아니라 기하적인 관점에서 표현하고 나타낸 것이며, 학교 수학의 다양한 영역에서 수학적 지식의 연결 고리가 될 수 있는 과정을 상세하게 밝히고, 이를 교수-학습 상황에 적용할 수 있는 방법을 제시하였으므로, 앞으로 이를 바탕으로 더 많은 연구가 이루어지기를 저자들은 기대한다.

참고문헌

[1] 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호[별책8].

[2] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 symptoms 재조명과 시각화, *한국수학교육학회지 시리즈 A* 제52권 제1호(2013), 83-95.

[3] 김향숙 · 박진석 · 이은경 · 이재돈 · 하형수, 중세 이슬람이 보인 입방배적문제 해결방법들의 재조명과 시각화, *East Asian Mathematical J.* 30(2014), 181-203.

[4] 박진석 · 김향숙, 수학사와 함께 떠나는 수학여행, 경문사, 2014(2015년 세종도서 우수학술도서).

[5] 박진석 · 김향숙, 해석기하학개론[제 2 판], 경문사, 2009.

[6] 반은섭, 삼차방정식의 기하학적 해결을 위한 수학적 지식의 연결 과정 분석, 한국교원대학교 박사학위논문, 2016.

[7] Berggren, J. L., Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Springer-Verlag, New York, 1986.

[8] Boyer, C. B. & Merzbach, U. C., A history of mathematics (2nd ed), McGraw-Hill, New York, 1991.
[9] Connor, M. B., A historical survery of methods of solving cubic equations, Unpublished master's dissertation, University of Richmond, Virginia, 1956.
[10] Coxford. A. F., The case for connections, In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), Connecting mathematics across the curriculum (pp.3 - 12), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.
[11] Eves, H., Omar Khayyam's Solution of Cubic Equation, *Mathematics Teacher* 51(1958), 285-286.
[12] Heath, T. L., Apollonius of Perga : Treatise on conic sections-The conics of Apollonius, Cambridge : at the university press, 1896.
[13] Hogendijk, J. P., On the trisection of an angle and the construction of a regular nonagon by means of conic sections in medieval Islamic geometry, the 2nd International Symposium of the History of Arabic Science, to be held in Aleppo, Syria, 1979.
[14] Hogendijk, J. P., Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon, *Archive for History of Exact Sciences* 30(1984), 197-330.
[15] Khayyam, O., An essay by the uniquely wise 'ABEL FATH BINAL-KHAYYAM' on algebra and equations, Translated by R. Khalil & Reviewed by W. Deeb. UK: RG1 4QS, 2008.
[16] Law, H. L., The comparison between the methods of solution for cubic equations in Shushu Jiuzhang and Risalah fil-barahin a'la masail ala-Jabr wa'l-Muqubalah, *Mathematical Modley* 30(2)(2003), 91-101.
[17] Looka, H. A., Polynomial equations from ancient to modem times: A review, *University Bulletin* 16(2)(2014), 89-110.
[18] Sinclair, Nathalie M., Mathematical applications of conic sections in problem solving in ancient Greece and medieval Islam, Simon Fraser Univ, 1995.
[19] Villanueva, j., The cubic and quartic equations: Intermediate algebra course, Electronic proceeding of ICTCM, Florida Memorial College, 2013.
(Retrieved from http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL16/C037/paper.pdf.)
[20] Wagner, R., A historically and philosophically informed approach to mathematical metaphors, *International Studies in the Philosophy of Science* 27(2)(2013), 109-135.

Kim, Hyang Sook
Department of Computer Engineering
& Institute of Natural Science
Inje University
Gimhae, 621−749 Korea
E−mail : mathkim@inje.ac.kr

Kim, Yang
Department of Computer−Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621−749 Korea
E−mail : kimyang67@nate.com

Park, See Eun
Department of Computer−Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621−749 Korea
E−mail : seeeun91@daum.net